


EX BIBLIOTECÂ
D. A. de VLLOA





PIECES
QUI ONT REMPORTÉ
LE PRIX
DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES,
EN M. DCC.XLVII.

Sur la meilleure maniere de trouver l'heure en Mer.

Selon la fondation faite par feu M. ROUILLÉ DE MESLAY, ancien Conseiller au Parlement.



A PARIS, rue S. Jacques:
Chez GABR. MARTIN, J. B. COIGNARD, & H. L. GUERIN, Libraires.

M. DCC. L.



AVERTISSEMENT.

L'ACADEMIE avoit proposé pour sujet du Prix de 1745, *La meilleure maniere de trouver l'heure en Mer, par observation, soit dans le jour, soit dans le crépuscule, & surtout la nuit, quand on ne voit pas l'horison.* Mais n'étant pas entierement satisfaite des Pieces qui lui avoient été adressées, elle n'en couronna aucune, & proposa une seconde fois le même sujet pour cette année, avec un Prix double, c'est-à-dire, de 4000 liv. dans la vûe de donner aux Sçavans le loisir de composer de nouvelles Pieces, ou de suppléer ce qui manquoit à celles qu'ils avoient déja envoyées.

L'Académie a vû le succès de ce délai. Parmi les Pieces qu'elle a reçûes, il s'en est trouvé deux qui lui ont paru avoir un droit égal au Prix.

La premiere est la Piece N° 2, de celles qui avoient concouru en 1745, & à laquelle l'Auteur a joint un supplément pour cette année. La Devise est :

Et quandoque olitor fuit opportuna locutus.

Elle est de M. Daniel Bernoulli, Professeur en Medecine en l'Université de Bâle.



La deuxieme eſt N° 2, de 1747. Elle a pour Deviſe :

Arbor non uno ſternitur ictu.

L'Auteur ne s'eſt pas encore fait connoître.

Quoique ces deux Pieces ſoient remplies de recherches très-curieuſes, & de vûes, qui, perfectionnées, pourroient être utiles à la Navigation, cependant l'Académie ſe croit obligée de renouveller la déclaration qu'elle a faite en diverſes autres occaſions, qu'en couronnant les Pieces qui méritent le Prix, elle ne pretend pas adopter généralement tout ce qui y eſt contenu.

Dans le nombre des autres Pieces qui ont concouru, il y en a trois dans leſquelles on a trouvé des machines ou des vûes utiles, & qui ont à cet égard, mérité les éloges de l'Académie.

La premiere eſt N° 4, de 1745, avec ſon addition. La Deviſe eſt :

Nihil umquam invenietur, ſi contenti fuerimus inventis.

La deuxieme eſt N° 5, de 1745, qui a pour Deviſe :

Nautam ne pigeat cœli convexa tueri.

Et la troiſieme eſt N° 1, de 1747, dont la Deviſe eſt :

Semper id melius quod optimo propinquius eſt.

L'Académie propoſe pour le ſujet du Prix qu'elle donnera à Pâques 1749 :

La meilleure maniere de déterminer en mer les Courans ; leur force & leur direction.



CATALOGUE

des Ouvrages contenus dans ce Recueil.

PIECES de 1745 & 1747.





RECHERCHES
MECHANIQUES
ET
ASTRONOMIQUES,

Sur la Queſtion propoſée par l'Académie Royale des Sciences pour l'année 1745.

La meilleure maniere de trouver l'heure en Mer, par obſervation, ſoit dans le jour, ſoit dans les crépuſcules, & ſur-tout la nuit, quand on ne voit pas l'horiſon.

Et quandoque Olitor fuit opportuna locutus.

Par M. DANIEL BERNOULLI, des Acad. des Sciences de Paris, de Londres, de Peterſbourg, de Bologne, &c. & Profeſſeur de Médecine en l'Univerſité de Baſle.



RECHERCHES MÉCHANIQUES ET ASTRONOMIQUES,

Sur la Queſtion propoſée par l'Académie Royale des Sciences, pour l'année 1745.

La meilleure maniere de trouver l'heure en Mer, par obſervation, ſoit dans le jour, ſoit dans les crépuſcules, & ſur-tout la nuit, quand on ne voit pas l'horiſon.

Et quandoque Olitor fuit opportuna locutus.

AVANT-PROPOS.



LE plus grand nombre des Obſervations Aſtronomiques, demandent une exacte meſure du tems & des hauteurs verticales des Aſtres: c'eſt pourquoi on s'eſt appliqué avec un ſoin extreme à mettre dans la derniere perfection poſſible les

inftrumens qui fervent à ces mefures, & on peut dire qu'on y a réuffi au-delà des efpérances qu'on auroit ofé concevoir auparavant : mais malheureufement pour la navigation, ces mêmes inftrumens ne font prefque plus d'aucun ufage pour les obfervations fur mer. M. Huguens, le premier Auteur des Ofcillations cycloïdiques des Pendules, a cru que moyennant une certaine façon de fufpendre les horloges, marquée dans fon *Horologium ofcillatorium*, elles pourroient fervir fur mer avec prefque autant de jufteffe que fur terre : mais quand il n'auroit point été réfuté par l'expérience, la feule théorie auroit fuffi pour démontrer la grande imperfection des Pendules en mer, & même leur inutilité abfolue, lorfque le vaiffeau feroit fort agité ; ce que je ferai voir en paffant dans mon Mémoire. Quant aux obfervations des hauteurs apparentes des aftres, elles fouffrent des difficultés pour le moins auffi grandes, puifqu'il n'eft pas poffible de connoître exactement la direction verticale ou horifontale. On a tâché de remédier à ce terrible inconvénient, en prenant pour la direction horifontale la ligne vifuelle, qui rafe la furface de la mer : mais cet expédient, déja fort imparfait par lui-même, n'a plus lieu lorfqu'on ne voit pas l'horifon ; c'eft cependant ce cas qui fait la principale partie de la queftion propofée par l'Académie Royale des Sciences, pour l'année 1745, & conçue en ces termes : *Donner la meilleure maniere de trouver l'heure en mer, par obfervation, foit dans le jour, foit dans les crépufcules, & fur-tout la nuit, quand on ne voit pas l'horifon.* Il me femble donc que la queftion de l'Académie revient principalement, finon uniquement à celle-ci : Quelle feroit la meilleure maniere de connoître en mer la direction horifontale la nuit, quand on ne voit pas l'horifon. De cette queftion dépend abfolument la mefure des hauteurs verticales ; & de celle-

ci, la maniere de trouver l'heure en mer. Je ne prétend pas de pouvoir ſatiſfaire à cette queſtion fondamentale avec une entiere préciſion, & la choſe ſera ſans doute impoſſible : la meilleure méthode ſera la moins imparfaite. Ce que je puis aſſurer par avance, eſt que j'ai examiné cet article avec toute l'attention néceſſaire, ſelon toutes les loix de méchanique, ſans leſquelles on auroit grand tort de haſarder aucune conjecture, quelque fondée qu'elle paroiſſe ; j'en parle par expérience, étant revenu de pluſieurs idées que je m'étois formées là-deſſus autrefois, & que je croyois aſſez bonnes alors. J'ai examiné l'effet de la peſanteur qui tend à donner aux corps une certaine direction ; celui de l'inertie, qui fait que les corps entraînés par un point ſe détournent de leur poſition naturelle ; celui du mouvement des lames ſur les vaiſſeaux ; & enfin celui des agitations du vaiſſeau ſur les corps qui y ſont ſuſpendus. De-là il m'a paru qu'il étoit poſſible d'aſſujettir les variations des directions à de certaines loix, & qu'on pouvoit ſe ſervir de ces loix pour connoître à peu près la vraie direction horiſontale. J'ai tenu la même route pour examiner le mouvement des horloges oſcillatoires en mer, & quelle autre ſorte d'horloges marines on pourroit leur ſubſtituer, pour connoître la meſure du tems le plus exactement qu'il eſt poſſible, puiſque ſans cette connoiſſance, notre queſtion ſeroit tout-à-fait inutile, & que ſouvent il faut connoître un intervalle de tems pour pouvoir trouver l'heure. Ce n'eſt qu'après ces recherches préliminaires, que je traiterai des moyens que l'Aſtronomie nous fournit pour connoître l'heure. Je diviſerai donc mon Mémoire en quatre chapitres. Le premier contiendra les recherches Méchaniques qui conviennent à notre ſujet. Le ſecond traitera de la perfection des Horloges & des Montres en général, &

des Horloges marines en particulier. Dans le troisieme, j'examinerai jusqu'où on peut aller dans l'établissement d'une direction horisontale, sans le secours de l'horison visible. Et enfin dans le quatrieme, je donnerai pour les diverses circonstances où l'on peut se trouver, plus ou moins favorables, les meilleures manieres pour trouver l'heure, moyennant le secours des instrumens dont j'aurai donné la description.



CHAPITRE PREMIER.

Contenant les Recherches préliminaires de Méchanique.

§. I.

SI le vaiſſeau alloit ſur mer avec une viteſſe uniforme & d'un mouvement parallele, ce mouvement ne pourroit faire aucun effet, & tout reſteroit dans le même état que ſi le vaiſſeau étoit en repos; un pendule feroit ſes oſcillations avec la même régularité que ſur terre; un corps attaché & ſuſpendu par un fil, retiendroit conſtamment ce fil dans ſa ſituation verticale, & toutes les obſervations pourroient ſe faire avec la même facilité & autant de préciſion que par terre; mais lorſque le vaiſſeau eſt agité, tout cela change de face: ce n'eſt donc point le ſillage qu'il faut conſidérer ici, mais ſimplement les agitations & les balancemens du vaiſſeau; c'eſt pourquoi nous pourrons conſidérer le vaiſſeau comme flottant, mais agité par les lames & par les vents.

§. II.

TOUT corps flottant dans un fluide en repos, a une certaine ſituation d'équilibre, excepté les corps ſphériques & homogenes: s'il eſt détourné de ſa ſituation naturelle, il la reprendra auſſi-tôt qu'il ſera libre de le faire; mais en le faiſant il fera pluſieurs allées & venues; il fera des balancemens de même qu'un pendule ſimple; & il continueroit ſes balancemens ſans fin, ſans pluſieurs

réſiſtances qui les diminuent peu à peu; cependant les grandes & les petites agitations ſe feront à peu près dans le même tems. M. Euler a propoſé le Problème de trouver la longueur du pendule ſimple iſochrone, avec les balancemens d'un corps flottant quelconque: & quoique ce problème ſoit extremement embrouillé, les ſolutions qu'on en a données ſe ſont parfaitement rencontrées. Je ne ſçaurois entrer ici dans le détail de ces ſolutions: il me ſuffira d'en faire remarquer quelques propriétés eſſentielles à notre ſujet.

(*a*) Si le corps flottant eſt forcé de faire ſes balancemens dans un plan donné, le pendule iſochrone pour le même corps ſera plus ou moins long, ſuivant le plan des balancemens: ainſi un vaiſſeau tanguant de la prouë à la pouppe, ne fera pas ces balancemens dans le même tems que le même vaiſſeau roulant d'un bord à l'autre. On peut remarquer auſſi, qu'un corps flottant peut être balancé en même tems dans pluſieurs plans, & alors les premiers balancemens ſont extremement irréguliers, mais ils deviennent bien-tôt réguliers, & ſe font enſuite tous avec harmonie, commençant & finiſſant chacun au même moment, & on peut encore déterminer la longueur du pendule ſimple iſochrone, avec tous ces balancemens, compoſés après qu'ils ſont devenus réguliers.

(*b*) Tous ces balancemens peuvent être réduits à deux claſſes, deſquelles on ſçait déterminer les conditions. Dans la premiere claſſe, le centre de gravité du corps flottant & balançant reſte immobile: dans la ſeconde, le centre de gravité ſouffre des balancemens lui-même; mais ſans ſortir de la verticale; il ne fait que monter & deſcendre alternativement, & toûjours verticalement: un vaiſſeau qui roule d'un bord à l'autre & également des deux côtés, conſerve ſon centre de gravité au même point

à peu

à peu près : mais s'il étoit couché en même tems ſur un de ſes côtés, ou s'il tanguoit, ſon centre de gravité ne ſera plus en repos : cependant il reſtera toûjours dans la même ligne verticale.

(*c*) Les mêmes propriétés ſubſiſteront, ſi au lieu des corps flottans on conſidéroit des corps mûs uniformément ; le ſillage ne peut donc déranger ſenſiblement les balancemens du vaiſſeau.

(*d*) Les montées & deſcentes verticales du centre de gravité feront toûjours fort petites par rapport aux excurſions circulaires d'un point éloigné du centre de gravité, & d'ailleurs elles ne peuvent faire aucun effet ſenſible ſur le corps ſuſpendu dans le vaiſſeau.

§. III.

Le mouvement des lames eſt la premiere & principale cauſe des agitations du vaiſſeau ; les vents n'y concourent que très-peu, excepté les bouffées ; un vent fait & uniforme ne feroit que pencher le vaiſſeau, & ne l'agiteroit point, ſi la ſurface de la mer reſtoit unie. Les lames ſont formées par des eaux qui montent & deſcendent alternativement, & ces balancemens des eaux ſe font ſuivant les loix des oſcillations d'un pendule ſimple. Les eaux ſont agitées juſqu'à une certaine profondeur, au-deſſous de laquelle elles ſont entierement calmes. Une théorie que je me ſuis formée là-deſſus, indique que la durée d'un ondoyement eſt iſochrone avec l'oſcillation d'un pendule ſimple, dont la longueur eſt à peu près égale à la profondeur des eaux agitées. Ainſi ſi la durée d'une lame, depuis ſa plus grande élévation juſqu'à ſon plus grand abbaiſſement étoit de dix ſecondes, on en pourroit conclurre que les eaux ſont agitées juſqu'à la profondeur

d'environ 306 pieds. La hauteur des lames & leur diſtance mutuelle, paroît dépendre de la profondeur de la mer & de la force du vent, & leur direction pareillement de celle du vent; d'où je conclus qu'en pleine mer, & lorſque les vents ſont faits ſans être trop peſans, les lames ſeront fort ſemblables, d'une grande étendue en longueur, & paralleles entre elles. Plus les lames, qui ſont la principale cauſe des agitations du vaiſſeau, ſont irrégulieres, plus le vaiſſeau ſera tourmenté & agité irrégulierement.

§. IV.

IL ſemble d'abord que les agitations du vaiſſeau ne peuvent qu'être extremement irrégulieres : un vaiſſeau peut être balancé en tout ſens, mais ſur-tout de prouë à pouppe, & d'un bord à l'autre; outre ces balancemens, il en ſouffre encore par rapport à ſon centre de gravité, qui monte & deſcend alternativement; il en ſouffre d'autres, qui ſont relatifs au mouvement des lames. Chaque balancement influe l'un ſur l'autre, ils ſe dérangent mutuellement; chacun peut finir & recommencer bruſquement.

Nous voyons arriver tout cela dans les premieres oſcillations de pluſieurs corps attachés & ſuſpendus par le même fil: mais auſſi toutes ces oſcillations ſe composeront bien-tôt à un état de permanence & d'harmonie, & alors elles commenceront & finiront toutes au même inſtant, & ces oſcillations compoſées, ne feront plus que des oſcillations ſimples, uniformes & régulieres. Je pouſſerai cet exemple plus loin. Prenez par les doigts un bout de fil chargé de poids quelconques, à des diſtances quelconques; faites avec la main des excuſſions réciproques, en imitant le plus que vous pourrez le mouvement d'un pendule : & vous verrez tous ces corps enfilés, ſuivre

parfaitement le mouvement de la main, chacun commençant & finiſſant ſes balancemens avec ceux de la main. On obſervera la même choſe dans les balancemens de toutes les parties d'un ſyſtème compoſé, quelqu'irréguliers qu'ils ſoient d'abord. Qu'on balance un ſeul baſſin d'une grande balance, & on verra que l'autre baſſin, le fléau & toutes les parties ſe mettront en mouvement, & ſe compoſeront à un ſimple balancement iſochrone. Au reſte cet état de permanence arrivera tantôt plûtôt, tantôt plus tard, ſuivant les circonſtances, & dans de certains ſyſtèmes, il n'arrive que très-difficilement.

§. V.

CES conſidérations m'ont conduit à ce grand principe, qui eſt, que dans tout ſyſtème compoſé de tant de parties qu'on voudra, agiſſant toutes les unes ſur les autres, ſi chaque partie eſt agitée par des mouvemens oſcillatoires réciproques, quelque différentes que ſoient d'abord ces oſcillations entre elles, tous ces mouvemens extrement embrouillés, tendront bien-vîte à un mouvement régulier & permanent, auquel étant parvenus, toutes les oſcillations commenceront leurs allées & venues au même inſtant; les unes ſeront accélérées, & les autres retardées, juſqu'à ce que cela arrive. Mais comme tout mouvement finit bien-tôt par pluſieurs obſtacles qu'il rencontre, & qu'il pourroit finir avant que cet état de permanence ſoit ſenſible, il faut alors ſuppoſer une cauſe qui entretienne le mouvement, & la ſuppoſer conſtante, uniforme & permanente.

§. VI.

JE ne ſçaurois exprimer aſſez l'utilité de ce principe

dans la Phyſique méchanique ; la nature ne s'en écarte jamais, elle produit ſouvent des effets ſenſibles par des tremouſſemens inſenſibles. Sur ce principe, j'ai réduit au calcul, des phénomenes ſur les ſons, qui pourroient peut-être paroître inexplicables. Les propriétés principales de la lumiere, doivent ſe déduire de ce principe. Le calcul de tous les mouvemens ſenſibles, qu'on peut rapporter à cette claſſe, s'accorde toûjours merveilleuſement avec l'expérience. Sur ces réflexions, je n'ai plus héſité d'employer ce même principe pour expliquer en gros la nature des agitations d'un vaiſſeau en mer, & pour en tirer tout le fruit qu'il ſeroit poſſible, tant pour la perfection & l'uſage des Horloges marines, que pour la maniere de connoître la direction horiſontale ſur mer.

§. VII.

Il eſt certain que ſi les lames étoient des ſillons d'une grande étendue en longueur, paralleles & parfaitement égaux, ſi le vaiſſeau conſervoit conſtamment ſa viteſſe & ſa route, ſi le vent & la manœuvre reſtoient parfaitement les mêmes, il eſt certain, dis-je, que les agitations du vaiſſeau ſeroient tout-à-fait régulieres, uniformes, & ſurtout iſochrones avec les balancemens des lames; quand même le vaiſſeau ſeroit agité irrégulierement, il ſe remettroit bien-tôt dans cet état. J'avoue que ces ſuppoſitions ſont un peu libres : mais elles ne le ſont pas tant qu'on pourroit le croire, & j'en parle par ma propre expérience ; il ſuffit qu'on ſe trouve ſouvent dans le cas de ces ſuppoſitions, & pendant des intervalles de tems conſidérables, & je demande qu'on les ſaiſiſſe pour faire ſes obſervations. On y peut auſſi contribuer beaucoup par la manœuvre aſſez connue. Dans cet état d'uniformité & de régularité,

le vaiſſeau peut ſouffrir pluſieurs ſortes d'agitations, mais qui ſeront toutes harmonieuſes; & en même tems tout ce qui eſt mobile dans le vaiſſeau ſera des allées & venues correſpondantes. Des fluides dans des vaſes, d'autres dans des tuyaux communiquans; des pendules ſimples ou compoſés, quelque inégaux qu'ils ſoient, & dans quelque plan qu'ils puiſſent balancer des lames à reſſort qui ſe courberoient, & tel autre ſorte de mouvement qu'on puiſſe s'imaginer: on y remarquera un accord d'autant plus parfait, que nos ſuppoſitions ſeront plus vraies. Tous ces mouvemens peuvent être extremement inégaux en grandeur abſolue: mais ils ſe feront toûjours avec une proportion conſtante. Au même inſtant qu'un pendule aura fait le tiers ou le quart de ſa digreſſion totale, tous les autres pendules ſe trouveront dans le même cas, quoique les digreſſions angulaires de tous ces pendules ſoient fort inégales. Un pendule qui feroit naturellement ſes oſcillations dans le même tems que le vaiſſeau fait ſes agitations, ſera remarqué faire des mouvemens exorbitans, pendant qu'un autre n'en fera que de très-médiocres. Si le vaiſſeau faiſoit ſes agitations chacune pendant deux ſecondes, un pendule ſimple de 12 pieds ſera extremement jetté de côté & d'autre, par les plus petites agitations du vaiſſeau, pendant que les autres pendules ſimples n'auront qu'un très-petit mouvement, tant ceux qui ſont plus longs, que ceux qui ſont plus courts: une horloge qui battroit à chaque double ſeconde, s'arrêtera tout auſſi-tôt, pendant qu'une autre continuera ſa marche. Ces conſidérations ſi eſſentielles à notre ſujet, m'engagent à entrer dans quelque détail ſur cette matiere, quoique peut-être ennuyant; je le ferai avec toute la briéveté qui me ſera poſſible.

§. VIII.

SOIT A un point fixe, (*Fig.* 1.) M & m des corps attachés au fil vertical Am, & qu'on ſuppoſe la maſſe du corps M infinie par rapport à l'autre maſſe m; cette ſuppoſition convient à notre ſujet, & elle abrége les calculs & les expreſſions. Il s'agit de trouver quel ſera le mouvement du corps m, lorſque le ſyſtème ſera balancé.

Il eſt clair d'abord que le corps ſupérieur M fera ſes balancemens exactement, ſuivant les loix d'un pendule ſimple, à cauſe de ſa maſſe infinie: mais le corps inférieur m pourra faire d'abord des mouvemens fort irréguliers, plus ou moins, ſuivant la premiere impreſſion qu'on lui aura donnée; cependant cette irrégularité ceſſera bientôt, de même que dans une corde de muſique, les premieres vibrations ne peuvent qu'être extremement embrouillées, quoiqu'à en juger par leur ſon, il ſemble qu'elles ſe ſoient miſes tout auſſi-tôt à leur état naturel & permanent. Dans cet état de permanence, voici quelle ſera la nature des oſcillations du corps m, dans la ſuppoſition qu'on emploie ordinairement pour ces queſtions, que les oſcillations puiſſent être cenſées infiniment petites.

(a) Soit la longueur du fil $AM = L$, celle du fil $Mm = l$, ſuppoſez le ſyſtème dans la ſituation ABC ou $AB'C'$; prolongez AB ou AB' juſqu'en D ou D'; je dis qu'on aura l'angle CBD ou $C'B'D' = \frac{l}{L-l} \times BAM$ ou $= \frac{l}{L-l} \times B'AM$. On peut donc déterminer un angle par l'autre, par le ſimple rapport des longueurs des fils.

(b) Plus la longueur l eſt petite, plus l'angle CBD ſera petit auſſi. Si les fils AM & Mm ſont égaux, l'angle CBD deviendra infiniment plus grand que l'angle BAM,

ou plûtôt celui-ci infiniment plus petit que l'autre, puiſque nous ſuppoſons l'un & l'autre fort petit; & enfin ſi la longueur *Mm* eſt plus grande que la longueur *AM*, l'angle *CBD* deviendra négatif, & toûjours plus grand que *BAM*. La ſeconde figure, marquée avec des lettres analogues, éclaircira la nature de ces oſcillations.

§. IX.

CE que nous venons de dire doit être changé & étendu, pour pouvoir être appliqué à notre ſujet, notre deſſein étant de repréſenter par le point *M* un point fixe du vaiſſeau agité autour du point *A*, qui ſera ſon centre de gravité; & alors *Mm* ſera un pendule ſuſpendu dans le vaiſſeau : il convient donc de ſuppoſer le point *M* plus haut que le point *A*; comme auſſi les balancemens du vaiſſeau ne ſeront pas préciſément de la même durée que ſeroient les oſcillations naturelles d'un pendule de la longueur *AM*; il faudra étendre l'hypotheſe de la peſanteur naturelle à une peſanteur quelconque, pour pouvoir égaler les balancemens du vaiſſeau, & les oſcillations du pendule *AM* par rapport à leur durée. Suppoſons pour cet effet une verge *AM* (*Fig*. 3.) ſans poids mobile autour du point *A*, & chargée à ſon extrémité d'une maſſe infinie *M*; que cette maſſe ſoit animée par une peſanteur négative, qui agiſſe toûjours parallelement à la direction *AM*. Suppoſons encore un pendule *Mm* ſuſpendu au point *M*, dont le poids *m* ſoit animé par la peſanteur naturelle parallelement à la direction *Mm*. Si après cela la verge *AM* vient à balancer autour du point *A*, il eſt queſtion de déterminer les balancemens du pendule *Mm*, après qu'ils ſeront devenus réguliers & correſpondans à ceux de la verge *AM*. Voici donc ce qui doit arriver dans ces hypotheſes.

(α) Concevons la verge dans la ſituation AB ou AB', & le pendule en BC ou $B'C'$, & ſuppoſons premierement la peſanteur négative, qui anime la maſſe infinie M, préciſément égale à la peſanteur naturelle. Soit encore $AM = L$, & $Mm = l$, & tirez les verticales BE & $B'E'$, je dis que l'angle CBD ſera $= \frac{2L-l}{L-l} \times BAM$, & l'angle $CBE = \frac{L}{L-l} \times BAM$; la même choſe ſera des angles du côté oppoſé.

(β) Si la peſanteur négative qui anime la maſſe M eſt à la peſanteur naturelle, comme p à 1, je dis qu'on aura l'angle $CBD = \frac{L+pL-pl}{L-pl} \times BAM$, & l'angle $CBE = \frac{pL}{L-pl} \times BAM$.

On peut abréger ces formules & les rendre plus ſenſibles, en introduiſant la longueur d'un pendule ſimple λ, iſochrone, avec les agitations du vaiſſeau ou de la maſſe M: on aura alors cette analogie; $p : 1 = L : \lambda$, & par conſéquent $p = \frac{L}{\lambda}$, & ſubſtituant cette valeur, on aura l'angle $CBD = \frac{\lambda+L-l}{\lambda-l} \times BAM$, & l'angle $CBE = \frac{L}{\lambda-l} \times BAM$.

(γ) Cette derniere expreſſion marque, que l'angle que le fil du pendule fera avec la verticale eſt d'autant plus petit, que la diſtance AM eſt plus petite, que le pendûle eſt plus court, & que le point de ſuſpenſion M eſt balancé plus lentement. Donc ſi un pendule court eſt ſuſpendu dans le vaiſſeau près de ſon centre de gravité, & que le vaiſſeau ſoit agité fort lentement, ce pendule ne s'écartera jamais ſenſiblement de la verticale; & moins on aura ſatisfait à ces conditions, plus le pendule ſera jetté de côté & d'autre, par les agitations du vaiſſeau. Un pendule infiniment long conſerveroit ſa poſition verticale, malgré les

les balancemens finis du point de ſuſpenſion : mais on ne peut pas faire ſur mer, que la longueur l ſoit beaucoup plus grande que λ; ainſi cette derniere remarque ne ſeroit pas dans ſa place, par rapport au but que je me propoſe; mais comme la premiere remarque peut nous être utile, je vais l'éclaircir par deux exemples oppoſés.

I. Suppoſons dans un vaiſſeau un pendule d'un pied, ſuſpendu un pied au-deſſus du centre de gravité du vaiſſeau, & que ce vaiſſeau emploie quatre ſecondes à chaque balancement, que nous ſuppoſerons de 20 degrés, ou dix degrés de chaque côté, nous aurons $L = l = 1$; $\lambda = 49$; le plus grand angle BAM de dix degrés, & cela donne le plus grand angle $CBE = \frac{1}{48}$ degré, ou d'une minute & 15 ſecondes.

II. Suppoſons à préſent que tout le reſte étant égal, le pendule ſoit long de 30 pieds, & ſuſpendu 20 pieds plus haut que le centre de gravité du vaiſſeau, & nous trouverons que la plus grande digreſſion du pendule ſera d'environ dix degrés & demi, & plus de cinquante fois plus grande que dans le premier cas. Cependant l'un & l'autre pendule feroit ſes oſcillations dans le même tems, & toûjours avec les balancemens du vaiſſeau.

§. X.

Le précédent article ſert à déterminer les balancemens d'un pendule ſimple, ſuſpendu verticalement au-deſſus du centre de gravité du vaiſſeau, pourvû que le vaiſſeau ſoit droit dans la poſition moyenne de ſes balancemens. Mais ſi dans cette poſition moyenne le vaiſſeau étoit couché ſur un de ſes côtés, il faudra un peu changer les théoremes que nous venons d'indiquer.

Soit AM (*Fig* 4.) la ſituation d'équilibre d'une verge

mobile autour du point A, & du point M soit suspendu un pendule simple Mm; qu'on tire la verticale AF, & l'horisontale MF; qu'on suppose ensuite le point M faire des oscillations réciproques BMB'; que BC & $B'C'$ marquent les positions du pendule, le point M se trouvant en B & B'; tirez les verticales BE & $B'E'$; je dis qu'en retenant toutes nos dénominations precédentes, on aura l'angle $CBE = \frac{AF}{AM} \times \frac{L}{\lambda - l} \times BAM$. Il n'y a donc qu'à multiplier l'angle trouvé pour le premier cas, par le rapport du cosinus de l'angle de l'inclinaison du vaisseau, au sinus total, pour avoir ce même angle qui convienne au cas présent. Même la formule précédente sera générale, pourvû qu'on entende par L, non la distance AM, mais la hauteur AF, c'est-à-dire la hauteur verticale du point de suspension du pendule, par-dessus le centre de gravité du vaisseau. Il s'ensuit de-là, que plus le vaisseau sera couché sur un de ses côtés, mieux le pendule gardera sa situation verticale. Au reste, ces théoremes supposent à la vérité, que les balancemens angulaires du point M soient fort petits; cependant ils pourront être considérablement grands, sans que nos théoremes s'éloignent sensiblement de la vérité. Il est facile aussi de les confirmer par des expériences; puisque par le moyen d'un contre-poids, on pourra donner à la verge AM telle position d'équilibre qu'on voudra; on pourra ensuite suspendre du point M un pendule, & puis faire balancer le systême, & on remarquera toûjours entre les angles CBE & BAM, la relation que nous leur avons assignée, pourvû que les oscillations soient devenues harmonieuses, & elles ne tarderont gueres à le devenir.

§. XI.

JE serois trop prolixe, si je voulois donner une

démonſtration rigide de ces propoſitions : cependant pour en donner quelque idée, je m'attacherai, par exemple, à la Note (ɕ) du §. IX. auquel repond la troiſieme Figure. Conſidérons donc que la maſſe M ſe trouvant en B, ſa force accélératrice ſera $= \frac{BM}{BA} \times p$, puiſque le poids m infiniment plus petit, ne ſçauroit la déranger. Quant à la force accélératrice du petit poids m poſé en C, le tranſport du point de ſuſpenſion B ne ſçauroit la faire varier, parce que l'angle CBM eſt cenſé droit ; ainſi ſa force accélératrice ſera ſimplement $= \frac{CE}{CB}$, & comme le corps en B doit arriver en M, dans le même tems que le petit corps en C arrive en m, il faut faire que les forces accélératrices $\frac{BM}{BA} \times p$, & $\frac{CE}{CB}$ ſoient proportionnelles aux eſpaces à parcourir, BM & Cm. De cette proportionalité, on tirera $Cm = \frac{BA}{BA - CB \times p} \times BM$, & $CE = \frac{CB \times p}{BA - CB \times p} \times BM$, ou $\frac{CE}{CB} = \frac{BA \times p}{BA - CB \times p} \times \frac{BM}{BA}$, c'eſt-à-dire l'angle $CBE = \frac{BA \times p}{BA - CB \times p} \times BAM = \frac{pL}{L - pl} \times BAM$; tout comme nous avons trouvé dans l'endroit cité. On trouvera les autres démonſtrations, pour peu qu'on y ſupplée.

§. XII.

Les propriétés que nous venons d'indiquer, ne ſerviront pas ſeulement pour déterminer les balancemens d'un pendule ſimple ſuſpendu dans un vaiſſeau agité, mais encore pour en tirer pluſieurs éclairciſſemens ſur le mouvement des pendules appliqués aux horloges, pour les employer ſur mer avec plus de ſûreté & plus de ſuccès, s'il eſt encore poſſible de s'en ſervir ; & s'il ne l'eſt pas, pour leur ſubſtituer d'autres horloges marines, dont la marche ſoit bien aſſurée. C'eſt dans cette vûe que je ferai encore

remarquer la propoſition ſuivante, quoique connue de tout le monde.

§. XIII.

TOUT corps ſuſpendu & entraîné d'une façon quelconque par ſon centre de gravité, conſerve conſtamment une poſition parallele, par rapport à toutes ſes parties. Ainſi ſi le centre de gravité d'un corps quelconque eſt au point *B*, (*Fig* 5.) attaché à l'extrémité du fil *AB*, & que *CD* ſoit une ligne quelconque, paſſant par deux points donnés du corps; ſi l'on conçoit l'extrémité du fil *A* tranſportée d'un mouvement quelconque en *a*, & que par ce mouvement, la ligne *CBD* parvienne en *cbd*, ces deux lignes *CD* & *cd* ſeront toûjours paralleles entre elles.

Avant que de finir ce Chapitre, je prierai encore le Lecteur de remarquer que dans les quatre premieres Figures, le point *m* peut être pris pour le centre d'oſcillation d'un corps d'une étendue finie quelconque; la ligne *Mm* marquera toûjours la diſtance entre le point de ſuſpenſion & le centre d'oſcillation. Cette vérité n'eſt pourtant pas claire par elle-même, quoique l'on ſuppoſe tous les théoremes ordinaires du centre d'oſcillation; mais on peut la démontrer par de nouveaux principes, & elle ne ſubſiſte, que lorſque le corps fait avec la ligne *Mm* un ſyſtème roide, ſans pouvoir tourner autour du point *m*, de ſorte que tout le ſyſtème faſſe un même mouvement angulaire autour du point de ſuſpenſion *M*.



CHAPITRE II.

Contenant quelques réflexions sur la meilleure maniere de mesurer sur mer le Tems absolu.

§. XIV.

CE qui m'engage à ces recherches, c'est que souvent on ne peut trouver l'heure sur mer, sans connoître de certains intervalles de tems. A quoi serviroit d'ailleurs le plus souvent, de connoître pour un moment l'heure par observation, si l'on ne pouvoit conserver cette connoissance par le moyen des horloges marines, pendant un certain tems? La question proposée par l'Académie seroit d'assez peu d'utilité, si l'on ne pouvoit rapporter l'heure trouvée à l'heure marquée par l'horloge, & c'est ce rapport qui la rend extremement intéressante. La mesure du tems absolu sur mer étant donc toûjours si utile, & souvent si nécessaire pour la solution de notre question, j'ai cru de mon devoir d'apporter toute l'attention possible à cet article. Il y a une œconomie dans la marche des horloges, qu'on n'a pas encore développée, que je sçache, & qui est cependant, à mon avis, de grande conséquence pour la perfection des horloges en général: & ces remarques jointes à celles que nous fournira le précédent Chapitre, pourront, à ce que j'espere, nous mener plus loin qu'on n'a encore été sur ce sujet. Je partirai encore des premiers principes.

§. XV.

LES pendules mesurent le tems sur terre avec tant de



justesse, qu'on peut se passer aisément d'une plus grande perfection. Ce qui peut encore un peu déranger le mouvement égal des pendules, est l'inégalité du pendule, causée par les changemens du froid & du chaud, & puis l'inégalité des arcs décrits par le pendule. On pourroit éviter le premier inconvénient (qui est en même tems le seul dont on se mette encore en peine) de plusieurs façons, pourvû qu'on fit le pendule de deux métaux différens, qui s'allongent & se racourcissent inégalement, par des changemens égaux du froid & du chaud, & qu'on sçût bien la proportion de ces allongemens & racourcissemens d'un métal à l'autre. La meilleure maniere de trouver cette proportion, consiste dans les pendules mêmes. Par exemple, M. Graham a trouvé qu'un changement de froid répondant à 11 degrés sur son thermometre, faisoit accélérer ou retarder sa pendule de 6″ pendant 24 heures, ce qui fait 0, 0 6 lignes, sur 441 lignes; & s'il avoit fait les mêmes expériences sur des pendules faits d'autres métaux, il auroit pû trouver de cette façon, la proportion des allongemens de différens métaux, causés par la même augmentation de chaleur; & sçachant cette proportion, je dis qu'on pourroit donner différentes constructions pour les pendules, telles que leurs oscillations ne se ressentent plus des changemens du froid & du chaud. Je me contenterai pour le présent, d'avoir indiqué ce remede, fort simple dans l'exécution, d'autant qu'une ample déduction pourroit me mener trop loin. Si les circonstances rendoient ces petites variations intéressantes, on pourra suppléer à ce défaut par un thermometre, après en avoir fait l'expérience de M. Graham, que je viens de citer: on pourra remarquer l'état du thermometre de deux heures en deux heures, & on en déduira facilement la petite correction qu'il convient de faire sur l'heure marquée

par l'horloge. C'eſt M. de Maupertuis qui nous a rapporté l'expérience de M. Graham, dans ſon excellent Ouvrage ſur la Figure de la Terre, p. 165, Edit. de Paris; cependant on ne ſçauroit encore en faire tout l'uſage, ſans une deſcription plus exacte du thermometre dont s'eſt ſervi M. Graham. M. de Maupertuis dit ſimplement après M. Graham, que le thermometre étoit de mercure; que le degré de chaleur qui répond à l'eau bouillante, étoit marqué par 0; que lorſque ce thermometre étoit ſur 138, la pendule accéléroit ſur le tems moyen de 4′ 4″ par jour, & lorſqu'il étoit à 127 (degré de chaleur que Meſſieurs les Académiciens ont imité à Pello) la pendule n'accéléroit plus que de 3′ 58″ par jour, & qu'ainſi une différence de 11 degrés ſur le thermometre, produiſoit une différence de 6″ par jour dans la marche de la pendule. Mais quels ſont les degrés ſur ce thermometre? c'eſt ce qui n'eſt point marqué. On peut cependant le déduire de ce que M. de Maupertuis marque aux pages 169 & 172, où il dit que le thermometre de M. Prins étoit ſur 61, lorſque celui de M. Graham étoit ſur 127. Or, le thermometre de M. Prins parcourt environ 180 degrés, depuis le terme de la congélation de l'eau de pluie, marqué 32, juſqu'au terme de l'eau bouillante, marqué par 212 dans l'état moyen du barometre (car on ſçait que les différentes hauteurs du barometre font varier le degré de chaleur de l'eau bouillante). Donc 180 degrés du thermometre de M. Prins, valent 152 degrés environ, ſur le thermometre dont s'eſt ſervi M. Graham, puiſque 212—61, c'eſt-à-dire, 151 du premier thermometre, répondoient à 127 du ſecond: il ſuit de-là, que le terme de la congélation de l'eau de pluie étoit marqué par 152 ſur le thermometre dont ſe ſont ſervis M. Graham, & enſuite Meſſieurs les Académiciens; d'où je conclus que ce

thermometre étoit conſtruit & diviſé ſuivant les regles de M. de l'Iſle de Peterſbourg, qui commence par o depuis la chaleur de l'eau bouillante, & qui diviſe le volume du mercure qu'il occupe dans l'eau bouillante en 10000 parties, & qui a remarqué que le mercure ſe reſſerre de 152 parties, lorſqu'il eſt réduit au terme de la congélation de l'eau. Cet éclairciſſement peut être de conſéquence, pour tirer tout le fruit qu'on peut des importantes & très-exactes Obſervations faites par Meſſieurs les Académiciens au Cercle Polaire; c'eſt pourquoi je n'ai pas héſité de faire cette remarque en paſſant, d'autant qu'elle nous met en état de calculer juſqu'où peuvent aller les inégalités dans la marche des pendules, par les variations du thermometre. On a remarqué que le plus grand froid obſervé en Irlande, & le plus grand chaud obſervé au Pérou, fait une différence d'environ 83 degrés ſur le thermometre de M. Prins, qui valent 70 degrés de celui de M. de l'Iſle: cette différence de chaleur en peut produire une de 38″ par jour ſur le mouvement des pendules, & dans un même climat un peu Septentrional, où les variations du froid & du chaud ſont plus grandes, les variations des pendules peuvent aller pour le moins juſqu'à 30″ par jour, de l'été à l'hyver, & ſouvent juſqu'à 8″ ou 10″ dans un même jour. Ces grandes différences marquent combien on doit être attentif aux degrés du thermometre dans les obſervations exactes qu'on entreprend, comme M. de Maupertuis le remarque auſſi, p. 167. On doit donc conſtruire & diviſer les thermometres avec une attention proportionnée, en remarquant que le degré de chaleur de l'eau bouillante n'eſt pas tout-à-fait fixe, mais qu'il dépend de la hauteur du barometre; que l'eau boût d'autant plus facilement, que la preſſion de l'atmoſphere eſt moindre, & qu'un pouce de différence dans la hauteur du barometre, fait

fait varier d'environ 3 degrés la chaleur de l'eau bouillante ſur le thermometre de Fahrenheit, qui ſont environ deux degrés & demi ſur le thermometre de M. de l'Iſle. Ces précautions ne ſeront jamais entierement inutiles ſur mer, & ſouvent elles ſeront très-utiles.

§. XVI.

DISONS auſſi quelques mots ſur l'inégalité dans la marche des pendules, cauſée par l'inégalité des arcs décrits par le pendule. Il y a ici deux forces à conſidérer; celle qui anime la pendule, & celle qui lui eſt oppoſée. La premiere conſiſte ou dans l'action d'un poids, ou dans celle d'un reſſort: l'action d'un poids moteur ne ſçauroit qu'être conſtamment la même ſur terre, & eſt par conſequent beaucoup préférable à celle d'un reſſort, qu'on n'emploie que dans les petites pendules; lors donc que l'horloge eſt animée par un poids moteur, il n'y a que l'inégalité des réſiſtances qui puiſſe faire varier les arcs décrits par le pendule. On a douté autrefois, ſi les horloges accéléroient ou retardoient, en faiſant décrire au pendule de plus grands arcs; & on peut voir ſur cette queſtion un Mémoire de M. Saurin, inferé dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, de l'année 1720: mais de la façon qu'on conſtruit aujourd'hui les pendules, on ne peut plus douter là-deſſus; & toutes les expériences font voir que les bonnes horloges en ſont retardées. La Géometrie démontre, que plus les arcs circulaires ſont grands, plus ils demandent de tems pour être décrits par un pendule libre; & les oſcillations d'un pendule appliqué aux horloges bien conſtruites, ne peuvent s'écarter aſſez de cette régle, pour faire un effet contraire. M. Huguens a introduit les oſcillations cycloïdiques;

elles ſont fort utiles dans les petites pendules, qui décrivent de grands arcs & fort inégaux, mais aſſez inutiles dans les horloges à ſecondes, dont les pendules ne décrivent que des arcs de 3 à 4 degrés : peut-être même que l'uſage des lames cycloïdiques pourroit faire plus de mal que de bien, étant impoſſible de leur donner la juſte figure, à cauſe qu'elle dépend de la juſte grandeur des rayons oſcillateurs, qui different extremement d'un point à l'autre, étant nul au ſommet, & fort grand dans les points ſuivans. D'ailleurs ce bout de fil qu'on eſt obligé d'employer pour la ſuſpenſion du pendule, eſt un grand inconvénient, à cauſe des allongemens & racourciſſemens conſidérables qu'il ſouffre, outre que cette ſuſpenſion eſt fort mauvaiſe par elle-même. La façon de M. Graham de ſuſpendre les pendules, décrite par M. de Maupertuis, p. 164, eſt infiniment préférable. De-là je conclus, qu'il faut retenir les oſcillations circulaires, mais fort petites, & prendre toutes les meſures poſſibles pour leur égalité & uniformité. Le Théoreme ſuivant nous fournira enſuite les corrections qu'il faudra employer, pour les obſervations qu'on prétend faire avec la derniere exactitude.

Théoreme. Pour trouver les différences de tems entre des oſcillations circulaires inégales, ſoit la durée d'une oſcillation tout-à-fait infiniment petite $= T$: le ſinus total $= 1000000$; le petit ſinus verſe de la moitié de l'arc, décrit par le pendule $= b$, je dis que la durée de l'oſcillation ſera $= T + \frac{b}{8000000} T$.

Pour être donc tout-à-fait ſûr de la meſure exacte du tems, on n'a qu'à obſerver exactement les arcs décrits par le pendule : il eſt vrai que ce Théoreme ſuppoſe que le tems d'une oſcillation ſoit le même dans un pendule

détaché ou appliqué à une horloge, mais aussi cette supposition peut être admise sans peine aux bonnes horloges, ce que je vais confirmer par l'exemple qui suit.

Exemple I. Soit $T = 1''$; que le pendule décrive premierement des arcs de $3^\circ\ 0'$, & ensuite des arcs de $4^\circ\ 20'$; c'est l'exemple que M. de Maupertuis rapporte p. 166, disant que les dernieres oscillations retardoient sur les premieres de $3''\frac{1}{2}$ ou $4''$ par jour. Notre Théoreme donne pour les premieres $b = 343$, & le tems d'une oscillation $1''$ & $\frac{343}{80000000}$ parties de seconde, & toutes ces parties donnent pendant 24 heures $3'',7$: pour les dernieres oscillations, on a $b = 715$, & alors la pendule sera retardée de $7'',7$ par jour; la différence de ces retardemens fait précisément $4''$ par jour; tout comme on a trouvé par l'expérience, dont on doit admirer la grande justesse. Cette conformité m'engage à ajoûter encore un autre exemple, qui nous fournira une petite correction à faire sur le calcul d'une autre expérience, faite par Messieurs les Académiciens, pour déterminer l'accélération du pendule de Paris à Pello.

Exemple II. Messieurs les Académiciens ont établi par des observations faites avec la derniere précision, que de Paris à Pello, pendant une révolution des fixes, la pendule accéléroit de $59'',1$. Dans ces observations, on avoit eu soin d'entretenir jour & nuit une même température de l'air, tant à Pello qu'à Paris; on s'étoit servi de la même pendule; enfin toutes les circonstances étoient parfaitement les mêmes de part & d'autre, excepté celle-ci: A Paris les oscillations du pendule étoient $2^\circ\ 10'$ de chaque côté, & à Pello $2^\circ\ 5'$. (Voyez le livre de M. de Maupertuis, *p.* 170, 171 & 172.) Cette inégalité des arcs produit une retardation par jour de Pello à Paris de $0'',58$, en vertu de notre Théoreme, & cette quantité

doit être retranchée de $59'',1$, & on trouvera la vraie accélération de Paris à Pello, pendant une révolution des fixes, de $58'',52$. Je fais si grand cas de la merveilleuse précision de toutes ces observations, que je n'ai pas voulu supprimer cette remarque, qui auroit été ridicule sans cela : rien n'est trop petit, pourvû qu'il soit bien sûr.

§. XVII.

APRE'S avoir fait voir de quelle façon on pourra subvenir aux petits défauts qui peuvent encore apporter quelque incertitude à la mesure du tems, je tâcherai de réduire toute l'œconomie des horloges à ses vrais principes, que je ne sçache pas avoir encore été développés : j'espere que les conséquences que j'en tirerai pour notre sujet, excuseront cette digression, sur une matiere si importante par elle-même.

Si le pendule n'étoit pas appliqué à l'horloge, ses oscillations diminueroient peu à peu, par deux raisons : premierement, à cause du petit frottement du pendule contre le point de suspension ; & en second lieu, à cause de la résistance de l'air. La maniere avec laquelle M. Graham soûtient les pendules, & que M. de Maupertuis décrit p. 164, rend le frottement tout-à-fait insensible, comme on peut le démontrer; il n'y a donc alors que la simple résistance de l'air à considérer. Supposons l'arc entier décrit par le pendule $= 2A$, & le petit arc, insensible de diminution $= \alpha$, de sorte que l'arc de descente ayant été A, l'arc de montée soit $A - \alpha$; soit encore la longueur du pendule $= l$, la descente verticale du poids du pendule peut être censée, les oscillations étant petites, $= \frac{AA}{2l}$, & la montée verticale suivante $= \frac{AA - 2A\alpha}{2l}$, & la différence $= \frac{A\alpha}{l}$: nommons encore p le poids du

pendule, & nous aurons $\frac{A}{l}\alpha p$, pour mefure de la quantité de la perte à chaque ofcillation, qui, dans toutes les occafions, doit être mefurée par le produit de la hauteur verticale par la maffe. Lors donc que le même pendule eft appliqué à l'horloge, cette perte eft continuellement réparée par l'action du poids moteur : nommons ce poids P, & fuppofons qu'il defcende à chaque vibration du pendule d'une quantité infenfible ζ ; il eft certain que fi le poids moteur entretient la pendule dans une marche uniforme, nous aurions, fans le frottement, $\zeta P = \frac{A\alpha}{l} p$: mais ce frottement ne doit pas être négligé ; il eft même la caufe principale de l'inégalité des balancemens du pendule, parce qu'il eft inégal lui-même, principalement à caufe de l'inégale ténacité de l'huile. Pour confidérer donc l'effet du frottement entier de toutes les roues, nous fuppoferons qu'il foit en équilibre avec un poids F, appliqué au même point avec le poids moteur. Il eft clair que la véritable force motrice fera $P-F$, & qu'une telle force motrice, fans le frottement, feroit le même effet que le poids moteur P avec le frottement : la vraie équation eft donc celle-ci.

$$\zeta(P-F) = \frac{A}{l}\alpha p.$$

Avant que de tirer de cette équation les nouvelles lumieres qu'elle répand fur cette matiere, il fera bon de dire un mot fur le petit arc de diminution, exprimé par α. Dans les pendules bien fufpendues, il eft certain que cette diminution provient, finon pour le tout, du moins pour la plus grande partie, de la réfiftance de l'air ; il dépend donc d'une infinité de circonftances, comme de la grandeur de la lentille, de fa pefanteur fpécifique, de fa figure, &c. comme on le démontre dans la théorie des

réſiſtances des fluides ſur différens corps : mais ſi le pendule & l'air qui l'environne reſtent les mêmes, ſi la réſiſtance de l'air eſt en raiſon quarrée des viteſſes, comme elle l'eſt certainement à fort peu près, & que le corps décrive de petits arcs, on démontre alors que les diminutions inſenſibles α ſont en raiſon quarrée des arcs A : nous poſerons donc $\alpha = \frac{AA}{CC} \gamma$, en prenant pour C un arc arbitraire, & pour γ, la diminution qui répond à cet arc, & là-deſſus nous aurons :

$$\mathfrak{C}(P-F) = \frac{A^3}{CCl} \gamma p.$$

Si l'air qui environne le pendule étoit variable, on démontre que la quantité γ eſt proportionnelle à la denſité de l'air, & le rapport des denſités de l'air peut ſe déterminer par l'inſpection du thermometre & du barometre, gradués pour cet effet. Voici à préſent les Corollaires principaux qui découlent de nos équations.

(*a*) Toutes les valeurs de notre derniere équation peuvent être déterminées : les poids P & p ſont connus ; le frottement F ſe trouvera, ſi, après avoir ôté le pendule & le poids moteur, on met à la place de ce poids, un autre beaucoup plus petit d'abord, & qu'on l'augmente peu à peu, juſqu'à ce qu'il faſſe tourner toutes les roues, & ce poids ſera exprimé alors par F ; la quantité $\mathfrak{C}$, qui marque la deſcente verticale du poids moteur à chaque oſcillation du pendule, ſe détermine aiſément, en meſurant ſa deſcente au bout de 24 heures, & en diviſant cette deſcente par $24 \times 60 \times 60$ ou 86400 ; l marque la diſtance du centre de gravité du pendule, depuis ſon point de ſuſpenſion ; elle ſera un peu plus petite dans les horloges à ſecondes que 441 lignes : A eſt la moitié de l'arc décrit par le centre de gravité du pendule ; C un arc pareil, arbitraire ; & enfin γ marque la diminution inſenſible, que le pendule

détaché de l'horloge fouffre, lorfqu'il décrit dans fa defcente ledit arc C; & on pourra déterminer pareillement ce petit arc γ, en mefurant la diminution actuelle après mille balancemens, & en prenant la millieme partie de cette diminution. Prenons pour exemple la pendule de M. Graham, que l'on conferve encore à l'Académie : le poids moteur ordinaire y eft de 11 liv. $14\frac{1}{2}$ onces; la pendule ne fe remonte qu'au bout d'un mois, & doit defcendre, à ce que l'on m'a marqué, de $3\frac{1}{2}$ pieds pendant ce tems; nous avons donc $6 = \frac{1}{5143}$ lignes, $P = 11$ liv. $14\frac{1}{2}$ onces : je démontrerai ci-deffous, que F doit y être à peu près $= \frac{1}{4}P$; par les dimenfions de la lentille, qu'on me marque être de cuivre jaune, le poids du pendule p doit être à peu près $= \frac{3}{2}P$: le pendule faifoit de chaque côté un arc de 2° 10′, ce qui fait $\frac{A}{C} = 0,0378$: mettons l'arc arbitraire $C = A$, & nous trouverons $\gamma = \frac{1}{389}$ lignes; d'où je conclus que le centre de gravité du pendule détaché de l'horloge, defcendant fur un arc de 2° 10′, perdroit dans fa montée $\frac{1}{389}$ lign. ou la quarante-neuvieme partie d'une minute, en fuppofant la diftance du centre de gravité au point de fufpenfion, de 3 pieds. Ces valeurs étant connues dans un cas, on peut en déduire ce qui doit arriver dans d'autres cas, & fur-tout, toutes les variations que le pendule fouffrira en changeant le poids moteur, en fuppofant le frottement plus ou moins grand, & l'air qui environne le pendule devenu plus ou moins denfe, par rapport à la denfité de l'air du tems de l'obfervation fondamentale.

(b) Si le frottement des roues exprimé par F étoit nul, les arcs décrits par le pendule feroient, en raifon foûtriplée, des poids moteurs, tout le refte étant égal.

(c) En confidérant le frottement, ces mêmes arcs font

en raiſon des racines cubiques, des excès du poids moteur par-deſſus les frottemens. Ce Corollaire m'a fait connoître quel étoit le frottement dans la pendule de M. Graham ; car M. de Maupertuis dit, p. 165 & 166, qu'avec le poids ordinaire le pendule décrivoit des arcs de 4° 20′, & avec la moitié de ce poids, des arcs de 3° 0′; ces arcs ſont en raiſon de 13 à 9 : donc $P - F : \frac{1}{2}P - F =$ Cub. 13 : Cub. 9 = 2197 : 729, ce qui donne $F = \frac{739}{2936}P$; ou à peu près $F = \frac{1}{4}P$, tout comme j'ai mis dans la note (*a*). Si on ſuppoſe le plus petit frottement égal au quart du poids moteur, & le plus grand frottement égal à ſa moitié, les plus grandes oſcillations ſeront aux plus petites, comme $\sqrt[3]{3}$ à $\sqrt[3]{2}$, ou comme 1144 à 1000 : le plus grand arc étant donc de 4° 20′, le plus petit ſera de 3° 47′, & cette différence des arcs ne ſera qu'une ſeconde & demie par jour dans la marche de la pendule (§. XVI.); d'où l'on voit combien ces changemens ſont peu à craindre dans les bonnes horloges.

(*d*) Une autre ſource de variations des arcs décrits par le pendule, eſt la différente denſité de l'air, & tout le reſte étant égal, les arcs ſont réciproquement proportionnels aux racines cubiques des denſités de l'air : or la plus grande denſité de l'air eſt à la plus petite dans nos climats, environ comme 6 à 5 ; donc le plus grand arc ſera au plus petit à cet égard, comme $\sqrt[3]{6}$ à $\sqrt[3]{5}$, ou comme 1062 à 1000 : le plus grand arc étant donc de 4° 20′, le plus petit ſera à cet égard de 4° 5′, & cette différence vaut environ trois quarts de ſeconde par jour dans la marche de la pendule.

(*e*) Comme le froid augmente en même tems la ténacité de l'huile & la denſité de l'air, outre qu'il raccourcit le pendule, il concourt par toutes ces trois raiſons, à accélérer la pendule ; mais les deux premieres ſont preſque inſenſibles,

infenfibles, par rapport à la troifieme dans les bonnes pendules, puifqu'en vertu du §. xv, celle-ci toute feule peut aller jufqu'à 30″ par jour, du plus grand chaud au plus grand froid dans un même climat, pendant que les deux autres jointes enfemble, ne vont que jufqu'à 2″ d'une extrémité à l'autre. Ce raccourciffement & allongement de la verge du pendule eft donc le feul inconvénient qui refte aux bonnes pendules; & comme on peut y remédier par l'infpection fréquente du thermometre, ou bien en faifant la verge de deux pieces de différens métaux, & en la chargeant d'un double poids, le tout avec de certaines proportions, fondées fur les différentes extenfions de ces métaux, caufées par la même augmentation de chaleur (cet éclairciffement fuffira, tant que je n'aurai d'autres Lecteurs que mes Juges); je crois qu'il ne refte plus rien à defirer fur la perfection des pendules pour les obfervations fur terre.

(*f*) La conftruction de l'échappement & de la roue de rencontre, eft telle que les ofcillations du pendule ne peuvent être diminuées au-delà d'un certain degré, fans arrêter la marche de l'horloge : cela fait que le poids moteur ne fçauroit non plus être diminué au-delà d'un certain degré; & voici comme on pourra le déterminer. Soit a la moitié du plus petit arc poffible, & π le plus petit poids moteur, on aura $\frac{A^3}{a^3} = \frac{P-F}{\pi-F}$ ou $\pi = \frac{a^3 P - a^3 F + A^3 F}{A^3}$.

Suppofons dans la pendule de M. Graham, $F = \frac{1}{4} P$, [voyez la note (*c*)] & $a = \frac{1}{2} A = 1° 5'$, nous trouverons $\pi = \frac{11}{32} P = 4$ liv. $1 \frac{1}{2}$ once, puifque P étoit de 11 liv. $14 \frac{1}{2}$ onces.

(*g*) Une remarque que je fouhaite fur-tout qu'on faffe, eft que la réfiftance de l'air eft une chofe très-néceffaire à la marche de la pendule, & que quand même on pourroit

l'éviter entierement, il faudroit se donner bien de garde de le faire; & cela pour être paradoxe, n'en est pas moins vrai: si la résistance que l'air apporte au mouvement du pendule étoit nulle, nous aurions $\gamma = 0$, & $A = \infty$, c'est-à-dire que le pendule décriroit nécessairement des arcs infiniment grands. Cette conclusion ne doit pas nous surprendre, car sans la résistance de l'air, le poids moteur n'auroit que le frottement à vaincre, & comme le frottement demeure le même, il faudroit alors que par l'action continuée du poids moteur, il se fît une augmentation continuelle dans les balancemens du pendule. Mais quant au frottement, il faut l'éviter avec toutes les attentions possibles, car il ne peut que nuire à tous égards.

(*h*) Le poids de la lentille, quel qu'il soit, ne change pas les arcs du pendule, pourvû que la lentille conserve la même surface, qui donne toûjours à l'air une prise égale; autant que le poids p devient plus grand, autant le petit arc γ devient plus petit, & la quantité γp dans notre équation, reste toûjours la même, comme on le démontre dans la théorie des milieux résistans; donc l'arc A n'est point changé par la variation du poids p. Si dans la pendule de M. Graham, la lentille avoit été deux ou trois fois plus pesante sous le même volume & la même surface, le même poids moteur de 11 liv. $14\frac{1}{2}$ onces lui auroit fait décrire les mêmes arcs de $4^\circ\ 20'$: cela suppose pourtant que le pendule ne souffre dans ses balancemens aucun frottement, ce qui ne sçauroit être exactement vrai. Ainsi comme le point principal est, que le pendule libre & le pendule appliqué à l'horloge fassent leurs oscillations suivant les mêmes loix, j'en conclus qu'il faut faire le poids de la lentille aussi grand que la matiere & les autres circonstances accidentelles le permettront: il faut aussi que la pesanteur spécifique de ce poids soit fort grande, afin que les

changemens de la peſanteur ſpécifique de l'air ne puiſſent pas être ſenſibles ſur le tems abſolu d'une oſcillation : dans le cuivre jaune, cette raiſon peut retarder ou accélérer la pendule de deux tiers de ſeconde par jour.

(*i*) Plus le poids moteur eſt grand, plus il fait décrire au pendule de grands arcs ; il faut donc augmenter le poids, juſqu'à ce qu'il faſſe décrire au pendule les arcs qu'on veut qu'il décrive ; cela détermine le poids moteur exactement à cet égard : mais il y a encore une autre conſidération à faire. On pourroit augmenter davantage le poids moteur, ſans que le pendule décrive de plus grands arcs, en faiſant que la lentille ſouffre en même tems une plus grande réſiſtance de l'air. Si, par exemple, on eût augmenté dans la pendule de M. Graham le poids moteur en raiſon de 4 à 7, la quantité $P - F$ en ſeroit devenue deux fois plus grande ; & ſi on avoit donné à la lentille une figure à ſouffrir deux fois plus de réſiſtance de l'air, la quantité γ en ſeroit devenue auſſi deux fois plus grande, & l'arc A ſeroit reſté le même : par-là on obtiendroit que l'inégalité des arcs A, produite par l'inégalité du frottement F, ſubſiſtât entre les termes du rapport de $\sqrt[3]{6}$ à $\sqrt[3]{5}$, au lieu du rapport beaucoup plus inégal $\sqrt[3]{3}$ à $\sqrt[3]{2}$, marqué dans la note (*c*), ce qui ſeroit un avantage. Il eſt vrai qu'on pecheroit par-là contre la regle, que les oſcillations du pendule libre, & celles du même pendule appliqué à l'horloge, doivent être conſervées égales le plus qu'il eſt poſſible ; cependant je crois la premiere raiſon plus importante que la ſeconde, qui lui eſt contraire. Cette réflexion nous apprend du moins qu'on doit être attentif à déterminer cette proportion la plus avantageuſe, par un grand nombre d'expériences, & qu'il eſt bien ſûr qu'il ne faut pas vouloir diminuer trop la réſiſtance de l'air.

(*l*) J'ai ſuppoſé dans mes calculs, que l'augmentation

du poids moteur *P* n'augmente point le frottement des roues *F*; je crois ce principe vrai à peu près, mais non pas exactement : on peut diftinguer ici le frottement mutuel des dents qui s'engrenent, d'avec le frottement du mouvement des axes : le premier frottement doit être augmenté par le poids moteur, parce que les dents font plus preffées les unes contre les autres, mais je le crois beaucoup plus petit que l'autre, parce que ce mouvement n'eft pas un mouvement gliffant, mais une application fucceffive des parties mutuelles qui fe répondent, lequel mouvement on peut démontrer ne fouffrir prefque aucun frottement ; auffi faut-il être bien attentif dans la conftruction des roues, qu'il ne puiffe s'y faire le moindre mouvement gliffant. Le fecond frottement provient d'un mouvement extrêmement gliffant, c'eft pourquoi il doit être beaucoup plus grand que le premier, & je fuppofe que ce frottement n'eft pas augmenté par le poids moteur.

Il feroit à fouhaiter que cette méchanique des horloges, & cette œconomie entre leurs forces & leurs réfiftances, fût à la portée de tous les habiles ouvriers, pour pouvoir mieux diriger leurs vûes & leurs attentions : mais c'eft fur-tout dans la conftruction des montres qu'on doit être attentif à nos principes, comme je me propofe de faire voir ci-deffous.

§. XVIII.

LA grande perfection des pendules ne doit pas nous permettre de renoncer à leur ufage fur mer, tant qu'il eft poffible de les employer ; & je fuis fûr qu'il y a des faifons & des mers où l'on peut les employer utilement pendant long-tems : peut-être même que moyennant les regles que je vais donner, on pourra s'en fervir tant que le vaiffeau n'eft pas fortement agité.

I. Il faut ſuſpendre la pendule de maniere qu'elle puiſſe ſe tourner en tout ſens, & il faut ſur-tout la ſuſpendre au centre de gravité du vaiſſeau, puiſque c'eſt cet endroit qui eſt le moins agité, & on trouvera cet endroit par pluſieurs obſervations faites ſur le mouvement des pendules ſuſpendus au vaiſſeau.

II. Tout corps d'une étendue finie, ayant un certain point par lequel étant ſuſpendu, il fait ſes balancemens dans moins de tems, que s'il étoit ſuſpendu par tout autre point (on a déterminé ce point): il faudra faire paſſer les axes du mouvement de la pendule par ce point.

III. Il faut encore employer un petit pendule, qui batte tout au plus les demi-ſecondes. Voyez par rapport à ces trois regles, les notes (ϵ) & (γ) du §. IX; mais par rapport à la derniere, il y a encore une réflexion particuliere à faire que voici.

Un pendule ſimple tend à faire ſes balancemens harmonieuſement avec les agitations du vaiſſeau; mais ce pendule appliqué à l'horloge, eſt entretenu dans ſes balancemens naturels par le poids moteur. Comme il y a donc ici deux cauſes permanentes differentes entre elles, le principe du §. V. ne trouve plus lieu. Dans ces cas, une cauſe maîtriſera ordinairement l'autre, & prévaudra; ce que je pourrois éclaircir par pluſieurs exemples, tirés de la Méchanique & de la Phyſique. Si les agitations du vaiſſeau étoient iſochrones avec les balancemens naturels du pendule, ces mouvemens deviendroient bien-tôt harmonieux, mais auſſi le pendule feroit bien-tôt des excurſions énormes, & la marche de la pendule ſeroit ou arrêtée, ou extrêmement dérangée. La même choſe arriveroit, ſi les deux claſſes de balancement étoient à peu près iſochrones; mais ſi elles ſont fort inégales, les balancemens les plus foibles & les plus tardifs ne peuvent influer

ſenſiblement ſur les autres. Or les balancemens du vaiſſeau, quand ils ſont uniformes & réguliers, ſont fort lents; c'eſt pourquoi je demande que les pendules ſoient courts, pour les rendre moins ſenſibles aux agitations du vaiſſeau.

IV. Cette Réflexion nous fournit encore cette quatrieme regle, qui eſt qu'on faſſe faire au pendule de grandes oſcillations; alors le poids moteur maîtriſera entierement le pendule, & celui-ci ne pourra plus être dérangé dans ſes balancemens par les agitations du vaiſſeau; & quand même chaque balancement du pendule ſeroit tant ſoit peu dérangé, toutes les petites erreurs inſenſibles ſe détruiroient mutuellement au bout d'un certain tems. Il eſt vrai que par ces deux dernieres regles, on s'écarte des maximes qu'on doit avoir ſur terre, mais cette raiſon ne mérite preſque aucune attention ſur mer. Je ſuis ſûr qu'avec ces précautions, on pourra ſe ſervir utilement des pendules, tant que le vaiſſeau n'eſt pas tourmenté; & j'ai fait pluſieurs expériences ſur des pendules ſuſpendues par des cordes & balancées, qui m'ont fait connoître la validité de mes remarques.

§. XIX.

Si le vaiſſeau commence à être agité plus fortement, il faudra employer d'autres horloges, en ſubſtituant au poids moteur un reſſort, & au pendule un balancier, c'eſt-à dire, des horloges faites en grand ſur le modele des montres. Je crois que ces horloges ſerviront ſur mer avec autant de préciſion, ou peu s'en faut, que ſur terre; & toute la queſtion ſera, dans quel degré de perfection on croit pouvoir mettre les horloges à balancier, en les tenant entierement en repos. Comme cette matiere eſt fort importante, non-ſeulement pour les horloges marines,

mais encore pour les montres; je l'ai examinée ſcrupuleuſement, & je mettrai ici mes réflexions tout au long.

§. XX.

REMARQUONS d'abord que pourvû que chaque piece mobile dans une horloge ne puiſſe tourner qu'autour de ſon centre de gravité, cette horloge ne peut être aucunement dérangée, de quelque façon qu'on l'agite : c'eſt une conſéquence qui découle immédiatement du §. XIII. Et comment ſe pourroit-il ſans cela, qu'une montre ne fût pas extrèmement dérangée par les ſecouſſes & les cahos d'un cheval & d'une chaiſe ? Il ſera donc fort important pour la perfection des horloges marines, que les pieces tournent parfaitement ſur un même point, & que l'axe du mouvement paſſe par leur centre de gravité, avec la derniere préciſion poſſible. Cette remarque regarde ſur-tout le balancier; il faut y mettre toute ſon attention, & quand on y aura bien réuſſi, la marche de l'horloge ou de la montre ſera auſſi uniforme ſur mer, qu'elle ſeroit ſur terre : ainſi ce que j'ajoûterai ſera indépendant des agitations du vaiſſeau, auxquelles je ne ferai plus aucune attention.

§. XXI.

LES horloges marines doivent avoir au fonds la même conſtruction que les montres de poche, puiſqu'il eſt néceſſaire qu'elles ſoient animées par l'action d'un reſſort, & réglées par les oſcillations d'un balancier : mais pour pouvoir travailler toutes les pieces avec une grande exactitude, il faudra faire ces horloges auſſi grandes qu'on fait les bonnes pendules. J'avoue que les horloges à balancier ſont beaucoup moins parfaites que les bonnes

pendules, mais je crois que c'est faute d'avoir bien examiné le méchanisme & toute l'œconomie de ces horloges. Je vais donc examiner les horloges à balancier, sur le même pied & les mêmes principes que j'ai employés pour les pendules.

§. XXII.

La premiere & principale source de l'imperfection des montres & autres horloges à balancier, vient des grandes excursions du balancier & de leurs grandes inégalités. La seconde, est que le balancier ne maîtrise pas assez le mouvement des roues & l'action de la force motrice : nous tâcherons de nous mettre en état de remédier à ces grands inconvéniens, & ce sera encore en partant des premiers principes.

§. XXIII.

Dans les horloges à balancier, il y a à considérer, comme dans les pendules, 1°. La force du ressort moteur. 2°. Le frottement des roues. 3°. Les résistances que souffre le balancier dans ses balancemens. Mais ces dernieres résistances different beaucoup de celles que souffre le pendule dans une horloge aussi parfaite que celle de M. Graham, qui nous a toûjours servi d'exemple. Le pendule n'y souffre presque aucune autre résistance que celle de l'air, sans avoir aucun frottement sensible; au lieu que les balanciers souffrent fort peu de la résistance de l'air, & beaucoup du frottement. Je ne crois pas qu'on ait remarqué avant moi, que c'est-là presque l'unique cause pourquoi on n'a pû jusqu'ici venir à bout de faire décrire au balancier de petits balancemens, si nécessaires à

la

la marche uniforme de l'horloge. Si la résistance de l'air étoit tout-à-fait nulle, & le ressort de la spirale parfait, alors le grand ressort n'auroit à vaincre que le frottement: s'il ne le surpassoit que fort peu, l'horloge s'arrêteroit au moindre accident; & s'il venoit à le surpasser de beaucoup, le balancier en décriroit tout aussi-tôt de grands arcs, parce que les grands mouvemens du balancier n'apportent pas plus de résistance au ressort moteur que les petits mouvemens. C'est-là la nature du frottement; rien ne pourroit même empêcher le balancier de prendre continuellement plus d'essor, si la résistance de l'air étoit entierement nulle, & l'élasticité de la spirale parfaite. Voyez la note (*g*) du §. XVII.

§. XXIV.

PAR-là il arrive que le moindre changement, soit dans le grand ressort, soit dans le frottement, cause de très-grandes variations dans les excursions du balancier; & plusieurs essais que j'ai faits sur les montres, m'ont fait voir clairement que je ne me trompois point. Il suffira d'alléguer une seule expérience, que j'ai faite sur une assez bonne montre, que je n'avois pas fait nettoyer depuis très-long-tems. L'huile s'y étoit tellement épaissie, qu'un froid tel que marque le 34 degré du thermometre de Fahrenheit, la faisoit arrêter: je remarquois que dans cet état, le balancier faisoit encore des excursions de 60 degrés; j'ai mis ensuite cette montre contre le fourneau, & le thermometre à côté de la montre; le thermometre montoit jusqu'à 94 degrés, & le balancier de la montre en a augmenté ses balancemens de près de 30°, faisant dans ses excursions presque 90°, & cette augmentation a retardé la montre d'environ 26′ par jour. Je regarde donc comme un très-grand, & le principal défaut dans les

montres, que le reſſort moteur n'ait preſque d'autre obſtacle à vaincre que le frottement, puiſqu'il en arrive néceſſairement que le balancier fait de très-grandes excurſions, & des excurſions fort inégales, pour peu que le frottement varie, & enfin dont l'inégalité eſt d'autant plus grande conſéquence, que les balancemens ſont grands par eux-mêmes. On renverſe par-là entierement le principe de l'uniformité dans la marche.

§. XXV.

Il eſt clair par ces remarques, 1° Qu'il faut éviter autant qu'il eſt poſſible tous les obſtacles, qui n'agiſſent pas plus fortement dans les grands balancemens que dans les petits, & ces obſtacles ſont préciſément le frottement, qu'on doit tâcher de diminuer avec toutes les attentions imaginables, ſur-tout dans le balancier. 2°. Qu'il faut néceſſairement apporter d'autres obſtacles au mouvement du balancier, ſans quoi ſes balancemens croîtroient continuellement. 3°. Que ces obſtacles doivent être d'une nature à cauſer, ſans l'action du grand reſſort, une plus grande diminution aux grandes excurſions du balancier, qu'aux petites : les frottemens produiſent des diminutions toûjours égales, parce que ces diminutions ſont comme les tems des balancemens, qui peuvent être cenſés les mêmes aux grandes & aux petites oſcillations, pendant que la réſiſtance de l'air cauſe des diminutions, qui ſont proportionnelles à peu près aux quarrés des arcs entiers.

§. XXVI.

Je prends donc pour une conſéquence néceſſaire, quelque paradoxe qu'elle paroiſſe, qu'il faut à deſſein

augmenter la réſiſtance de l'air contre le balancier, & l'augmenter conſidérablement, juſqu'à ce qu'elle devienne du moins égale au frottement total, puiſque nous avons vû dans la note (*e*) du §. XVII, que dans la pendule de M. Graham, la réſiſtance de l'air faiſoit ſeule trois fois autant que le frottement entier, celui-ci n'étant que le quart du poids moteur. Pour cet effet je conſeillerois d'ajoûter au balancier trois ou quatre petites aîles, qui donnent directement contre l'air. Je ſuis ſûr que par ce moyen on pourra entretenir ſûrement la marche de l'horloge, par des balancemens beaucoup plus petits qu'on n'a pû faire juſqu'ici, & que ces balancemens ſeront beaucoup moins inégaux.

§. XXVII.

APRE'S avoir diminué ainſi très-conſidérablement les grandes variations dans les excurſions du balancier, il faut encore tâcher de rendre ſes balancemens iſochrones, malgré une petite inégalité qui reſtera toûjours. Suppoſons que le balancier détaché de l'horloge pût tourner avec une liberté entiere, & que l'action de la ſpirale rendît alors ſes grands & ſes petits balancemens parfaitement tautochrones entre eux, il eſt certain que ce tautochroniſme ne ſubſiſtera plus entierement, lorſque ce balancier, quoique modéré par la même ſpirale, ſera ajoûté à l'horloge ou à la montre; car il faudroit que l'accélération cauſée par la roue de rencontre, détruisît à chaque inſtant la réſiſtance de l'air & celle du frottement, & cette condition eſt du tout impoſſible à remplir: on fait ſeulement que la ſomme des accélérations & la ſomme de toutes les réſiſtances momentanées, ſe détruiſent à chaque balancement; mais cela ne ſuffit pas pour conſerver parfaitement le tautochroniſme. Tout ce qu'il y a donc à faire, eſt que

l'effet de toutes ces petites forces ſoit inſenſible ſur le balancier, de même qu'il eſt inſenſible ſur les pendules. Cette conſidération demande que l'inertie du balancier ſoit augmentée autant que les circonſtances le permettent, & la force de la ſpirale à proportion. On peut doublement augmenter l'inertie du balancier; premierement en augmentant ſon poids, & en ſecond lieu, en lui donnant un plus grand rayon, ſans le charger davantage; la premiere maniere cauſe en même tems plus de frottement au balancier, & ne feroit d'aucune utilité, ſi on n'avoit augmenté la réſiſtance de l'air en même tems; la ſeconde maniere ſera toûjours utile à tous égards. Les réflexions que j'ai faites dans la note (h) du §. XVII, à l'égard du poids de la lentille, doivent auſſi être appliquées au balancier. Cette ſeconde remarque ne contribuera pas moins que la premiere à la perfection des horloges marines, où rien ne nous gêne ſur cet article; on y pourra augmenter & charger le balancier tant qu'on jugera à propos, & renforcer la ſpirale à proportion. Il s'en faut de beaucoup qu'on ſatisfaſſe à cette condition dans les montres ordinaires autant qu'on pourroit, & j'ai remarqué ſouvent qu'une montre n'étoit meilleure qu'une autre, quoique mieux travaillée, que parce qu'elle avoit un balancier plus grand & plus chargé. Je crois donc que moyennant ces précautions, les balancemens ne pourront différer ſenſiblement de ceux que le balancier feroit, s'il étoit entierement libre.

§. XXVIII.

Il s'agit d'examiner encore quelles meſures on peut prendre pour régler le balancier, conſidéré comme entierement libre, mais faiſant des balancemens inégaux en grandeur. Or, on ſçait que la ſpirale doit pour cet effet

exercer ſur le balancier un effort proportionnel à ſa diſtance au point d'équilibre : la théorie nous fourniroit aſſez de moyens pour ſatisfaire à ce principe, ſi ſeulement il étoit poſſible de les exécuter avec une préciſion ſuffiſante; faute de cela, on a recours à un principe connu dans la Phyſique expérimentale, que tout reſſort changeant ſa figure naturelle, le fait par des cauſes proportionnelles aux changemens, tant que ceux-ci ſont fort petits; c'eſt donc une néceſſité abſolue que la ſpirale change fort peu ſa figure pendant les agitations du balancier, & moyennant cela les balancemens, quoiqu'un peu inégaux, seront ſenſiblement tautochrones entre eux. Cette condition nous fait voir premierement, qu'on doit prendre toutes ſes meſures, pour que les balancemens du balancier ſoient toûjours fort petits, & je ſuis perſuadé qu'on y pourra réuſſir, en évitant avec tous les ſoins imaginables, le frottement du balancier, & en rendant la réſiſtance de l'air plus ſenſible; en ſecond lieu, qu'il faut qu'un mouvement conſidérable du balancier produiſe peu de changement dans la figure de la ſpirale. Cette condition nous fourniroit un grand nombre de réflexions ſur la conſtruction & la figure naturelle de la ſpirale, ſi nous pouvions nous y arrêter : il me ſemble qu'il convient ſur-tout, que l'extrémité mobile de la ſpirale ſoit fort proche de l'axe du mouvement du balancier, & que la ſpirale agiſſe ſur le balancier, toûjours ſous une même direction & ſur un même levier. Je dirai auſſi en paſſant, qu'il eſt de grande conſéquence que les deux extrémités de la ſpirale ſoient bien fermes, & que l'axe du mouvement du balancier ne puiſſe branler en aucune façon; en troiſieme lieu, qu'il faut que la ſpirale, étant en repos, ſoit entierement dans ſa figure naturelle, ſans être bandée ou génée en aucune façon, c'eſt-à-dire, que ſa figure ſoit parfaitement la

même que si les deux extrémités étoient entierement libres ; que cet équilibre soit *oisif* & non *forcé*. Ce sont les termes dont se sert M. Jean Bernoulli, Docteur en Droit, dans ses Recherches Physiques sur la Propagation de la lumiere, *p.* 17 *& suivantes*, où, par un raisonnement fort solide par lui-même, mais établi sur un faux principe, il prétend précisément le contraire.

Pour éclaircir cette question, imaginons-nous la courbe *AEP* (*Fig. 6.*) sur l'axe *MP* telle, que *PG* marquant le changement dans la figure de la spirale, depuis sa figure naturelle, l'appliquée *GE* exprime la force qui tend à remettre la spirale dans son état d'équilibre : n'est-il pas évident que *PG* devenant négatif en changeant la figure de la spirale en sens contraire, l'appliquée *GE* doit devenir négative aussi ? c'est-à-dire qu'une inflexion en sens contraire, est produite par une force en sens contraire ; & cela étant, ne faut-il pas que la continuation de la courbe *AEP* soit représentée par *Pea* ? Il est donc nécessaire que la courbe *APa* ait au point *P* une inflexion contraire, & cela étant, le rayon osculateur y sera infini. Or une petite portion *EPe* approche d'autant plus d'une ligne droite, que le rayon osculateur est plus grand, & elle en approche le plus qu'il est possible, lorsque le rayon osculateur est infini ; & si cette portion *EPe* étoit entierement une ligne droite, la spirale conserveroit un tautochronisme parfait, parce que les forces seroient proportionnelles aux éloignemens du point de repos. M. Bernoulli, au lieu de continuer la courbe du côté opposé de l'axe *MN*, l'a continuée du même côté, comme le marque la figure septieme, qui est la même que la figure seconde de son discours, & c'est sur cette inattention qu'il a bâti son raisonnement, qu'on ne peut s'empêcher de trouver solide & fort ingénieux par lui-même, si l'inconvénient étoit tel

qu'il le ſuppoſe : mais il eſt certain qu'une ſpirale contrainte feroit beaucoup de mal, & je demande qu'on évite cette contrainte avec beaucoup d'attention. Je crois bien que deux ſpirales égales & appliquées en ſens contraire pourroient faire quelque bien, pourvû qu'elles ſoient l'une & l'autre dans un équilibre parfaitement *oiſif*, car la courbure des branches AEP & aeP ſera d'autant plus grande néceſſairement, que les deux ſpirales exerceroient plus de force l'une ſur l'autre.

§. XXIX.

VOILA mes réflexions principales ſur les horloges à balancier : après avoir bien peſé toute l'œconomie de ces horloges, je trouve que c'eſt preſque le ſeul frottement du balancier, qui empêche de les mettre dans un auſſi haut degré de perfection, que l'on ſçait mettre les pendules. Que l'on redouble donc ſes attentions à rendre ce frottement inſenſible ; je ſuis ſûr qu'on y réuſſira, pourvû qu'on convienne de l'importance de la choſe : mais peut-être faudra-t-il de toutes nouvelles manieres d'appliquer les balanciers aux horloges : je m'étendrois volontiers ſur cet article, ſi je ne craignois d'être trop prolixe. Je crois qu'il conviendra auſſi, de ne donner au plus qu'une demi-ſeconde aux balancemens, même dans les grandes horloges ; la ſpirale en aura plus de force, ce qui eſt un avantage, comme nous avons vû au §. XXVII ; & ſi les agitations du vaiſſeau étoient encore capables de faire quelque impreſſion ſur ces horloges, leur effet en ſera moins ſenſible, en vertu de la troiſieme note du §. XVIII.

§. XXX.

JE ne dois pas omettre une circonſtance qui peut

préjudicier aux horloges à balancier ; c'eſt qu'on prétend dans la Phyſique expérimentale, avoir remarqué quelque changement dans les forces élaſtiques des reſſorts, par les changemens de la température de l'air : ſi cela étoit, la ſpirale ne pourroit pas régler uniformément le balancier ; mais je ne ſuis pas encore entierement convaincu du fait : quoi qu'il en ſoit, ce que j'ai dit au §. XV, ſuffira parfaitement pour s'en éclaircir, & pour connoître enſuite les corrections à faire, par le moyen du thermometre.

§. XXXI.

JE finirai ce Chapitre par une nouvelle maniere de régler davantage les balancemens, ſoit d'un pendule, ſoit d'un balancier. Soit AB (*Fig.* 8.) la direction moyenne du pendule, ou d'un rayon du balancier, qui, dans ſes plus petits balancemens, vienne juſqu'en AC & AD, & qu'on mette à chaque côté un petit reſſort fort foible, tels que mn & qp, dont les extrémités n & p ſoient légerement touchées, lorſque le pendule ou le balancier fait ſes plus petites excurſions. Si enſuite ces balancemens deviennent plus grands, & par eux-mêmes plus tardifs, ils ſeront un peu accélérés par les petits reſſorts mn & qp, & on pourra facilement régler leur action d'une façon que la plus grande oſcillation devienne parfaitement tautochrone avec la plus petite, & alors les oſcillations moyennes ne pourront manquer d'être pareillement tautochrones, avec beaucoup de préciſion. Je n'aurois pas haſardé cette nouvelle idée, ſi pluſieurs expériences préliminaires ne m'en avoient garanti le ſuccès. Je me contenterai cependant de l'avoir indiquée, laiſſant à d'autres le ſoin de la perfectionner, s'ils trouvent qu'elle le mérite.

CHAPITRE

CHAPITRE III.

Contenant quelques réflexions sur la meilleure maniere de connoître à chaque instant la direction horisontale ou verticale dans les vaisseaux agités.

§. XXXII.

QUAND on voit l'horison, on prend la ligne visuelle qui le rase pour la direction horisontale, & alors pour prendre hauteur, on se sert de l'Arbalête, ou du Quartier Anglois : ce dernier instrument a été fort perfectionné depuis quelque tems par M. Grand-Jean de Fouchi (Voyez les Mémoires de l'Académie R. des Sc. pour l'année 1740, *p.* 468), dont les nouveaux quartiers de réflexion mesureront les angles avec toute la précision qu'on peut souhaiter. Ils seront sur-tout très-utiles pour mesurer les distances de la Lune à deux étoiles fixes, & pour déterminer par-là la longitude du lieu. Quand on se trouve à même de se servir de cet instrument, il ne faut pas douter qu'il ne soit infiniment préférable à la fleche ; mais je ne sçais si on pourra s'en servir pendant que le vaisseau est fort agité, au lieu qu'on peut toûjours faire ses observations avec l'Arbalête, qui est moins exact, mais plus facile & plus commode. On sçait assez tous les défauts de cette méthode de prendre hauteur sur mer, en prenant pour la vraie direction horisontale, la ligne visuelle qui rase ou paroît raser l'horison visible. Je ne m'arrêterai donc point à les décrire ; cependant malgré tous

ſes inconveniens, je doute fort qu'on en puiſſe jamais trouver une meilleure, à moins que la mer ne ſoit preſque calme, auquel cas on pourra peut-être lui préférer la méthode que j'expoſerai ci-deſſous.

§. XXXIII.

QUAND on ne voit l'horiſon ou la ſurface de la mer que de fort près dans les crépuſcules, ou qu'on ne la voit pas du tout pendant la nuit, on ſe trouve entierement hors d'état de ſuivre la méthode ordinaire pour obſerver les hauteurs; c'eſt pourtant le cas principal de la queſtion propoſée par l'Académie. Que faire dans ces fâcheuſes circonſtances? Il faut ſans doute avoir recours à des principes tout nouveaux, à moins qu'on ne voulût ſe contenter de jetter dans la mer des ſignaux enflammés, ou de les faire tranſporter ſur l'eſquif: ce ſeroit plutôt couper que défaire ce nœud Gordien. Je ne promets pas de ſatisfaire à cette queſtion avec toute la préciſion qu'on pourroit ſouhaiter: mais peut-être que ce que je propoſerai ſera d'autant moins imparfait, que je l'ai examiné avec plus d'attention, & qu'il eſt fondé ſur les vrais principes de la méchanique, que j'ai expoſés au premier chapitre. Voici mes réflexions ſur cette matiere.



§. XXXIV.

IL eſt évident que lorſqu'on ſe trouve réduit à ne pouvoir mettre à profit ce qui ſe paſſe hors du vaiſſeau, on ne peut plus avoir d'autres moyens pour connoître la direction verticale ou horiſontale, que ceux-là mêmes dont on ſe ſert ſur terre, tels que ſont les pendules, les niveaux, &c. Tous ces inſtrumens reviennent au même,

étant fondés ſur le même principe, qui eſt l'action de la peſanteur, toûjours perpendiculaire à la ſurface de la terre. Mais les agitations du vaiſſeau dérangeront continuellement l'état naturel de ces inſtrumens : il faudroit que la peſanteur fût infinie, pour qu'elles ne le fiſſent pas, ou que l'inertie fût infiniment petite ; & n'étant pas en notre pouvoir de changer ces choſes, il me ſemble que tous nos efforts ne peuvent aboutir qu'à diminuer autant qu'il eſt poſſible, l'effet des agitations du vaiſſeau ſur les pendules ſimples, & puis à déterminer la vraie verticale, qu'il eſt du tout impoſſible d'obſerver immédiatement, par d'autres circonſtances qu'on pourra obſerver. Il eſt ſouvent impoſſible de connoître une choſe par elle-même, qu'il eſt facile de déterminer par d'autres obſervations.

§. XXXV.

Si les agitations du vaiſſeau étoient tout-à-fait irrégulieres en tout ſens, il ſeroit ſans doute impoſſible de ſatisfaire à notre ſecond point, & on ſeroit réduit à ſe contenter du premier. Mais je dois répéter ici ce que j'ai expoſé au long dans le premier chapitre, ſçavoir, que les agitations du vaiſſeau ſont une eſpece de balancemens, qui ſe font ſuivant les loix du mouvement d'un pendule ſimple ; je ne prétens pourtant pas que cela ſoit ainſi à la rigueur ni toûjours : quand la mer eſt male ; quand deux mers ſe battent, en un mot, quand les lames & le vent ſont tout-à-fait irréguliers, les agitations du vaiſſeau ne peuvent qu'être irrégulieres, inégales & fort incommodes : j'avoue que ce n'eſt pas alors le tems de mettre en pratique les regles que je vais donner ; mais ces cas arrivent rarement, & quand on s'y trouvera, on pourra du moins ſaiſir les intervalles les plus favorables.

§. XXXVI.

QUANT à notre premier point, qui eſt de diminuer les agitations d'un pendule ſuſpendu dans un vaiſſeau; nous avons marqué dans le premier Chapitre tout ce qu'il convient de faire. Voyez ſur-tout la note (γ) du §. IX; & les deux exemples que j'y ai donnés, montrent combien il eſt important d'obſerver le plus près qu'on peut les regles que j'y ai données. Je ne me flatte pourtant pas qu'on puiſſe diminuer par-là les balancemens d'un pendule au point de pouvoir être négligés, & de pouvoir prendre la direction du pendule pour la vraie verticale. Je viens donc à l'examen de notre ſecond point, & c'eſt ſur-tout ici que j'ai beſoin de notre hypotheſe, touchant l'uniformité des balancemens du vaiſſeau; plus on ſe trouvera dans le cas de cette hypotheſe, plus on pourra déterminer exactement la vraie verticale.

§. XXXVII.

SOIT donc dans la quatrieme Figure, A le point autour duquel le vaiſſeau eſt ſuppoſé faire ſes balancemens: AF une ligne verticale; que l'angle MAF marque l'inclinaiſon moyenne du vaiſſeau couché ſur un de ſes bords, quelle que ſoit cette inclinaiſon. Suppoſons enſuite que la ligne AM faſſe des balancemens de côté & d'autre, & que pendant ces agitations elle ſe trouve dans une poſition quelconque AB. Soit au point M attaché un pendule Mm, & ſuppoſons que le point M ſe trouvant en B, le pendule Mm ait pris la ſituation BC, & qu'on tire la verticale BE; il s'agit de déterminer l'angle CBE par des quantités qu'on pourra obſerver. Cet angle CBE ne doit

donc pas être déterminé par l'angle BAM, ni par MAF, qu'on ne sçauroit jamais connoître que fort grossierement; je ne veux pas même que l'on suppose la distance AM connue, car on ne pourroit déterminer le point A assez exactement, & ce point ne sçauroit être exactement tel que nous le supposons, c'est-à-dire, entierement en repos pendant les agitations du vaisseau; il suffit qu'il doit y avoir nécessairement un endroit qui soit agité fort peu.

§. XXXVIII.

AVANT que de marquer comment on pourra s'y prendre pour résoudre ce Problème, je prierai le Lecteur de se rappeller les propriétés que j'ai démontrées dans le premier Chapitre, sur l'angle en question CBE, sçavoir qu'il ne sçauroit manquer d'être toûjours à peu près proportionnel à l'angle BAM, & que dans nos hypotheses il est parfaitement $= \frac{AF}{AM} \times \frac{L}{\lambda - l} \times BAM$, en faisant $AM = L$, la longueur du pendule $Mm = l$, & la longueur du pendule simple isochrone avec les balancemens du vaisseau $= \lambda$. Voyez le §. x. Si les oscillations du pendule Mm ne se font pas dans le même plan avec les balancemens de la ligne AM, & que le pendule soit obligé de balancer dans un autre plan quelconque; si l'on suppose encore que la ligne AM fasse plusieurs sortes de balancemens, mais pourtant harmonieux entre eux, l'angle absolu CBE en sera à la vérité changé, mais il restera toûjours proportionnel à $\frac{L}{\lambda - l} \times BAM$. Il nous sera donc permis de supposer

$$CBE = H \times \frac{L}{\lambda - l} \times BAM.$$

en entendant par H une quantité constante quelconque,

qui sera la même, de quelque façon que le vaisseau soit agité, pourvû qu'il le soit uniformément pendant un petit espace de tems.

§. XXXIX.

Si nous supposons à présent qu'il y ait trois pendules tous attachés au point M, dont les longueurs différentes soient l, l' & l'', & que ces pendules ne puissent balancer qu'autour d'un même axe, il est clair que la quantité H, comme indépendante de la longueur du pendule, sera pour chacun de ces pendules la même : outre cela, quel que soit le point A, la distance AM ou L sera pareillement la même, comme aussi la longueur λ, & enfin l'angle BAM, qui ne dépend que des agitations du vaisseau. Soit à présent l'angle CBE pour le premier & le plus court pendule $l = A$, pour le pendule $l' = A'$, & pour le pendule $l'' = A''$, & nous aurons, en vertu de l'équation du précédent article, $A = H \times \frac{L}{\lambda - l} \times BAM$

$$A' = H \times \frac{L}{\lambda - l'} \times BAM$$

$$A'' = H \times \frac{L}{\lambda - l''} \times BAM.$$

De ces trois équations on peut tirer ces deux analogies :

$$A : A' - A = \lambda - l' : l' - l$$

$$A : A'' - A = \lambda - l'' : l'' - l,$$

dans chacune desquelles le second terme peut être considéré comme connu, puisque $A' - A$ est l'angle compris entre le premier & le second fil, & $A'' - A$ est l'angle compris entre le premier & le troisieme fil, & que ces angles pourront être observés à chaque moment : faisons donc $A' - A = M$, & $A'' - A = N$, & nous aurons ces deux équations :

$$A = \frac{\lambda - l'}{l' - l} \times M, \ \& \ A = \frac{\lambda - l''}{l'' - l} \times N;$$

moyennant lesquelles on aura en quantité purement connues :

$$\lambda = \frac{M(l' \times L'' - l \times l') - N(L' \times l'' - l \times l'')}{M(l'' - l) - N(L' - l)}$$

$$A = \frac{(l'' - l')MN}{(l' - l)N - (l'' - l)M}.$$

Donc la question de connoître la verticale, dépend entierement de la maniere d'observer les angles que font à chaque moment les trois pendules entre eux.

§. XL.

Si nous avions voulu considérer la quantité λ comme connue, nous n'aurions eu besoin pour connoître la vraie verticale, que des deux premiers pendules l & l', avec l'angle intercepté M, puisque nous avons trouvé $A = \frac{A - l'}{l - l} \times M$. Cette formule seroit beaucoup plus commode pour le calcul, elle rendroit l'instrument pour prendre hauteur plus simple, & elle seroit souvent plus exacte. Il ne sera donc pas hors de propos de remarquer, que la quantité λ pourra se connoître assez au juste ; elle marque la longueur du pendule simple isochrone avec les agitationsdu vaisseau, quelque compliquées que soient ces agitations ; pourvû qu'elles soient devenues harmonieuses, elles seront tautochrones, quoiqu'elles puissent être plus tardives dans un tems que dans un autre ; cela dépend sur-tout du plus ou moins de lenteur dans le mouvement des lames. Or, on peut compter combien de tems emploient 20 ou 30 balancemens du vaisseau, par le moyen des battemens d'une montre, & par-là on connoîtra la longueur λ pour tel tems qu'on voudra ; & on la connoîtra assez exactement.

§. XLI.

CES deux derniers articles montrent la maniere de déterminer la direction verticale par le calcul ; & de la déterminer à chaque moment. Lorsqu'on voudra se contenter de reconnoître la position verticale pour un seul moment à chaque balancement du vaisseau, il sera très-facile de le faire sans aucun calcul, puisqu'on n'aura qu'à remarquer le moment auquel tous les pendules se trouvent réunis dans une même ligne, & leur direction commune sera la direction verticale. Un seul pendule même y peut suffire, en remarquant l'excursion entiere du pendule, & en en prenant la moitié ; car le pendule sera vertical, lorsqu'il sera au milieu des points extremes.

§. XLII.

VOILA les principes qui pourront nous conduire à la maniere de prendre hauteur sur mer pendant la nuit, quand on ne voit pas l'horison. Mais examinons auparavant quelles sont les circonstances les plus favorables à ces méthodes.

(α) Quant à la méthode des trois pendules, exposée au §. XXXIX, il faut remarquer que pour rendre les angles M & N sensibles, les pendules doivent être fort inégaux en longueur, & que le pendule le plus long ne doit pas différer beaucoup de la longueur λ, qu'on peut connoître par la méthode du §. XL. Le pendule le plus court, indiqué par l, doit être fort petit, & enfin le pendule moyen l' pourra être pris un peu plus petit que $\frac{1}{2}\lambda$. Cette remarque est d'autant plus importante, qu'une petite erreur dans les angles M & N peut causer, sans cette précaution,

une

une grande erreur ſur l'angle cherché A, & on ne doit pas eſpérer que leſdits angles M & N ſoient entierement juſtes, tant faute d'obſervation, que faute de préciſion dans les hypotheſes. J'éclaircirai cette remarque par deux exemples oppoſés.

1°. Suppoſons premierement $\lambda = 16$ pieds; $l = 1$ pied; $l' = 2$ pieds, & $l'' = 4$ pieds: le vrai angle $M = 1°$; le vrai angle $N = 3° \; 30'$, & nous trouverons que le vrai angle A doit être de 14°; & il ſeroit tel, ſi les hypotheſes étoient exactement vraies, & qu'on n'eût commis aucune erreur dans les obſervations: mais ſi l'on avoit pris l'angle N trop petit de 15′ on trouveroit pour les mêmes hypotheſes, l'angle A de 26°, au lieu de le trouver de 14°, qui eſt ſa juſte valeur. Cette erreur ſeroit énorme, & devroit faire rejetter toute la méthode, ſi l'on ignoroit la ſource de l'erreur.

2°. Suppoſons en ſecond lieu que les longueurs l, l', l'' & λ ayent été priſes en raiſon de 1, 2, 4 & 5, en donnant toûjours 16 pieds de longueur à λ: ſoit le vrai angle $M = 1°$, le vrai angle $N = 9°$, & on trouvera le vrai angle $A = 3°$. Poſons derechef une erreur de 15′ dans la meſure de l'angle N, au-deſſous de ſa juſte valeur, & on trouvera l'angle A de $3 \frac{1}{23}$ degrés, de ſorte que l'erreur ne ſeroit en ce cas que d'environ 3′. Ce dernier exemple nous eſt donc auſſi favorable, que le premier nous a été contraire.

(C) Pour la ſeconde méthode du §. XL, je remarque que le pendule l' doit être un peu plus petit que λ, pendant que le premier pendule l doit être fort petit: par-là l'angle A deviendra d'autant plus petit, & l'angle M plus grand, & une erreur dans l'angle M ſera preſque inſenſible ſur le vrai angle A, au lieu que ſans cette précaution elle pourroit être fort grande. C'eſt ce que je vais encore

éclaircir par ces deux exemples, choisis pour notre dessein.

1°. Soit encore $\lambda = 16$ p. $l = 7$ p. $l' = 8$ p. le vrai angle $M = 1°$, & le vrai angle A sera de $9°$; mais si on avoit pris ce vrai angle M de 15′ trop petit, l'angle A en seroit devenu trop petit de 2° 15′, ce qui seroit encore une erreur beaucoup trop grande.

2°. Mais si on avoit pris $l = 1$ p. $l' = 15$ p. & qu'on suppose le vrai angle M de 14°, (car il sera beaucoup plus grand qu'auparavant) le vrai angle A ne seroit plus que d'un degré, & ensuite une erreur de 15′ dans l'angle M, ne seroit plus qu'une erreur d'environ une minute pour l'angle A.

(γ) Comme l'angle M sera d'autant plus grand que la longueur l est plus petite, & que la longueur l' approche davantage de λ, on pourra rendre cet angle aussi grand qu'on voudra, & par-là on distinguera mieux le moment que les deux pendules se réunissent, & qu'ils auront pris l'un & l'autre la direction verticale, & cette remarque concerne la troisieme méthode du §. XLI. Il ne faut pourtant jamais approcher la longueur d'un pendule de trop près de la longueur λ, parce que nos hypotheses n'étant pas entierement justes, leur défaut deviendroit en ce cas trop sensible.

§. XLIII.

CE que nous avons dit jusqu'ici, nous servira à l'intelligence des manieres que je proposerai tantôt, pour prendre hauteur sur mer quand on ne voit pas l'horison, & qu'on se trouve par-là destitué de tous secours ordinaires : mais il conviendra de faire auparavant quelques remarques sur les pendules dont il faudra se servir. Comme ces pendules ne doivent être susceptibles d'autre

mouvement, que parallelement au plan du quart-de-cercle, ou du demi-cercle, on voit bien que les fils chargés de poids, ne rempliroient pas cette condition, & qu'on doit leur fubftituer des pendules folides, qui ne puiffent tourner qu'autour d'un axe perpendiculaire audit plan, & alors on doit entendre par la longueur du pendule, la diftance entre le centre d'ofcillation & le point d'appui. (§. XIII.)

Il y a deux manieres d'augmenter ces diftances; la premiere eft d'éloigner beaucoup le centre de gravité du point de fufpenfion, & la feconde de l'en approcher beaucoup. Il faut adopter cette feconde maniere, pour ne pas allonger inutilement la verge du pendule, ce qui feroit fujet à plufieurs inconvéniens; on pourra donc rendre les longueurs l, l' & l'' auffi grandes qu'on voudra, avec des verges auffi petites qu'on voudra. On peut auffi diminuer tant qu'on veut lefdites longueurs, fans raccourcir les verges, en jettant prefque toute leur matiere autour de leur centre de gravité, & en les fufpendant près du centre de gravité; ce qui découle du théoreme des balancemens brachiftochrones des corps, qu'on a démontré dans les ....

Les verges qui doivent fervir de pendules, pourront être examinées avant que de les appliquer au demi-cercle, en les faifant balancer, & en comptant le nombre de leurs ofcillations pendant un certain tems, d'où l'on connoîtra fort exactement la diftance de leur centre d'ofcillation au point d'appui.

Comme on peut fe trouver dans des circonftances différentes, qui demandent les longueurs l, l' & l'', & furtout les deux dernieres, tantôt plus petites, tantôt plus grandes, (voyez les notes du §. XLII.) on pourra ajoûter aux verges une piece mobile tout le long de la verge, par le moyen de laquelle on pourra donner telle valeur qu'on

voudra à ces longueurs, après avoir marqué les points où il faudra arrêter cette piece mobile pour cet effet, & ces points pourront être déterminés, ſoit par le calcul, ou par des expériences préalables.

§. XLIV.

IL eſt encore à remarquer, que lorſqu'une des diſtances l, l' ou l'' ſeroit plus grande que λ, l'angle que le pendule feroit avec la verticale, en deviendroit négatif, comme dans la ſeconde Figure; & ſi elle étoit infinie, le pendule reſteroit par lui-même conſtamment dans ſa ſituation verticale; comme les valeurs des angles A, A' & A'', données au §. XXXIX le marquent. Nous obtiendrions par-là immédiatement tout notre but, s'il étoit poſſible de ſe mettre dans le cas; mais on ne peut pas ſans doute avoir des pendules infiniment longs, & il ſeroit inutile de ſuſpendre les pendules par leur centre de gravité, puiſqu'ainſi ſuſpendus, ils ſeroient indifférens à toute ſituation, pendant qu'ils devroient affecter conſtamment leur ſituation verticale. Cette remarque peut pourtant être en quelque façon utile pour une autre vûe, que nous dirons ci-deſſous.

Si l'on faiſoit $l' = 2\lambda - l$, l'angle A' deviendroit négatif, & préciſément égal à l'angle A, de ſorte que les deux pendules l & l' feroient conſtamment un angle égal avec la verticale, & pour avoir cette verticale, il n'y auroit qu'à partager en deux également, l'angle compris entre ces deux pendules: il n'eſt pas difficile d'imaginer une conſtruction qui oblige un rayon de ſe trouver toûjours au milieu des deux pendules, & alors ce rayon ſeroit de lui-même conſtamment vertical. Il eſt vrai que les angles négatifs, qui proviennent en prenant la longueur l' plus

grande que λ, ont beaucoup d'inconvéniens, & fur-tout celui de fe compofer difficilement dans cet état d'harmonie que nous fuppofons; mais il eft bon de ne pas ignorer les reffources que la théorie pure fournit, pour fçavoir bien diriger fes vûes dans ces recherches.

§. XLV.

VOICI à préfent comme on pourroit fatisfaire à nos principes. *AHB* eft un demi-cercle gradué (*Fig. 9.*), mobile, par le moyen d'une genouilliere, en tout fens fur fon centre *C*, qui doit être en même tems fon centre de gravité. *AD* & *BE* font les deux pinnules percées en *F* & *G*, pour laiffer paffer les rayons de l'aftre qu'on veut obferver. Il faut ajoûter au demi-cercle un petit axe perpendiculaire, qui paffe par le centre *C*, & qui doit foûtenir trois regles librement mobiles autour de cet axe; ces trois regles font deftinées à faire l'ufage des trois pendules du §. XXXIX, indiquées par l, l' & l'', & dont par conféquent les centres d'ofcillation doivent avoir les propriétés marquées au §. XLII. J'ai repréfenté ces trois regles par *MN*, *M'N'* & *M''N''*; enfin, je demande qu'il y ait un reffort, auquel, fi l'obfervateur touche, les trois regles s'arrêtent tout auffi-tôt dans la fituation qu'elles auront eue au moment de l'obfervation : après cela on examinera à loifir l'angle *N'CN*, que nous avons appellé *M*, & l'angle *N''CN*, que nous avons nommé *N*, fur quoi la derniere formule du §. XXXIX, donnera l'angle *A* compris entre la regle *NM* & la verticale *CH*, c'eft-à-dire, l'angle *NCH*, & fi on ôte cet angle de l'angle *BCN*, qu'on pourra mefurer, on aura la vraie hauteur de l'aftre *O*. Si les regles *M'N'* & *M''N''* fe trouvoient du côté oppofé, par rapport à la regle *MN*, tous ces angles deviendroient

négatifs, & il faudroit ajoûter l'angle NCH à l'angle NCB, pour avoir la hauteur de l'astre. Au reste, l'Observateur après avoir dirigé le demi-cercle vers l'astre, aura la précaution de ne toucher au ressort qu'au bout d'un certain tems, pour donner aux regles le tems de se mettre dans leurs balancemens réguliers.

§. XLVI.

Si l'on croit connoître la longueur λ avec assez de précision, pour pouvoir mettre en usage la méthode du §. XL, on pourra se passer de la troisieme regle $M''N''$, & simplement observer l'angle $N'CN$, & alors l'angle NCH sera $= \frac{\lambda - l'}{l' - l} \times N'CN$, & la hauteur de l'astre observé sera $BCN \mp \frac{\lambda - l'}{l' - l} \times N'CN$.

§. XLVII.

On pourroit encore profiter du §. XLI, en employant deux Observateurs, dont l'un observeroit le moment que les deux pendules se croisent, & le marqueroit à chaque fois à haute voix, & il ne sera pas difficile à l'autre Observateur, d'observer l'astre précisément dans un de ces instans, pouvant s'y préparer par la succession uniforme de ces momens, & les balancemens du vaisseau se faisant assez lentement. Mais le premier Observateur ne doit pas seulement remarquer le moment que les deux pendules se croisent, il doit encore observer sur le demi-cercle, le point H où ils se croisent, & le second Observateur poursuivra l'astre, non avec le demi-cercle, mais avec une alidade mobile, en prenant garde de ne pas toucher au demi-cercle; on pourroit mettre à l'alidade mobile,

une lunette garnie d'un micrometre, dont les fils seroient de différentes couleurs, & après s'être bien préparé, on observera, sans toucher davantage à l'alidade, le fil qui répondra à chaque fois à l'astre, & quand on auroit observé l'astre deux ou trois fois de suite, à peu près au même fil, & que l'autre Observateur auroit pareillement observé le point *H* à peu près au même endroit, on pourroit compter beaucoup sur cette observation. Cette méthode demande sans doute que les deux Observateurs concertent ensemble la maniere de faire leurs observations, & de s'avertir mutuellement, pendant l'observation, de plusieurs points ; & elle a cet avantage par-dessus les deux premieres, qu'elle n'a pas besoin de ce ressort qui arrête les pendules.

§. XLVIII.

ENFIN les §§. XIII & XLIV nous fournissent une quatrieme maniere de prendre hauteur : elle est fondée sur ce que les corps suspendus par leur centre de gravité, conservent d'eux-mêmes une situation parallele à elle-même. Il est certain qu'une grande masse, librement mobile sur son centre de gravité, ne se détournera pas sensiblement de sa position pendant un tems considérable, de quelque façon qu'elle soit transportée par son centre de gravité : cette considération m'a fait naître une telle idée. On pourroit unir le demi-cercle *AHB*, garni d'une alidade mobile, à une piece fort lourde & pesante, en faisant que le centre de gravité du systême soit précisément en *C*. Supposons que *AB* se trouvât pour un moment dans sa situation horisontale, il est sûr qu'elle ne s'en éloignera pas sensiblement pendant assez long-tems, & que l'Observateur pourroit cependant prendre hauteur à son aise. Je demande donc encore l'aide d'un autre Observateur, qui

dirige continuellement le demi-cercle, de façon que le pendule s'éloigne toûjours également, dans ses balancemens de chaque côté, du point de 90°. J'ose assûrer que cela lui sera fort facile, & qu'il n'aura pas beaucoup à faire pour cela : il pourra aussi, s'il l'aime mieux, employer le secours de deux pendules, & faire qu'ils se croisent au point de 90°. De l'une & de l'autre façon, il pourra être sûr que *A B* aura été constamment dans sa situation horisontale, & rien ne gênera cependant l'autre Observateur, de prendre hauteur tout comme sur terre. Cette méthode sera peut-être la plus facile pour la pratique.

Remarquons enfin que dans toutes ces méthodes, il faut être attentif à retenir le demi-cercle à peu près dans le plan vertical, sur-tout quand la hauteur de l'astre est un peu grande.

§. XLIX.

JE finirai ce Chapitre par une réflexion générale sur ce qu'il renferme. On aura remarqué sans doute, que je n'ai rien avancé avec précipitation, ou sur de légeres apparences. J'avoue que nos méthodes sont encore sujettes à quelques imperfections ; mais je doute si l'on pourra jamais aller beaucoup plus loin, si ce n'est peut-être qu'on pourra perfectionner davantage ce que j'ai dit, & que je n'ai presque fait qu'indiquer. J'ai tâché de mettre à profit toutes les circonstances favorables, & cela en suivant toûjours les principes incontestables de méchanique, qui m'ont fait reconnoître en même tems, combien étoient trompeuses les premieres apparences de quelques autres manieres, que je m'étois imaginées autrefois. Mais si d'un côté un amour sincere de la vérité m'empêche de parler avec trop de prédilection de nos manieres de prendre hauteur sur mer, quand on ne voit pas l'horison, je me flatte

flate d'un autre côté, qu'on ne leur voudra rien ôter de ce qu'elles ont de réel & bien fondé. Elles soûtiendront l'examen le plus rigoureux de la théorie, & tout leur succès dans l'exécution, dépendra particulierement de cette question : Si on ne se trouve pas souvent dans le cas que le vaisseau balance presque régulierement & uniformément, pendant quelque petit intervalle de tems. Les raisons que j'ai alléguées au premier Chapitre, jointes à l'expérience que j'en ai faite moi-même, doivent nous engager à regarder cette hypothese avec quelque complaisance ; & plus on se trouvera dans le cas, plus j'aurai de confiance à recommander nos méthodes, sur-tout si les agitations du vaisseau sont en même-tems peu sensibles. Je suis sûr même que souvent les circonstances seront si favorables, que ces manieres de prendre hauteur pourront être préférées dans le jour, aux manieres ordinaires, puisqu'enfin le secours de l'horison visible souffre plusieurs inconvéniens. Dans un calme parfait, nos méthodes seroient absolument les mêmes que par terre, pendant qu'on ne s'avisera jamais sur terre, de prendre pour la vraie horisontale la ligne qui rase la surface de la mer, sans parler de plusieurs autres défauts de l'Arbalête, & même du Quartier Anglois employés à cet usage.



CHAPITRE IV.

Contenant les Considérations Astronomiques nécessaires à notre sujet.

§. L.

JE ne m'arrêterai pas ici aux premiers préliminaires; on sçait que toute la question dépend de la maniere de déterminer le passage d'un *astre connu* quelconque, au méridien du lieu où l'on se trouve; il faut donc que l'on connoisse la position de l'astre qu'on veut observer, & c'est en quoi notre sujet differe de celui que l'Académie a proposé pour l'année 1729: car on peut trouver la hauteur du pole, que l'on demandoit alors, moyennant un astre dont on ignore entierement la position, en observant trois fois sa hauteur verticale avec les deux intervalles de tems, d'où on peut déduire la hauteur du pole, la déclinaison de l'astre, & le moment de son passage au méridien, comme j'ai démontré dans le IV vol. des Mémoires de Petersbourg, *pag.* 89. quoiqu'un sçavant Géometre crût ce Problème indéterminé; ainsi cette condition ne restreint pas notre présent Problème plus qu'il ne faut: il faudra toûjours supposer, que l'astre qu'on veut observer, le Soleil & le pole, fassent un triangle entierement connu; après quoi nous aurons deux cas à considérer: le premier est de supposer la hauteur du pole connue, & le second, de traiter cette hauteur comme entierement inconnue.

§. LI.

IL est facile de voir, qu'en supposant l'élévation du

pole donnée, on n'a qu'à obſerver une ſeule fois la hauteur d'un aſtre connu, pour en déterminer l'heure ; car l'arc du méridien, depuis le Zénith juſqu'au Pole, ſera donné, puiſque c'eſt le complément de l'élévation du Pole ; l'arc vertical, depuis le Zénith juſqu'à l'aſtre, ſera pareillement connu par l'obſervation ; & enfin l'arc compris entre le pole & l'aſtre, eſt donné par la déclinaiſon de l'aſtre connue ; les trois arcs forment donc un triangle connu, & on y trouvera par la Trigonométrie ſphérique, l'angle au pole, qui meſure le tems qu'il faut à l'aſtre pour arriver juſqu'au méridien.

On ne ſçauroit douter que ce ne ſoit ici la meilleure méthode Aſtronomique, & la plus ſimple ; car on n'a pas toûjours le tems de prendre de bonnes hauteurs correſpondantes, & d'ailleurs celles-ci n'ont aucun autre avantage ici, que celui d'abréger le calcul, qu'on doit compter pour rien, quand il s'agit de perfectionner les Arts & les Sciences : au reſte, elle eſt trop facile pour qu'elle ait pû échapper aux Aſtronomes : mais je ne ſçache pas qu'on ait examiné de même ce qu'il faut faire, pour mettre cette méthode dans ſa plus grande perfection ; il ne m'eſt donc pas permis de me diſpenſer de cette recherche.

§. LII.

LE grand but doit être ici, qu'une même erreur commiſe dans l'obſervation, influe le moins ſur l'heure cherchée. Or il eſt évident que pour cet effet, il faut choiſir de tous les aſtres qu'on peut obſerver, celui qui demande le moins de tems pour s'élever ou ſe baiſſer d'un petit arc vertical donné, à moins qu'il n'y ait d'autres inconvéniens de plus grande conſéquence. Suppoſons premierement un aſtre dont on veuille prendre la hauteur, & examinons

dans quel point de ſon parallele il doit ſe trouver, pour être dans ſa ſituation la plus avantageuſe. Pour cet effet, ſoit le ſinus total $=1$, le ſinus de l'élévation du pole $=s$, & le ſinus de la déclinaiſon de l'aſtre $=t$, & qu'il s'agiſſe de déterminer la hauteur verticale de l'aſtre, telle que le moment de l'obſervation ſoit le plus favorable; je dis qu'il faut ici diſtinguer deux cas.

Le *premier cas* eſt quand s eſt plus petit que t, & dans ce cas, il faut que l'aſtre ſe trouve au point où le vertical touche le parallele, c'eſt-à-dire, dans le point où l'angle compris entre le vertical, qui paſſe par l'aſtre & l'arc tiré du pole à l'aſtre, ſoit un angle droit, & un tel point exiſte toûjours dans le cas préſent, & le calcul m'a fait voir, que l'aſtre ſe trouve audit point, lorſque le ſinus de la hauteur de l'aſtre eſt $=\frac{s}{t}$. Le Théorème enſeigne le moment qu'il faut attendre pour obſerver un aſtre donné, ou quel eſt de tous les aſtres d'une même déclinaiſon, celui qu'il faut obſerver dans un tems donné. Il nous fait voir auſſi, que les aſtres qui ſe trouvent du même côté avec le pole, doivent être préférés aux aſtres qui ſont dans l'hémiſphere oppoſé, ceux-ci ne nous permettant pas de profiter de cet avantage; & la regle nous dit alors ſimplement, qu'il faut obſerver l'aſtre le plus près de l'horiſon que l'on peut. Soit, par exemple, l'élévation du pole de 30°, la déclinaiſon de l'aſtre de 45°, on aura $\frac{s}{t}=\sqrt{\frac{1}{2}}$, qui marque qu'il faudroit obſerver la hauteur de cet aſtre, lorſqu'elle eſt à peu près de 45°; ou s'il y avoit pluſieurs aſtres de la même déclinaiſon, & qu'on voulût faire l'obſervation ſur le champ, il faudroit choiſir celui qui approche davantage de cette hauteur.

Le *ſecond cas* eſt celui qui fait s plus grand que t; il n'y a alors aucun vertical qui touche la parallele de l'aſtre, &

il faut recourir à la méthode des plus grands & des plus petits, en exprimant analytiquement l'angle compris entre le vertical tiré à l'aſtre, & l'arc tiré du pole à l'aſtre, & en faiſant que cet angle ſoit le plus grand qu'il eſt poſſible. En ſatisfaiſant à cette condition, j'ai trouvé qu'il faut que le ſinus de la hauteur de l'aſtre ſoit $= \frac{t}{s}$. Si donc l'élévation du pole étoit, par exemple, de 45°, & la déclinaiſon de l'aſtre de 30° du côté du pole, on trouveroit encore $\frac{t}{s} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, & il faudroit derechef attendre que la hauteur de l'aſtre fût d'environ 45° pour l'obſerver, ou choiſir de tous les aſtres de la même déclinaiſon, celui qui approcheroit davantage de cette hauteur, ſi on ne vouloit pas différer l'obſervation.

Les Théorèmes que je viens de donner ſont ſouvent de grande conſéquence, & les obſervations de jour, à faire ſur le Soleil, demandent la même attention. On peut bien avoir quelques raiſons pour ne les pas ſuivre ponctuellement : mais il ne faudra jamais s'en éloigner beaucoup. Si on vouloit prendre la hauteur d'un aſtre qui ſeroit près du méridien, dans la vûe de trouver l'heure, la moindre erreur dans l'obſervation, jetteroit une erreur énorme ſur l'heure. Les Théorèmes ſont même utiles ſur terre, pour prendre à propos les hauteurs correſpondantes du Soleil, ou d'un autre aſtre, autant que les réfractions permettent d'y être attentif. En examinant les obſervations qui ſont rapportées par M. le Monnier, dans ſon Hiſtoire céleſte, Ouvrage que le Public ne ſçaura jamais reconnoître autant qu'il le mérite, j'ai remarqué qu'on n'a pas toûjours aſſez bien choiſi le tems de prendre ces hauteurs correſpondantes, pour régler la pendule, ni celles des étoiles, dont on vouloit déterminer l'aſcenſion droite. J'avoue que ces remarques ſont de fort petite

conséquence à l'égard des observations sur terre, à cause de la grande précision des observations : mais il me semble aussi que la grande perfection de l'Astronomie, de laquelle nous sommes redevables aux auspices de l'Académie, ne doit plus nous permettre de négliger le moindre avantage.

§. LIII.

NOUS venons de déterminer le point du parallele donné le plus avantageux : il reste à déterminer quel est le parallele le plus utile pour l'exactitude de l'observation principale. Je dis donc à cet égard, & la chose est facile à voir, que tout le reste étant égal, il faut choisir de tous les astres, celui qui a la moindre déclinaison, & un tel astre doit toûjours être observé le plus près de l'horison qu'il est possible : l'incertitude des réfractions est à la vérité un obstacle à cette regle ; mais il faudroit sur mer, se trouver dans des circonstances extrèmement favorables, pour porter quelque attention à cet inconvénient. Supposé cependant qu'on ne veuille, ou qu'on ne puisse observer aucun astre au-dessous d'une certaine hauteur, dont le sinus soit $= q$, je dis que la déclinaison la plus utile aura pour son sinus sq; si donc l'élévation du pole étoit de 30°, & qu'on prenne pour q le sinus de 10°, la déclinaison la plus utile seroit de 4° 59′ du côté du pole.

On peut remarquer encore, qu'il faudra éviter les astres, qui, dans leur culmination, passent près du Zénith, ou dont la déclinaison est à peu près égale à la hauteur du pole, parce que ces astres devroient être observés, selon nos regles, près du Zénith, & que ces observations sont incommodes, & plus incertaines sur mer.

§. LIV.

EXAMINONS à préſent quelle ſera la meilleure maniere de trouver l'heure, en ſuppoſant la hauteur du pole inconnue. Le ſecours des hauteurs correſpondantes eſt excellent ſur terre, mais il ne l'eſt pas toûjours ſur mer, où l'on doit profiter quelquefois d'un moment de beau tems; d'autres fois on ſe trouvera trop près de l'aube du jour, pour pouvoir exécuter cette méthode avec tant ſoit peu de ſuccès pendant la nuit : j'en parlerai cependant en ſon lieu. Voici donc deux autres méthodes plus générales, dont la premiere renfermera celle des hauteurs correſpondantes, comme un cas particulier. La *premiere méthode* eſt de prendre deux fois la hauteur d'un même aſtre, en remarquant auſſi l'intervalle de tems d'une obſervation à l'autre. La *ſeconde méthode* conſiſte à prendre la hauteur de deux aſtres différens, ſoit en même tems, ſoit ſucceſſivement l'une après l'autre, en obſervant encore l'intervalle de tems.

§. LV.

VOICI le calcul pour la premiere méthode. Soit *HZH* le Méridien (*Fig.* 10.); *Z* le Zénith; *P* le Pole; *HH* l'horiſon; *a* la poſition de l'aſtre à la premiere obſervation; *b* ſa poſition à la ſeconde obſervation : qu'on tire au pole les arcs *a P* & *b P*, comme auſſi les arcs verticaux *Z a d* & *Z b c*; il y aura de connu l'arc *a P* ou *b P*, qui fait le complément de la déclinaiſon de l'aſtre; enſuite l'angle *a P b*, qui fait l'angle horaire d'une obſervation à l'autre; & enfin les arcs *Z a* & *Z b*, qui ſont les complémens des hauteurs de l'aſtre obſervées : qu'on joigne les points *a* & *b* par l'arc de grand cercle *a b*, qui ſe trouvera comme faiſant

la base du triangle aPb, duquel on connoîtra les deux côtés égaux avec l'angle intercepté; de-là on connoîtra aussi tout le triangle aZb: dans ces deux triangles connus, on cherchera l'angle Pba, & l'angle Zba, dont la différence donnera l'angle ZbP. On connoîtra donc dans le triangle ZbP, les deux côtés Zb & Pb, avec l'angle intercepté ZbP, & ainsi on pourra calculer l'angle ZPb, qui fait l'angle horaire cherché entre la seconde observation, & le moment du passage de l'astre par le méridien. Si l'on cherche aussi le côté ZP, on en connoîtra en même tems le complément de l'élévation du pole.

§. LVI.

J'AJOUTERAI ici les remarques les plus essentielles qu'on peut faire, sur cette maniere de trouver l'heure.

(*a*) Il faut toûjours faire les deux observations fort éloignées l'une de l'autre, & si les circonstances ne permettoient pas d'accorder pour le moins une heure d'intervalle entre les deux observations, il vaudroit mieux sur mer, suivre la méthode du §. LI, sur une simple estime de la hauteur du pole, qu'on connoît toûjours à peu près.

(*b*) Comme la premiere observation sert proprement à déterminer l'heure, & la seconde à déterminer la hauteur du pole, on pourra faire l'une des observations, lorsque l'astre se trouve à peu près dans cette situation, que nous avons déterminée au §. LII, & la seconde, lorsque l'astre est près du méridien: cette seconde observation déterminera immédiatement la hauteur du pole, à cause de la déclinaison donnée de l'astre, après quoi la premiere observation donnera l'heure encore, par la méthode du §. LI; on abrégera par-là le calcul. Si depuis la premiere observation

obſervation juſqu'à la ſeconde, le vaiſſeau avoit fait beaucoup de chemin en latitude, il faut en faire l'eſtime, & réduire la hauteur du pole de la ſeconde obſervation, à celle qui répondroit à la premiere.

(*c*) Quand on a tout le loiſir d'obſerver l'aſtre des deux côtés du méridien, ſous un grand intervalle de tems, on pourra encore éviter toute la peine du calcul, en ſuivant la méthode des hauteurs correſpondantes, qui eſt compriſe dans cette méthode générale. On pourra encore avoir beſoin ici d'une petite correction, par rapport au chemin du vaiſſeau, depuis la premiere juſqu'à la derniere obſervation, tant en longitude qu'en latitude. Cette correction ſe fera, en ſuppoſant que le moment de la culmination de l'aſtre réponde à l'endroit où le vaiſſeau ſe ſera trouvé au milieu entre les deux obſervations; c'eſt-à-dire, que le méridien trouvé par la regle, ne ſera pas pour l'un des deux endroits où l'on aura fait l'obſervation, mais pour le milieu de ces deux endroits.

§. LVII.

La méthode précédente ſervira particulierement pour les obſervations de jour, où on ne voit que le Soleil, & où on ignore en même tems la hauteur du pole: mais pour les obſervations de nuit, on ſera preſque toûjours dans des circonſtances à pouvoir ſuivre la ſeconde méthode du §. LIV; & par-là on évitera l'inconvénient de ce grand intervalle de tems entre les deux obſervations, néceſſaire à la méthode précédente.

Suppoſons qu'on ait pris la hauteur de deux différens aſtres en même tems, le calcul pour en trouver l'heure, ſera entierement le même que celui du §. LV. Car, ſuppoſé l'un des aſtres en *a*, l'autre en *b* dans la même Figure,

expliquée audit §. LV, alors *a b* marquera la diftance des deux aftres connus, qu'on peut calculer par leur pofition en longitude & en latitude, marquées l'une & l'autre dans les Tables; *Pa* & *Pb* feront les complémens de leurs déclinaifons données, quoiqu'inégales ; *Z a* & *Z b* font les complémens de leurs hauteurs obfervées. On connoît donc encore entierement les triangles *aPb* & *aZb*, & on trouvera l'angle *ZbP*, en prenant la différence des angles *P b a* & *Z b a*, après quoi on connoît tout le triangle *Z P b*, & par conféquent l'angle *Z P b*, qui détermine le moment du paffage de l'aftre *b* par le méridien.

§. LVIII.

COMME il eft cependant impoffible de prendre deux hauteurs en même tems, on pourra les prendre immédiatement l'une après l'autre, & un petit intervalle de tems ne peut être de conféquence dans les obfervations fur mer, fi fujettes à un grand nombre d'imperfections : fi cependant on veut, ou fi on croit y devoir faire attention, il faudra obferver l'intervalle de tems de la premiere obfervation à la feconde, & puis faire le calcul comme il fuit.

Suppofons qu'à la premiere obfervation on ait obfervé l'aftre en *a*, & qu'au même moment l'autre aftre fe foit trouvé en *b* : confidérons enfuite, que du moment de la premiere obfervation jufqu'à la feconde, l'aftre foit venu de *b* en ϐ, & tirons les arcs ϐ *P*, ϐ *Z* & ϐ *a*, l'angle ϐ *P b* fera donné par l'intervalle de tems obfervé ; qu'on ajoûte cet angle à l'angle *b P a*, qui eft toûjours connu par la pofition mutuelle de deux aftres, & la fomme marquera l'angle ϐ *P a* ; de-là on pourra calculer le côté ϐ *a*, & enfuite l'angle cherché ϐ *P Z*, tout comme dans le précédent article.

§. LIX.

POUR bien choiſir les deux aſtres, on pourra faire le même raiſonnement que nous avons fait dans la note (*b*) du §. LVI. On choiſira l'aſtre *a*, qui contribue le plus à déterminer l'heure, conformément aux regles des §§. LII & LIII, & l'autre aſtre *b*, qui doit ſervir particulierement à trouver la hauteur du pole près du méridien, ſans ſe mettre beaucoup en peine de ſa déclinaiſon. Ce ſont là les poſitions les plus avantageuſes.

Si l'aſtre *b* a été obſervé aſſez près du méridien, pour que ſa hauteur obſervée ne puiſſe pas différer ſenſiblement de ſa vraie hauteur méridienne, elle déterminera par ſa déclinaiſon donnée immédiatement, la hauteur du pole, & nous mettra en état de calculer le paſſage de l'aſtre *a* au méridien, par le calcul fort ſimple du §. LI: mais hors de ce cas, il faudra faire le calcul comme nous avons dit au §. LVII, ſi les deux obſervations ont été priſes fort près l'une de l'autre; ou conformément au §. LVIII, ſi les deux obſervations ont été éloignées.

Cette méthode a ce grand avantage ſur la précédente, qu'un moment de beau tems ſuffit pour la pratiquer: on ne craint ici ni les nuages, ni un trop promt retour du jour; elle ne demande non plus cette correction toûjours douteuſe, que demande le chemin que le vaiſſeau a fait d'une obſervation à l'autre.

§. LX.

VOILA nos méthodes générales de déterminer le moment du paſſage d'un aſtre au méridien, qui, par le moyen des Tables des aſcenſions droites, fera connoître

le paſſage du Soleil au méridien, & par conſéquent l'heure cherchée. On n'a qu'à faire toutes les combinaiſons des conditions, qui font de notre ſujet un Problème déterminé, & qu'à connoître très-ſuperficiellement la nature des obſervations Aſtronomiques qu'on peut faire ſur mer avec quelque ſuccès, pour être perſuadé d'abord que nos méthodes de trouver l'heure ſur mer, ſont les meilleures qu'on puiſſe donner dans l'Aſtronomie, & cela tant relativement aux autres, que par rapport à elles-mêmes. Il ſeroit facile d'en imaginer un grand nombre d'autres, mais ce ſeroit s'alembiquer inutilement l'eſprit. J'en dirai cependant encore une, qui me paroît pouvoir mériter quelque attention particuliere.

§. LXI.

VOICI cette derniere méthode, pour le cas où la hauteur du pole eſt connue. Elle conſiſte ſimplement à attendre & obſerver le moment, que deux aſtres connus quelconques ſe trouvent dans un même vertical; après quoi on fera le calcul comme il ſuit.

Soit P le pole; (*Fig.* 11.) Z le zénith; HH l'horiſon; Zc le vertical qui paſſe par les deux aſtres a & b, & qu'on tire les arcs aP & bP; on cherchera d'abord dans le triangle connu aPb, l'angle abP, dont le complément à deux droits donnera enſuite l'angle ZbP, qui déterminera le triangle ZbP, de ſorte qu'on y pourra trouver l'angle cherché bPZ.

Si la hauteur du pole n'étoit pas connue, on pourroit faire une pareille obſervation ſur deux autres aſtres, en remarquant auſſi l'intervalle de tems entre les deux obſervations: car on en peut encore déduire le paſſage de l'un des aſtres par le méridien, & cela par la ſimple réſolution

de plusieurs triangles, ce que je me contenterai d'avoir simplement indiqué, pour n'être pas trop prolixe ; je ne dirai rien non plus, par la même raison, sur le choix des astres, qu'il faudroit faire, quoique très-essentiel à cette méthode. Mon but principal, n'est ici que de faire voir, que sans connoître immédiatement aucune hauteur, on peut trouver l'heure & même l'élevation du pole, uniquement par le passage de deux astres à un même vertical; je dis sans connoître *immédiatement* aucune hauteur, parce que les hauteurs des astres observés, peuvent se déterminer par le calcul. Voilà donc en même tems une maniere de prendre hauteur sans aucun instrument gradué, sans connoître aucun angle, & par le seul secours de la direction verticale, quoique cette direction ne soit connue que par des momens interrompus. Ces sortes de méthodes particulieres méritent donc d'autant plus d'attention, que par nos méthodes exposées au troisieme Chapitre, on peut à chaque balancement du vaisseau, reconnoître la situation verticale des regles MN & $M'N'$. Le §. XLVIII nous fournit même une maniere facile & assez exacte de conserver la direction AB (*Fig.* 9.) constamment dans sa direction horisontale, de sorte que si on y ajoûte une regle immobile perpendiculaire, celle-ci conservera constamment sa direction verticale. Je suis sûr même que dans les tourmentes violentes, on pourroit trouver l'heure à peu près, sur la simple estime du passage de deux astres à un même vertical; l'homme se formant une habitude naturelle à reconnoître la position verticale avec une grande exactitude, qui sera même surprenante & incroyable, dans ceux qui s'y seront habitués & perfectionnés; & si l'on vouloit faire estimer par un grand nombre de personnes ainsi habituées, le moment d'un tel passage, & puis prendre l'estime moyenne, en rejettant les estimes manifestement

fausses, elle ne pourroit manquer d'être fort juste, n'y ayant absolument point de raison pourquoi on devroit se tromper, plutôt d'un côté que d'un autre.

§. LXII.

JE ne sçais si les méthodes que je viens de donner sont toutes nouvelles : si d'autres les ont remarquées & décrites avant moi, comme cela se peut très-facilement, je n'aurois pas manqué de les citer, si je l'avois sçu. Mon intention n'a pas tant été de donner de nouvelles méthodes, que d'exposer les meilleures.

Je ne dirai rien d'un grand nombre de réductions & de corrections qu'il faut faire, tant par terre que sur mer : elles sont connues de tous les Astronomes, & devroient l'être de tous les bons Pilotes. Toutes les questions Astronomiques dépendent absolument les unes des autres, & on ne sçauroit bien traiter l'une, sans un examen exact de toutes les autres. On m'excusera donc, si je n'entre pas dans un plus grand détail, puisque pour le faire, il faudroit tout un cours tant d'Astronomie, que de Navigation. S'il m'étoit cependant arrivé d'omettre quelques éclaircissemens essentiels, je tâcherai d'y suppléer, si on vouloit bien me faire l'honneur de me les demander. C'est dans cette vûe que j'ajoûterai mon nom dans un billet cacheté, qu'on pourra ouvrir à tout évenement, si on le trouve à propos.



Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 8

Fig. 9.

Fig. 10.

Fig. 11.



SUITE DES RECHERCHES MECHANIQUES ET ASTRONOMIQUES, &c.

MARQUÉES PAR LA DEVISE

Et quandoque Olitor fuit opportuna locutus.

Qui tend principalement à fournir aux Navigateurs les moyens Méchaniques les plus sûrs pour faire en mer, malgré l'agitation du vaisseau, les observations dont on peut conclurre l'heure.

Est aliquà prodire tenùs, si non datur ultra.

---

§. 1. LA recherche des moyens les plus sûrs pour faire en mer, malgré l'agitation du vaisseau, les observations Astronomiques, m'a toûjours paru des plus intéressantes pour la Navigation. J'en ai fait l'objet de mes méditations déja depuis l'année 1728, que l'Académie avoit proposé pour sujet : *Quelle est la meilleure méthode d'observer les hauteurs sur mer, par le Soleil, & par les Etoiles, soit par des Instrumens déja connus, soit par des Instrumens de nouvelle invention*, sur lequel j'ai eu l'honneur d'envoyer à l'Académie un Discours, qui portoit la même devise que j'ai prise il y a deux ans. Je croyois alors que les fluides dans des tuyaux communicans, conserveroient mieux le niveau, qu'un fil chargé d'un poids ne

conserve sa situation verticale : mais je n'avois pas assez examiné cette idée ; & y ayant renoncé bien-tôt après, j'ai souvent pensé depuis, pour ma propre satisfaction, à d'autres moyens plus sûrs & plus exacts, de pouvoir faire en mer les observations Astronomiques, mais toûjours sans aucun succès, jusqu'à ce qu'animé par le sujet proposé par l'Académie pour l'année 1745, je me suis appliqué de nouveau à cette matiere, ne désespérant pas d'imaginer enfin quelque expédient, d'autant que je m'étois exercé avec toute l'application possible, à connoître les loix méchaniques qui m'y pouvoient conduire. Ces efforts réitérés m'ont enfin mené aux expédiens que j'ai exposés au long, dans les recherches que j'ai eu l'honneur d'envoyer à l'Académie il y a deux ans. Les trois quarts de ces recherches ne tendent qu'à cette fin, que je prévoyois bien devoir être principalement celle de l'Académie, puisque les théories Astronomiques sont assez connues. Depuis ce tems, j'ai toûjours été, je l'avoue, fort satisfait des principes, sur lesquels sont fondés les moyens que je propose. J'ose dire plus, & je l'ose dire avec confiance, que ces principes sont les seuls qu'on puisse mettre à profit pour notre sujet ; mais j'avoue aussi que j'ai été moins content de l'usage que j'en ai fait. Si quelque autre a suivi la même route, il peut avoir proposé de meilleurs moyens pour faire ces observations la nuit, quand on ne voit pas l'horison ; sinon il n'aura rien fait du tout, & se sera laissé tromper par de fausses apparences, comme cela m'est arrivé autrefois. J'ai fait ces mêmes réflexions au §. XLIX de mes recherches. N'étant donc pas persuadé qu'il fût impossible de faire une application plus heureuse de nos principes, je n'ai cessé d'y penser, même après avoir déja envoyé à Paris ma piece, quoique je ne crusse pas alors qu'un plus grand succès pût m'être de quelque utilité

utilité auprès de l'Académie, n'ayant plus pour but que l'avancement des Sciences & des Arts, si j'étois assez heureux d'y pouvoir contribuer. Il m'a paru que ces derniers efforts n'avoient pas été tout-à-fait sans succès, & j'en ai eu d'autant plus de plaisir, d'apprendre le jugement de l'Académie sur le prix de 1745, qui me met à même de soumettre encore mes nouvelles idées à ses lumieres. Je me propose donc de mettre mes principes & leur nécessité dans un plus grand jour; de faire quelques remarques sur l'application que j'en ai faite, & d'exposer surtout, les nouvelles idées que je me suis formées. Tout cela sera une espece de Commentaire de ma premiere Dissertation, que je prie par conséquent le Lecteur d'honorer de son attention, avant que de commencer la lecture de ces additions.

§. 2. Il est évident que pour faire les observations la nuit, quand on ne voit pas l'horison, il faut nécessairement avoir recours aux mêmes instrumens qu'on emploie sur terre. Car ni l'Arbalête, ni le Quartier Anglois, ne peuvent être en ce cas d'aucun usage. Tous ces instrumens sont destinés à la mesure de certains angles que les astres font, soit rélativement au ciel, soit rélativement à l'horison de la terre; & ces derniers, qui sont toûjours requis pour pouvoir trouver l'heure, demandent tous qu'on connoisse la direction horisontale. Le seul principe pour connoître cette direction, est l'action de la pesanteur, toûjours perpendiculaire à l'horison: mais l'action de la pesanteur est continuellement troublée & dérangée par l'agitation du vaisseau; & c'est à cet inconvénient qu'il faut tâcher de remédier. Voilà un Problème bien vague; on ne sçait par où commencer. On se formera mille idées, & après les avoir examinées chacune à part, on les rejettera toutes l'une après l'autre. J'ai donc d'abord tâché de

couper le chemin à toutes les tentatives inutiles, & voici comme je m'y suis pris.

§. 3. Tout ce qui est affermi au vaisseau fait les mêmes mouvemens angulaires, & ne sçauroit servir à donner une certaine direction : la pesanteur alors n'agit en rien, & le corps est simplement emporté par l'agitation du vaisseau ; il faut donc laisser au corps une certaine liberté de recevoir & de suivre l'impression de la pesanteur. Pour recevoir entierement l'impression de la pesanteur, il n'y a qu'un moyen, sçavoir de le détacher du vaisseau, & de le laisser tomber : mais la vitesse initiale & incertaine, que l'agitation du vaisseau auroit donnée au corps au premier moment qu'on l'eût détaché, lui feroit décrire une parabole indéterminée, de laquelle on ne pourroit rien conclurre pour la direction verticale. Il est vrai que si l'agitation du vaisseau pouvoit être censée uniforme pour un petit intervalle de tems, la route parabolique du corps tombant, ne laisseroit pas de faire une ligne droite verticale, par rapport aux objets unis au vaisseau ; & la considération de ce principe m'a fait penser qu'on pourroit ajoûter au quart-de-cercle, une clepsidre à mercure, dont le filet serviroit à mettre le quart-de-cercle à chaque moment dans sa juste situation, ou à en connnoître l'inclinaison. J'ai même examiné quelles précautions on pourroit prendre pour tirer le plus grand avantage de ce moyen, & je suis sûr qu'on pourroit perfectionner assez cette méthode, pour rendre les erreurs fort peu sensibles : mais j'ai meilleure opinion des methodes que j'ai déja données dans le troisieme Chapitre de mes Recherches, & beaucoup meilleure encore de celle que je donnnerai ci-dessous. Cela m'a engagé à abandonner ce principe, de connoître la direction horisontale en mer pendant la nuit. Il faut donc dès-lors, que le corps qui doit concourir

à déterminer une certaine direction tienne au vaiſſeau, & y tienne avec une certaine liberté de recevoir & de ſuivre l'impreſſion de la peſanteur en partie : mais tout corps qui tient au vaiſſeau, de quelque façon que ce ſoit, doit être emporté par le vaiſſeau ; & comme il lui reſte une certaine liberté de ſe mouvoir, les parties du ſyſtème auront une inertie relativement à ce mouvement ; cette inertie ſe joint à l'action de la peſanteur, & la force réſultante eſt tout-à-fait variable & incertaine, s'écartant de la direction verticale tantôt plus, tantôt moins.

§. 4. On voit aiſément par ce que je viens de dire, que ſi on veut conſidérer les agitations du vaiſſeau comme tout-à-fait irrégulieres, & irrégulieres en tout ſens, qui ne ſoient abſolument aſſujetties à aucune loi, il faut renoncer à toute eſpérance de pouvoir faire en mer les obſervations avec une certaine exactitude, ſans le ſecours de l'horiſon viſible. Comment prétendroit-on faire les obſervations ſur terre, ſi la peſanteur changeoit continuellement de force & de direction, ſans obſerver aucune loi dans ſes variations ? C'eſt cependant là le cas où l'on ſe trouveroit ſur mer. Ces réflexions ſerviront de pierre de touche, pour juger de toutes les méthodes qu'une imagination trop fertile pourroit ſuggérer, & qui, examinées ſelon les vraies loix de la méchanique, pourront toûjours être démontrées fauſſes, avec la même facilité qu'on pourra toûjours démontrer la fauſſeté d'un mouvement perpétuel purement méchanique, qui ſouvent ne laiſſe pas d'avoir quelque apparence de réalité. Je dis donc qu'en ce cas, il faudroit recourir à l'Arbalête, ou au Quartier Anglois, & ſi la nuit éroit obſcure, tâcher de rendre l'horiſon viſible, ce qu'on pourroit faire par pluſieurs moyens.

§. 5. Je crois donc avoir démontré la néceſſité abſolue

de chercher quelque circonſtance dans les agitations d'un vaiſſeau, qui permette de déterminer la direction de la peſanteur, & d'en ſéparer l'effet d'avec celui de l'inertie des corps; & par un bonheur admirable, une telle circonſtance ſe trouve dans les agitations du vaiſſeau, puiſque j'ai démontré que deux ou trois balancemens de ſuite, qui puiſſent être cenſés égaux, ſuffiſent pour déterminer la direction verticale. Une condition ſi ſimple, & en même tems ſi conforme à la nature, auroit ſurpaſſé infiniment toute mon attente, ſi le haſard ne m'avoit conduit auparavant à rechercher la nature des balancemens harmonieux des parties différentes d'un ſyſtème, qui fait un des plus importans ſujets que je connoiſſe dans la Méchanique, & ſur-tout dans la Phyſique.

§. 6. Puiſque c'eſt-là le ſeul principe utile que la théorie admette, & que rien n'eſt faiſable dans la pratique, qui ſoit démenti par une bonne théorie, nous ſommes réduits à tourner toute notre attention du côté de ce principe, pour voir de quelle utilité il peut être dans la pratique. Cet examen ſe réduit à deux points, qui ſont la réalité du principe dans les agitations du vaiſſeau, & la conſtruction d'une machine fondée ſur ce principe, s'il eſt trouvé juſte.

§. 7. Si la mer étoit unie, & qu'on eût imprimé au vaiſſeau quelque balancement, on conviendra avec moi, que le vaiſſeau ne manqueroit pas de continuer de lui-même ſes balancemens pendant un tems conſidérable, & que ces balancemens ne diminueroient que peu à peu, & même inſenſiblement, à cauſe de la maſſe énorme du vaiſſeau. Si au contraire le vaiſſeau eſt ſuppoſé entierement en repos dans une mer agitée, il ne ſera balancé que peu à peu, & il lui faudra un tems conſidérable pour être agité dans toute ſa force. Une ſeule lame peut bien élever le

vaiſſeau, mais non pas le faire rouler ou tanguer dans toute ſa force, ni lui faire changer bruſquement ſes roulis ou tangages, qui lui ſeront déja imprimés, & il n'eſt queſtion ici que de ces deux mouvemens. L'action ſucceſſive des lames de la mer, ne fait qu'entretenir les agitations du vaiſſeau, & en prévenir les diminutions, tout comme dans une horloge chaque coup de dent dans la roue de rencontre, ne produit pas tout le balancement du pendule, mais ne fait que prévenir une diminution inſenſible, qu'il ſouffriroit ſans cela. Cette raiſon me paroît ſuffiſante, pour dire que les balancemens d'un vaiſſeau ſont naturellement tels que nous les ſuppoſons, & qu'il faut un grand concours de cauſes accidentelles, pour que les balancemens qui ſe ſuivent immédiatement, ſoient fort différens entre eux. J'ai vû des lames ſe briſer contre le vaiſſeau, ſans que ſes roulis en fuſſent changés conſidérablement; j'ai vû auſſi tous les branles & autres choſes ſuſpendues ſous le pont, faire leurs allées & venues avec beaucoup d'harmonie, au lieu qu'elles auroient été jettées, l'une d'un côté, l'autre d'un autre, ſi les agitations du vaiſſeau étoient toûjours tout-à-fait irrégulieres. Ceux-là même qui n'auront vû que de deſſus les côtes les vaiſſeaux balancer, conviendront de notre principe, autant confirmé par toutes ſortes d'expériences, qu'il eſt fondé ſur la raiſon. Cependant je demande ſimplement qu'on ſuppoſe arriver quelquefois, & ſi l'on veut par haſard, ce qui doit arriver preſque toûjours, & par un méchaniſme naturel : car deux ou trois balancemens de ſuite, pleins & égaux, qu'on reconnoît facilement, & que l'Obſervateur peut toûjours mettre à profit, ſuffiſent pour notre deſſein, & feront le même effet que s'il y en avoit eu mille; & ces deux ou trois balancemens pourroient être encore aſſez inégaux, ſans que cette inégalité causât une erreur

confidérable dans l'obfervation à faire. Je conclus donc qu'on peut admettre, fans le moindre fcrupule, le principe en queftion, pour l'ufage que je me propofe d'en faire.

§. 8. Après avoir fi bien établi, tant dans ces Additions, que principalement dans ma premiere Differtation, la réalité du principe qui doit faire la bafe de toutes les machines, dont on peut encore efpérer quelque fuccès; je ne dois pas douter que l'Académie n'accorde fon approbation aux recherches que j'ai faites dans la premiere partie de ma Differtation, qui contient des Théorèmes purement méchaniques, tirés d'une théorie beaucoup plus générale, que j'avois trouvée depuis quelques années. Ces Théorèmes nous mettent en état de tirer un plus grand ufage des horloges en mer, & fur-tout, de connoître à chaque inftant la direction verticale, de laquelle dépend uniquement notre queftion principale. Ces Théorèmes font d'ailleurs d'une nature à pouvoir être facilement confirmés par des expériences. Je ne m'arrêterai donc pas à une plus ample expofition, n'étant plus queftion que de voir fi nos Théorèmes peuvent être appliqués avec quelque fuccès, au but que nous nous propofons. Je dirai donc d'abord quelques mots, fur l'application que j'en ai déja faite dans mes recherches antérieures, & puis je propoferai une nouvelle maniere de mettre ces Théorèmes à profit, dans la pratique, que je crois plus fûre & plus facile à remplir pour les Obfervateurs.

§. 9. Les moyens que j'ai donnés pour connoître la vraie direction verticale en mer, malgré l'agitation du vaiffeau, & fans le fecours de l'horifon, font fondés fur la mefure des angles, que font entre eux plufieurs pendules mobiles autour d'un même axe; & j'ai décrit la machine qu'on pourroit conftruire pour connoître lefdits angles. (§. XLV.) C'eft-là le fondement de ma méthode générale, fur

laquelle je ferai quelques réflexions, en priant le Lecteur de voir dans mes Recherches les méthodes particulieres, & les réflexions que j'ai déja faites sur toutes mes méthodes.

J'ai considéré d'abord qu'un pendule conserveroit parfaitement sa situation verticale dans un vaisseau non agité, & faisant voile uniformément; il faudroit donc en ce cas préférer l'usage des pendules appliqués au demi-cercle, à celui de l'Arbalête & du Quartier Anglois. Mais comme l'agitation du vaisseau jette nécessairement les pendules de côté & d'autre, j'ai marqué tout ce qu'on pouvoit & ce qu'il falloit faire, pour diminuer ces éloignemens, lesquels, avec ces précautions, ne seront pas fort considérables. Enfin, les formules que j'ai données au §. XXXIX, servent à connoître ces éloignemens: si donc ces formules laissent quelque incertitude dans la pratique, (car elles sont tout-à-fait sûres selon la théorie) cette incertitude ne regarde pas l'angle principal, qui est la hauteur de l'astre, mais simplement l'angle de correction, & il me semble que ce seroit pousser la rigidité trop loin, que de demander dans ces angles de correction une certitude entiere, sur-tout lorsque tous les moyens connus jusqu'ici nous manquent.

J'ai donné au §. XXXIX. deux formules; la premiere est:

$$A = \frac{\lambda - l'}{l' - l} \times M,$$

& la seconde est celle-ci:

$$A = \frac{(l'' - l')MN}{(l' - l)N - (l'' - l)M}.$$

Je n'ai donné la derniere formule, que pour résoudre la question suivant toute la rigueur de la théorie, & simplement pour éviter quelque incertitude qui pourroit rester

dans la quantité λ. Effectivement la seconde formule est préférable à la premiere, si l'on suppose nos principes sur les balancemens du vaisseau exactement vrais : mais s'ils ne le sont pas, il en rejaillira quelque incertitude sur les angles M & N, qui pourroit être de plus grande conséquence, que ne seroit l'incertitude qui pourroit rester sur la quantité λ. On pourroit donc en ce cas préférer la premiere formule, pour laquelle j'ai marqué au §. XL les précautions qu'on peut prendre : la machine en deviendra en même tems plus simple, & le calcul plus facile ; on pourroit même garder les trois pendules, en suivant toûjours le calcul de la premiere formule, pour se mettre en état de s'assûrer de la justesse de l'observation ; car si le calcul donne le même angle A, par les trois combinaisons qu'on peut faire sur deux pendules entre les trois, ce sera une marque infaillible, tant de la bonté de la méthode, que de la justesse de l'observation.

Quant à la machine que je propose au §. XLV., je ne crois pas que ni la construction, ni la maniere de s'en servir soient fort difficiles. Il sera sans doute facile d'imaginer un ressort, lequel venant à se débander, par l'attouchement du doigt à quelque languette, arrête tout d'un coup les pendules appliqués au demi-cercle. Il ne faudra pas non plus beaucoup d'adresse à l'Observateur, pour peu qu'il s'y soit habitué, pour toucher la languette à propos & à point nommé ; on tire des coups de fusil, qui demandent incomparablement plus d'adresse. Je ne vois donc pas pourquoi on devroit renoncer à toute espérance de tirer quelque succès de ces idées, quoiqu'assez paradoxes à la premiere apparence. L'extrême difficulté, ou si je ne me trompe, l'impossibilité entiere de donner des machines fondées sur d'autres principes, mérite que l'on ait quelque indulgence pour toutes celles que nos principes fournissent.

§. 10.

§. 10. Je viens aux nouvelles idées que j'ai conçues, depuis que j'ai eu l'honneur d'envoyer mes premieres Recherches à l'Académie, mais toûjours fondées sur les mêmes principes. Elles auront ce grand avantage, de retenir constamment le demi-cercle dans sa juste position, malgré l'agitation du vaisseau, par où on évitera tous les inconvéniens de nos méthodes précédentes, qui en rendent la pratique difficile. Mais pour mettre le Lecteur au fait, il est nécessaire de remonter à la source. On remarquera aussi que ce que je dirai d'abord ne peut être appliqué qu'aux balancemens d'un vaisseau, qui, dans sa position moyenne, se tient tout droit : mais je démontrerai ensuite, que le même raisonnement subsistera toûjours, quoique le vaisseau soit couché sur un de ses côtés.

§. 11. Soit dans la premiere Figure (qui est presque la même que la troisieme Figure de mes Recherches), A un point fixe; AM une verge verticale, dont l'extrémité M fasse des balancemens BMB', dans le plan BAB', suivant les loix des pendules simples; supposons au point M un petit axe perpendiculaire audit plan BAB', autour duquel balance librement une autre verge mMn, dans le même plan BAB', pendant que son axe en M balance autour du point A, je dis qu'on pourra faire ensorte, que pendant ces balancemens, l'extrémité n de la verge mMn reste toûjours dans la même verticale nA, de maniere que la verge AM ayant pris la situation AB ou AB', la verge mMn se trouve dans la situation CBp, ou $C'B'p$, & que le point p ne décrive que de petites portions insensibles np, dans la verticale nA. Voici comment je détermine la longueur Mn, requise pour cette condition.

Soit $AM = L$; la longueur d'un pendule simple isochrone, avec les balancemens du point $M = \lambda$; la distance du centre d'oscillation de la verge mn, depuis son axe

en $M = l$, c'eſt-à-dire, que l marque la longueur d'un pendule ſimple iſochrone, avec les balancemens que feroit la verge mn ſi ſon axe en M étoit fixe; qu'on tire enſuite les verticales BE & $B'E'$, j'ai démontré dans ma premiere Diſſertation, au §. IX, à la note (c), que l'angle CBE ou $C'B'E'$ ſera $= \frac{L}{\lambda - l} \times BAM$; on aura donc auſſi $BpM = \frac{L}{\lambda - l} \times BAM$, d'où l'on tire cette analogie $BpM : BAM = L : \lambda - l$; & ſi on ſubſtitue au lieu de la raiſon de l'angle BpM à BAM, qui ſont cenſés fort petits, celle de leur ſinus, ou bien celle des lignes AB & pB, on aura $AB\ (L) : Bp = L : \lambda - l$, & par conſéquent $Bp = \lambda - l$.

Donnant donc à la partie Bp ou Mn de la verge CBp ou mMn cette longueur $\lambda - l$, l'extrémité p ou n ne fera que des balancemens inſenſibles verticaux, exprimés par np, pendant que l'axe en M, par lequel la verge eſt ſuſpendue, eſt ſuppoſé faire les balancemens exprimés par l'arc BMB', qui ſont comme infiniment plus grands que les premiers, pendant leſquels même l'extrémité n ou p ne ſort jamais de la verticale prolongée AM. J'ai confirmé cette propoſition par pluſieurs expériences, dans leſquelles il eſt indifférent que le point A ſoit au-deſſous ou au-deſſus du point M; la diſtance AM indiquée par L, n'y entre point en compte non plus: il n'y a qu'à examiner dans ces expériences, les longueurs λ & l.

§. 12. Si au lieu d'une ſeule verge telle que mMn, on en met pluſieurs qui tournent toutes librement autour du même axe en M, & qui aient toutes la propriété marquée dans le précédent article, l'extrémité de chacune reſtera toûjours, pendant les balancemens de leur axe commun, dans la même verticale prolongée AM; on pourra cependant varier d'une façon quelconque, les longueurs

telle que Mn, en variant pour chaque verge la diſtance de ſon centre d'oſcillation au point de ſuſpenſion en M. La ſeconde Figure, où j'ai mis les lettres analogues pour un des côtés, explique aſſez ma penſée. La verge qui a ſa diſtance l la plus petite, eſt repréſentée dans ſon plus grand éloignement par CBp, & celle qui a cette pareille diſtance la plus grande, eſt repréſentée par $C'''Bp'''$; mais je veux que la premiere CBp ſoit conſtruite autrement que toutes les autres, qui auront une même ſtructure entre elles.

§. 13. Je demande donc que la verge CBp ait au point p encore un axe perpendiculaire au plan de la Figure, qui ſoûtienne une barre priſmatique rectangulaire, librement mobile autour de cet axe, comme cela eſt marqué dans la troiſieme Figure, dans laquelle PQ repréſente cette barre. Il eſt clair que cette barre PQ, quand il n'y auroit que la ſeule verge CBp, demeurera verticale d'elle-même, pendant les balancemens de l'axe en M ou B autour du point A, & ceux de la verge CBp autour de l'axe en B: car cette barre PQ n'eſt emportée par l'axe en p, que par des balancemens très-petits, qui ſe font dans une direction verticale, leſquels ne ſçauroient faire changer à la barre PQ ſa direction naturelle, que je ſuppoſe verticale.

Il faut remarquer ici une circonſtance très-eſſentielle; c'eſt que dans la détermination du centre d'oſcillation de la verge CBp, le poids de la barre PQ & du demi-cercle qu'elle doit porter, eſt cenſé ici appartenir à la verge CBp, & tout concentré au point p, chaque partie de la barre ayant le même mouvement que le point p, auquel elle eſt ſoûtenue.

La barre PQ demeurant déja, par ce ſeul méchaniſme, dans ſa ſituation verticale, ce que je vais ajoûter ne ſervira que pour l'y affermir davantage, & pour prévenir par-là

le danger, que le moindre attouchement ne la détourne de sa juste position. C'est dans cette vûe que je conseille encore de faire dans la barre PQ une coulisse, ou rainure ro, d'une largeur égale, & dont les côtés en dedans soient parfaitement polis, qui recevra les extrémités des autres verges $C'Bp'$, $C''Bp''$, &c. de la seconde Figure.

§. 14. Pour rendre le mouvement des extrémités de ces autres verges dans la coulisse parfaitement libre, on pourra garnir chacune de ces extrémités p', p'', &c. d'une poulie travaillée avec grand soin, dont le diametre soit tant soit peu plus petit que la largeur de la rainure.

§. 15. Si l'on donne à toutes ces autres verges $C'Bp'$, $C''Bp''$, &c. la propriété marquée au §. 11, en faisant pour chacune la partie $Bp' = \lambda - l'$, il est clair qu'elles concourront toutes à retenir la barre PQ dans sa situation verticale, puisque leurs balancemens harmonieux ne laisseront pas de conserver une liberté entiere, s'ils sont supposés se faire dans chacune à part, avec toutes les loix que la théorie exige; & si au contraire on supposoit aux verges une disposition à s'éloigner de ces loix, elles s'en empêcheront les unes les autres, l'harmonie des balancemens se conservant dans toutes les verges, par la construction de la machine. Ce n'est pas là un des moindres avantages de la machine que je propose ici.

§. 16. Puisque la barre PQ ne sçauroit manquer d'être retenue par les verges, qui concourent toutes à cet effet, dans sa situation verticale, on n'aura qu'à affermir un demi-cercle à cette barre, tel que SRT, dont le diametre ST soit perpendiculaire à la barre, avec une alidade mobile XZ, avec laquelle on pourra prendre la hauteur d'un astre tout-à-fait à son aise, & à peu près avec la même exactitude qu'on le feroit sur terre. Voici encore quelques précautions qu'il faudra prendre.

§. 17. L'axe en B, qui soûtient tout le systême, étant perpendiculaire au plan de la Figure, & naturellement horisontal, doit être mobile horisontalement, ce qui est facile à faire, & l'Observateur doit être mis en état de gouverner avec une main cet axe, pour pouvoir retenir à peu près le plan de la machine dans le plan vertical de l'astre qu'il veut observer; mais il prendra garde de ne toucher en aucune autre façon ni la barre, ni les verges, afin de leur laisser une liberté entiere de se mettre dans leur juste position à chaque instant. Il est vrai que la machine gardera quelques balancemens dans le plan perpendiculaire à celui de la machine : mais ces balancemens ne sont d'aucune conséquence sensible, & je ne crois pas qu'on doive rendre la machine plus composée pour y remédier, comme on le pourroit faire si on vouloit avoir égard. L'Observateur prendra aussi bien garde, en dirigeant de l'autre main l'alidade XZ, de n'y toucher que de l'extrémité du doigt, & simplement par de petits coups, sans y appuyer, & cela toûjours pour ne pas déranger le systême dans ses mouvemens naturels. Peut-être sera-t-il plus convenable d'employer deux personnes, dont l'un soit attentif à retenir l'axe en B dans sa juste position, & l'autre à diriger simplement l'alidade.

§. 18. Si j'ai supposé jusqu'ici la ligne AM verticale, ce n'a été que pour rendre mon systême plus clair & plus intelligible. Je dis donc à présent, que tout mon raisonnement subsistera encore, quelque inclinée qu'on suppose la ligne AM. On n'a qu'à comparer ensemble la seconde & la quatrieme Figure, pour voir toute la différence qu'il y aura d'un cas à l'autre. Voici donc comment je démontre qu'on aura encore pour ce second cas $Bp = \lambda - l$, en considérant les angles CBE & BAM comme fort petits, de même que nous l'avons fait pour le cas précédent.

Qu'on tire dans la quatrieme Figure, les horifontales BG & MF avec la verticale AF, & le triangle BGM pourra être cenfé femblable au triangle AFM. Or, j'ai démontré au §. x. de mes premieres Recherches, que l'angle $CBE = \frac{AF}{AM} \times \frac{L}{\lambda - l} \times BAM$. Mais $CBE = BpG = \frac{BG}{Bp} = \frac{BG}{BM} \times \frac{BM}{Bp} = \frac{AF}{AM} \times \frac{BM}{Bp}$. Donc $\frac{AF}{AM} \times \frac{BM}{Bp} = \frac{AF}{AM} \times \frac{L}{\lambda - l} \times BAM$, ou $\frac{BM}{Bp} = \frac{L}{\lambda - l} \times BAM = \frac{L}{\lambda - l} \times \frac{BM}{AM} = \frac{BM}{\lambda - l}$, & par conféquent $\frac{1}{Bp} = \frac{1}{\lambda - l}$, ou $Bp = \lambda - l$. C. Q. F. D.

Voilà encore une propriété extrèmement favorable à notre fyftème, & fans laquelle il auroit été entierement détruit, puifque l'inclinaifon moyenne du vaiffeau eft toûjours incertaine & inconftante. La nature nous donne ici du fecours, où tout moyen nous eût manqué. Nous voyons donc que la barre PQ (*Fig.* 3.) confervera fa direction verticale, lors même que l'axe en M ou B, par lequel le fyftème eft foûtenu, balance autour d'un point pris hors de la verticale PQM; & ainfi la machine que je propofe, fervira également pour toutes les pofitions du vaiffeau.

§. 19. Ce que je viens de dire fuffit pour comprendre notre fyftème, & toutes les raifons qui m'y ont conduit. Je ne m'arrêterai pas aux defcriptions purement méchaniques; les machiniftes y fuppléeront d'eux-mêmes, auffitôt qu'ils fe feront mis au fait. Mais il nous refte des remarques effentielles à faire, tirées de la théorie, touchant la conftruction des verges, qui foûtiennent & dirigent la barre, à laquelle le demi-cercle eft affermi, & touchant la façon de les préparer pour l'obfervation Aftronomique, toutes les fois qu'on fe propofe de la faire.

§. 20. Je ne prétends pas que la quantité λ, qui

marque la longueur du pendule simple isochrone, avec les balancemens du vaisseau, soit toûjours tout-à-fait la même pour toutes les circonstances : mais je crois bien qu'elle peut être censée telle pour les mêmes circonstances, & pour un petit intervalle de tems. Il faudra donc accommoder la machine aux circonstances où l'on se trouvera, & cela consistera à mettre les centres d'oscillation des verges CBp, $C'Bp'$, &c. dans leur juste position, de sorte que pour chacune la quantité Bp, Bp', &c. devienne $= \lambda - l$. Cette condition demande que chaque verge soit garnie d'un poids, qu'on puisse monter & descendre tout le long de la verge, tout comme dans les pendules appliqués aux horloges; moyennant ces poids, on pourra donner telle position qu'il conviendra aux centres d'oscillation des verges, sans changer les distances Bp, Bp', Bp'', &c. que je désignerai par a, a', a'', &c. pendant que je distinguerai les distances du centre d'oscillation, depuis le point de suspension M ou B pour chaque verge, par l, l', l'', &c. Ces dénominations nous donnent $a = \lambda - l$; $a' = \lambda - l'$; $a'' = \lambda - l''$, &c. ou bien; $l = \lambda - a$; $l' = \lambda - a'$; $l'' = \lambda - a''$, &c. & ces dernieres équations marquent les distances l, l', l'', &c. qu'on pourra obtenir pour chaque verge, moyennant le poids mobile dont elle est garnie.

§. 21. Il faut donc, pour se préparer à l'observation, commencer d'abord par connoître la quantité λ, pour les circonstances où l'on se trouve : pour cet effet, on comptera le nombre des balancemens du vaisseau pendant deux ou trois minutes ; on pourra se servir pour cet effet d'une montre de poche, dont on aura connu le nombre de battemens qu'elle fait dans une minute. Supposons que dans une minute de tems, le vaisseau ait fait autant de balancemens qu'il y a d'unités en n; & donnons 440 lignes à la

longueur d'un pendule ſimple à ſecondes, & on aura la longueur moyenne $\lambda = 440 \times \frac{3600}{nn} = \frac{1584000}{nn}$ lignes; & ſi de cette quantité on retranche pour chaque verge la longueur a, a' ou a'', qui demeure toûjours la même, & dont il faut avoir pris exactement la meſure, on connoîtra au juſte les longueurs l, l', l'', &c. en lignes.

§. 22. Quant aux verges, il faut les régler une fois pour toutes, par des diviſions exactes, & faites avec grand ſoin; ces diviſions ſeront marquées par le nombre de lignes qui leur conviennent, & elles indiqueront de cette façon, les points où il faudra toûjours mettre les poids à chaque obſervation, après avoir trouvé la quantité λ: on ſçait que cela ſe peut faire avec toute la préciſion qu'on ſe propoſe. Si je veux, par exemple, trouver le point où il faut placer le poids mobile, afin que la diſtance l ou l' ou l'', &c. ſoit de 1532 lignes, je n'ai qu'à chercher où il faut placer le poids pour faire balancer la verge autour de ſon axe dans une heure de tems, autant de fois qu'il y a d'unités en $3600\sqrt{\frac{440}{1532}}$, c'eſt-à-dire, 1929 fois; les autres diviſions ſe peuvent faire par le calcul. Il y a encore une remarque particuliere à faire ſur cette conſtruction, par rapport à la verge CBp, qui ſoûtient ſeule la barre PQ; c'eſt que tout le poids de cette barre, y compris celui du demi-cercle, doit être cenſé faire partie de la verge CBp, & être concentré au point p, comme j'ai démontré au §. 13 de ces Additions. C'eſt pourquoi pour faire les diviſions ſur la verge CBp, on ôtera la barre, & on mettra à ſa place, à l'extrémité p, un poids parfaitement égal à celui de la barre & du demi-cercle, & ſi ce poids ſubſtitué, avoit un volume conſidérable, ce qui feroit un peu changer les balancemens que notre théorie ſuppoſe, il vaudroit mieux pour l'entiere juſteſſe des diviſions, les chercher

chercher par le calcul, tel que la regle de trouver le centre d'oscillation enseigne, après avoir pris le centre d'oscillation de la verge *CBp* à part, & reconnu toutes les proportions qu'il y a entre les poids de la verge du corps mobile & de la barre, aussi-bien qu'entre les distances depuis l'axe en *B*, jusqu'au point où la barre & le corps mobile sont appliqués à la verge. Il ne faut rien négliger pour l'exactitude que le méchaniste peut donner à la machine, & qui ne demande que beaucoup d'attention & d'application.

§. 23. Après avoir décrit toutes les précautions qu'il faut prendre pour la construction de la machine, il ne sera pas hors de propos de remarquer encore une circonstance, qui facilitera à l'Observateur le moyen de se préparer à l'observation : elle consiste à marquer par les mêmes nombres, les divisions correspondantes sur chacune des verges ; & afin que l'Observateur sçache aussi-tôt les points où il faudra placer les poids, ces nombres seront ceux des balancemens que le vaisseau aura faits dans deux minutes de tems ; car c'est simplement ce nombre qui regle chaque division, & ce que j'ai dit dans le précédent article, ne sert qu'à la construction des verges : mais l'usage qu'il en faut faire sera fort facilité, si ces divisions sont marquées par le nombre des balancemens que le vaisseau est supposé faire dans deux minutes de tems.

§. 24. Après qu'on aura placé les poids régulateurs sur le nombre des balancemens du vaisseau, qu'on aura comptés pendant deux minutes, on pourra se former une marque, pour connoître si ces poids sont dûment placés : pour cet effet on pourra faire les bouts d'enhaut des verges $C'Bp'$, $C''Bp''$, &c. qui ne soûtiennent aucun autre poids que celui de leur propre matiere, d'acier qui plie quand il souffre un effort considérable de côté. Si l'on remarque

donc que ces bouts d'acier ne se courbent pas pendant que le vaisseau est agité, ou qu'ils ne se courbent pas beaucoup, l'observation ne pourra manquer d'être fort juste : mais si ces bouts se courboient beaucoup, on essayeroit si en baissant ou haussant un peu leurs régulateurs, ils se courberoient moins, & en ce cas il faudroit le faire. Je prévois bien cependant, qu'il pourra arriver dans les grandes tourmentes, que les verges resteront toûjours dans quelque légere contrainte, qui pourra provenir de l'effort que font les verges, pour retenir la barre dans sa situation verticale, malgré une certaine irrégularité des balancemens du vaisseau ; aussi est-ce là une des raisons qui m'ont engagé à conseiller d'employer plusieurs verges, qui concourent toutes au même effet ; sans ces vûes accessoires, la seule verge *CBp* suffiroit.

§. 25. Je finirai cette partie principale de mes Additions, par quelques remarques qui regardent le succès qu'on doit attendre de la machine proposée. Il est à remarquer que la barre *PQ* ne demeure pas seulement dans une situation verticale pendant les agitations du vaisseau, mais qu'elle reste encore dans la même verticale ; & ainsi quand même les balancemens du vaisseau seroient assez irréguliers pour faire sortir la barre de sa ligne, elle pourra encore garder une position verticale, par un mouvement parallele, qui lui sera plus naturel que tout autre. Voici un autre avantage ; c'est que toute la machine étant fondée sur l'harmonie des balancemens de ses parties, si cette harmonie étoit dérangée par quelque accident, elle seroit rétablie aussi-tôt, en vertu même de la construction, puisqu'il doit nécessairement arriver au milieu de chaque balancement, que toutes les verges & la barre se réunissent dans un même instant. Je crois aussi que le moment le plus sûr pour faire l'observation, sera celui de cette réunion ;

la barre PQ ne pourra alors s'écarter ſenſiblement de la verticale, ſur tout ſi on place en même tems l'axe B, qui ſoûtient la machine, le plus près que les circonſtances le permettent du point A, qui eſt toûjours le centre de gravité du vaiſſeau, puiſqu'alors cet axe même ne ſouffre que des balancemens aſſez légers; c'eſt auſſi à quoi je conſeille d'être attentif, puiſqu'enfin il ne faut rien négliger de tout ce qui peut rendre l'obſervation plus exacte. Enfin quand même la barre PQ ne garderoit pas avec une perfection entiere ſa poſition verticale, elle feroit elle-même des balancemens réguliers & harmonieux avec ceux du vaiſſeau, de ſorte qu'après avoir dirigé l'alidade, ſans y toucher davantage, on n'auroit qu'à remarquer ſur la pinnule X, les deux points extrèmes, qui répondent au rayon viſuel, & en prendre le milieu, ce qui donneroit le petit angle de correction pour l'angle XPS, qui marque la hauteur de l'aſtre.

§. 26. Avec toutes ces précautions, je me flate qu'on pourra prendre la hauteur ſur mer en tout tems, & toûjours avec beaucoup de préciſion. S'il y a encore quelques inconvéniens dans l'uſage de la machine que j'ai décrite, ils ne pourront être que très-légers, & fort excuſables par la nature du ſujet. Pourroit-on eſpérer ici la même préciſion, la même facilité & la même ſimplicité qu'on a ſur terre? Je prévois bien cependant, qu'on ne pourra donner à ces idées leur derniere perfection, qu'après une longue ſuite d'expériences, & d'attentions continuelles à remédier, conformément à nos principes, à tous les petits défauts qu'on remarquera dans les premiers eſſais. Cette derniere perfection dépendra ſur tout de la juſte proportion qu'il faudra donner à tous égards aux parties qui compoſent la machine, & qu'on ne ſçauroit déterminer aſſez par la ſimple théorie. Cependant ce que

la théorie dicte abſolument, ſuffit pour nous aſſûrer par avance d'un ſuccès plus que médiocre, même dans les premiers eſſais; car enfin, nos Théorèmes & nos Principes de Méchanique pure, ne ſouffrent pas la moindre exception, & nos hypotheſes ſur les balancemens d'un vaiſſeau, ſont fondées ſur la bonne théorie hydrodynamique; elles ſont conformes à toutes les expériences & obſervations nautiques, & d'ailleurs deux ou trois balancemens ſucceſſifs, achevés & uniformes ſuffiſent, & font le même effet que ſi tous les balancemens précédens l'avoient été de même. Ces balancemens achevés & uniformes ſont faciles à reconnoître; ils ne peuvent manquer d'arriver quelquefois, même dans les plus grandes tempêtes, & on pourra toûjours en profiter, ſoit de nuit, ſoit de jour. Je crois auſſi fermement, que pour les obſervations de nuit, il n'eſt pas poſſible d'employer d'autres principes; & quant aux obſervations de jour, l'expérience décidera ſi la machine que je viens de propoſer, n'eſt pas le plus ſouvent, peut-être même toûjours, préférable à l'Arbalête & au Quartier Anglois.

§. 27. On pourroit cependant, s'il étoit néceſſaire, contre mon opinion, pouſſer les corrections & l'exactitude plus loin, & même auſſi loin qu'on voudroit. Voici là-deſſus mes réflexions. J'ai fait voir que le point p, auquel la barre PQ eſt ſoûtenue, ne ſçauroit avoir aucun mouvement horiſontal, & qu'il n'eſt plus ſujet qu'à des balancemens verticaux, qui ne font aucun effort pour faire ſortir ladite barre PQ hors de ſa ſituation verticale. Mais ſuppoſons qu'une énorme irrégularité dans les balancemens du vaiſſeau, puiſſe produire au point p des mouvemens conſidérables dans la direction horiſontale, on pourra mettre autour de l'axe en B, une ſeule verge CBp, mais extrèmement peſante, & puis appliquer toute la machine

repréſentée dans la troiſieme Figure, à l'axe en p, au lieu de la ſuſpendre immédiatement par l'axe en B, & en ce cas, cette verge acceſſoire doit avoir la même propriété touchant la diſtance Bp, & le poids de toute la machine doit être conſidéré comme concentré au point p. Il eſt clair que par cette ſeconde correction, on achevera de remédier à tous les défauts: on voit auſſi qu'on peut pouſſer ces corrections auſſi loin qu'on voudra. La cinquieme Figure explique le principe de cette ſeconde correction; car ſi dans la premiere verge CBB', l'extrémité B' eſt encore ſujette à quitter la verticale prolongée AM, l'extrémité p' de la ſeconde verge $C'B'p'$, mobile autour du point B' ne pourra jamais s'écarter ſenſiblement de cette verticale.

§. 28. Je ne me ſuis propoſé que de décrire ce que la théorie & la méchanique exigent, ſans rien preſcrire aux Artiſtes, qui n'auront aucune peine à la conſtruction de cette machine, ſelon toute l'étendue de nos vûes, auſſitôt qu'ils en ſeront bien informés. Je ne laiſſerai pas de dire encore quelques mots ſur la conſtruction des verges CBp, $C'Bp'$, &c. de la troiſieme Figure, non dans le deſſein d'inſtruire les ouvriers, mais dans celui de mettre dans un plus grand jour la machine que je propoſe.

Comme ces verges doivent tourner librement autour d'un axe commun en B, & ſe croiſer à chaque balancement, il faut les conſtruire d'une façon à le pouvoir faire en toute liberté; c'eſt pourquoi au lieu de ſimples verges, on pourra ſe ſervir de plaques rectangulaires, preſque entierement percées, de ſorte qu'elles entrent les unes dans les autres. La ſixieme Figure repréſente deux de ces plaques; $CCppp$ marque le bord de la premiere, & $C'C'p'p'p'$ le bord de la ſeconde; BB marque l'axe commun, autour duquel toutes ces plaques peuvent tourner

librement, & se croiser, sans s'empêcher les unes les autres; PQ marque la barre, qui doit soûtenir le demi-cercle; ro marque la longueur de la coulisse, qui reçoit le bord $p'p'$ garni d'une poulie dans son milieu, pendant que la barre est soûtenue par le bord pp, autour duquel elle tourne librement. La troisieme Figure marquera ensuite en profil, avec des lettres analogues, ce que représente cette sixieme Figure. Le centre de gravité de chaque plaque doit être beaucoup au-dessous de l'axe BB.

§. 29. Je ne dirai plus qu'un mot sur la maniere de suspendre la machine: je crois que la meilleure maniere sera de se servir d'une genouillere : mais le globe doit être creusé en dedans, & laisser deux ouvertures en haut & en bas, pour donner la liberté aux verges ou plaques, de faire leurs balancemens autour de l'axe BB. Je représente un tel globe par la septieme Figure, dans laquelle BB marque l'axe, qui soûtient la machine, & les ouvertures entre les bords MM & NN, laisseront à ces verges ou plaques, toute la liberté de faire leurs balancemens.

§. 30. Je n'ajoûterai plus qu'une seule réflexion sur cette matiere, mais essentielle, utile, & qui fera voir combien j'ai été scrupuleux dans cet examen & ces recherches. Ressouvenons-nous donc pour la troisieme Figure, que $Bp = \lambda - l$; $Bp' = \lambda - l'$, &c. que λ exprime la longueur d'un pendule simple isochrone avec les balancemens du vaisseau, pendant que les lettres l, l', &c. marquent les distances des centres d'oscillations des verges ou plaques CBp, $C'Bp'$, &c. depuis l'axe en B. Ces quantités l, l', &c. sont arbitraires, & on peut les rendre aussi grandes qu'on veut, sans faire les bouts BC, BC', &c. plus longs, en approchant davantage leur centre de gravité du point B : mais il y a un inconvénient de part & d'autre, à les faire trop grandes & trop petites. Si elles

ſont grandes, les verges ou plaques prendront trop d'eſſor dans leurs balancemens, & ſi elles ſont petites, les parties Bp, Bp', &c. deviendront trop grandes, & incommodes pour la conſtruction & pour l'uſage de la machine : car la longueur λ peut aller peut-être au-delà de 40 ou même de 50 piés. J'ai donc examiné ſoigneuſement, ſi on ne pourroit pas remédier à ce ſecond inconvénient, & j'ai trouvé qu'on peut le faire de la maniere qui ſuit.

Il eſt clair qu'en diminuant les parties Bp, Bp', &c. dans une même proportion, la ligne qui ſera tirée par les extrémités, ſera parallele à PQ, & par conſéquent encore verticale : mais alors le point p ne ſera plus immobile par rapport à l'horiſon ; il fera des balancemens, & l'axe en p, qui ſoûtient la barre PQ, emportera cette barre par des balancemens horiſontaux ; ces balancemens pourront faire ſortir la barre hors de ſa poſition verticale : on peut cependant encore prévenir ce dérangement, qui gâteroit tout, de deux façons. La *premiere* eſt de charger beaucoup les verges ou plaques $C'Bp$, CBp', &c. & fort peu la barre PQ, qui en ce cas, ne fera aucun effort ſenſible ſur les verges ou plaques, & par conſéquent gardera conſtamment ſa direction verticale. La *ſeconde* conſiſte à placer l'axe p au centre de gravité de la barre PQ, y compris le poids du demi-cercle. Par ce ſecond moyen, la barre PQ ne fait plus aucun effort pour quitter la ſituation verticale, pendant qu'elle eſt emportée par le point p, par des balancemens horiſontaux, & elle eſt cependant retenue dans ſa ſituation verticale, par les bouts des autres verges ou plaques. M. Bouguer avoit déja remarqué le grand avantage qu'il y auroit, à ſatisfaire en même tems à ces deux points, dans ſa Piece qui a remporté le Prix de 1729, & qui l'a ſi bien mérité : mais ce grand Géometre, qui poſſede également toutes les connoiſſances de Phyſique, de

Méchanique & de Navigation, ſi néceſſaires pour ces ſortes de queſtions, ne s'eſt fait aucune peine de marquer lui-même l'imperfection de la méthode qu'il décrit, pour obtenir en quelque façon cet avantage. Je cite avec plaiſir cette belle Piece, & j'y renvoie mon Lecteur, pour un plus grand nombre d'articles qui nous reſteroient à conſidérer, & qu'on y trouvera tous traités avec toute l'exactitude & la perſpicacité poſſible. Ses principes ſont d'ailleurs conformes aux miens, ou du moins compatibles : il m'eſt cependant revenu depuis peu, qu'on a attaqué une propoſition qui nous eſt commune, ſçavoir : *Qu'un vaiſſeau fait ſes balancemens, tant en roulant qu'en tanguant, autour de ſon centre de gravité*, & qu'on a ſubſtitué à ce centre, un autre que j'ai été le premier à conſidérer & à déterminer, pour en déduire les loix des percuſſions excentriques, & que j'ai appellé le centre de rotation ſpontanée : j'ai démontré que ce centre eſt toûjours le centre d'oſcillation, en conſidérant le point d'impulſion comme le point de ſuſpenſion. Il faut diſtinguer dans cette controverſe, les balancemens qui ſe forment, d'avec ceux qui ſont tout formés, & qui ne font que ſe continuer. Dans les premiers, il faut prendre le centre de rotation ſpontanée, en prenant pour point d'impulſion, le centre de gravité de toutes les impulſions : mais dans les balancemens formés, il faut abſolument prendre le centre de gravité pour le point de rotation, comme j'ai démontré dans une Diſſertation que j'ai faite ſur les balancemens des corps qui nagent ſur les eaux, & comme M. Euler, Auteur de ce Problème, a démontré auſſi. Il y a dans cette Diſſertation, pluſieurs nouveaux Théorèmes, qui éclairciſſent la nature des balancemens d'un vaiſſeau, & qui m'ont ſervi de baſe pour les préſentes Recherches : mais comme elle n'a pas encore été imprimée, quoique

je l'aie faite depuis très-long-tems, je ne ſçaurois m'y rapporter pour donner plus de poids à tout ce que j'ai dit, ſoit dans ces Additions, ſoit dans mes Recherches antérieures ; & je deviendrois trop prolixe, ſi je voulois répéter ici tout ce que j'ai dit ailleurs ſur ces matieres : je me contenterai donc d'avoir dit le plus eſſentiel. Au reſte, les vents ne peuvent déranger ſenſiblement la machine que je propoſe pendant l'obſervation, pour pluſieurs raiſons que je ne m'arrêterai pas à expoſer ici : d'ailleurs on n'a qu'à vouloir remédier à ces inconvéniens pour en venir à bout. Quant aux ſecouſſes des lames qui ſe briſent contre le vaiſſeau, j'avoue qu'elles peuvent altérer l'obſervation, mais je ne crois pas qu'elles le puiſſent faire ſenſiblement ; & comme ces briſans ne viennent que par intervalle, il n'y a qu'à bien choiſir le moment de l'obſervation, pour s'en mettre à l'abri.

§. 31. Voilà donc ce que j'avois à dire ſur le point principal de notre ſujet, que l'Académie a témoigné dans la ſeconde annonce avoir le plus à cœur, & auquel j'ai fait moi-même le plus d'attention dans ma premiere Piece : mes premieres Recherches m'ont conduit aux vrais principes, que j'ai toûjours vû clairement être les ſeuls à ſuivre. Si j'ai eu le bonheur, dans ces Additions, de faire une application plus heureuſe de mes principes, j'en ſuis uniquement redevable à la pénétration de mes Juges, qui prévoyoient ſans doute, qu'on en pouvoit tirer un plus parfait uſage.

§. 32. Je n'ai que très-peu d'additions à faire ſur les autres points que j'ai traités dans ma premiere Piece. J'ai été fort long, peut-être même prolixe, ſur tout ce qui peut concerner la meſure du tems abſolu ſur mer. Il eſt ſûr qu'une plus grande perfection de cette matiere, dépend beaucoup plus d'une bonne théorie, que d'une connoiſſance

parfaite de tout ce qui regarde la pratique. Je crois avoir indiqué les vrais principes qui peuvent conduire à une plus exacte mesure du tems, tant sur mer que sur terre. Ils sont nouveaux pour la plûpart : j'avoue qu'il y en a d'assez paradoxes ; mais ceux-ci même ne laisseront pas, à ce que j'espere, de soûtenir l'examen des plus grands connoisseurs. Je ne demande à ceux-ci, que la grace d'examiner mes principes sans prévention : si après cela ils ne sont pas de mon sentiment, je me soûmettrai très-volontiers à leur décision & à leur autorité, & les prierai de regarder comme non dit, ce qu'ils trouveront être dit contre les regles bien avérées de l'art, dont j'ignore entierement la pratique ; & je mérite d'autant plus cette indulgence, que j'aurois pû me dispenser d'examiner cette matiere aussi scrupuleusement que je l'ai fait, sans me faire tort par rapport à notre sujet principal. Il y a cependant dans ces matieres, bien des choses très-fondées, qui paroissent démenties par l'expérience ; tel est, par exemple, mon Théorème du §. XVI. J'ai moi-même une pendule assez bien travaillée, qui ne se remonte que de quinze en quinze jours, mais qui n'a point de fusée pour régler le ressort moteur, de sorte que le pendule décrit des arcs beaucoup plus grands au commencement que vers la fin ; cependant cette pendule avance un peu au commencement, & retarde sur la fin, ce qui montre en même tems l'inutilité des petites lames cycloïdiques, qui devroient régler le mouvement du pendule, & qui n'ont fait qu'augmenter l'inégalité de la marche dans ma pendule : mais ces sortes de pendules ne doivent pas être mises au nombre des bonnes pendules, qui doivent être telles, que les balancemens de leur pendule ne different pas sensiblement entre eux, soit qu'on le détache de l'horloge, soit qu'on l'y applique. Aussi notre Théorème quadre-t-il parfaitement

avec les expériences faites sur l'excellente pendule de M. Graham. J'ai cependant examiné d'où pouvoit provenir l'effet contraire dans d'autres pendules, moins bonnes que celles d'un M. Graham ou d'un M. le Roi; c'est sans doute, parce que le pendule n'y étant pas si bien suspendu, & ne faisant pas ses balancemens avec autant de liberté, demande une plus grande action, pour être animé & entretenu dans ses balancemens; & si cette action n'exerce sa force sur l'échappement, qu'au moment que le pendule se trouve vers le milieu, sans y agir en aucune façon, pendant tout le tems que le pendule se trouve vers les extrêmités des arcs qu'il décrit, comme cela arrive dans les grands balancemens du pendule, on peut démontrer alors, que les balancemens en sont d'autant plus accélérés, qu'ils sont plus grands. Cette raison ne subsiste pas dans les bonnes pendules, parce que la force qui entretient leur marche est si petite, qu'elle ne sçauroit déranger sensiblement le mouvement du pendule, de quelque façon qu'elle agisse sur l'échappement. C'est-là la raison pourquoi il est si nécessaire de bien suspendre le pendule, ce que personne n'a mieux exécuté, à mon avis, que Messieurs le Roi & Graham. Concluons aussi de-là, qu'il ne faut pas rejetter facilement ce que la méchanique dicte.

§. 33. J'ai donné au §. XVIII de mes premieres Recherches, les précautions les plus essentielles qu'on peut prendre sur mer, pour se servir utilement des pendules. M. Massy en a donné quelques autres, qui paroissent bien fondées, dans sa Piece qui a remporté le prix de 1720. Si les balancemens d'un vaisseau sont trouvés être toûjours à peu près isochrones entre eux, on pourra encore tirer quelque utilité du principe dont nous nous sommes servi pour faire les observations Astronomiques sur mer, pour bien suspendre les pendules. Car comme le point *p*

(*Fig.* 1.) ne fait que des balancemens verticaux, on pourra ménager un genou à l'extrémité de la verge mMn, ou CBp, pour en suspendre la pendule, laquelle ne fera de cette façon, que de légers balancemens verticaux, pendant lesquels le mouvement du pendule sera alternativement un peu accéléré & retardé, mais d'une maniere insensible, & telle que ces inégalités se détruiront parfaitement.

§. 34. A ces remarques je n'en ajoûterai qu'une seule; qui concerne la maniere de construire les pendules, telle que le changement du froid & du chaud, n'en puisse point altérer le mouvement, n'ayant fait qu'indiquer dans ma premiere dissertation, cette construction au §. XVII, à la note (*e*). Il y a dans les Mémoires de l'Académie, différentes descriptions fondées sur le même principe que j'ai indiqué: si j'ajoûte la mienne, ce n'est que parce qu'elle pourra peut-être paroître plus simple. Puisqu'il y a des métaux de différente extensibilité, comme, par exemple, le cuivre & le fer, on n'aura qu'à se servir d'une simple verge AC (*Fig.* 8.), mais chargée d'une lentille à chaque extrémité A & C. Si cette verge est supposée balancer autour du point B, la partie BC d'en bas sera faite de la matiere qui souffre plus d'extension, & la partie d'en haut BA, de celle qui en souffre moins; & voilà toute la construction, qui a en même tems cet avantage, qu'un tel pendule AC sera beaucoup plus court, qu'un pendule simple isochrone. Voyons à présent quelle proportion il faudra donner, soit au poids des lentilles, soit aux longueurs BC & BA. Je négligerai le poids de la verge, par rapport à celui des lentilles, simplement pour éviter la prolixité du calcul.

Soit donc l'extensibilité de la matiere en BC à celle en BA, pour des longueurs égales, comme m à n; $BC = a$;

$BA = b$; le poids en $C = A$; le poids en $A = B$; le centre d'oſcillation en D : ſuppoſons enſuite que la partie BC s'étende en Bc, & la partie BA en Ba : la nature du Problème demande qu'après ce changement, le centre d'oſcillation ſe trouve encore en D. Soit $Cc = \alpha$, on aura $Aa = \frac{n}{m} \times \frac{b}{a} \times \alpha$, & par conſéquent $BD = \frac{aaA + bbB}{aA - bB}$ $= \frac{(a+\alpha)^2 A + (b + \frac{n}{m} \times \frac{b}{a} \times \alpha)^2 B}{(a+\alpha)A - (b + \frac{n}{m} \times \frac{b}{a} \times \alpha) B}$. Pour abréger le calcul de cette équation, on n'a qu'à traiter les petites variations inſenſibles d'infiniment petites; différentier la formule $\frac{aaA + bbB}{aA - bB}$, en conſidérant les quantités a & b comme variables, A & B comme conſtante, poſer la différentielle $= 0$, & enfin, faire $db = \frac{n}{m} \times \frac{b}{a} \times d\alpha$. De cette maniere, on trouvera l'équation qui ſuit :

$ma^3 AA - 2maab AB - mabb AB = nb^3 BB - 2nabb AB - naab AB$, à laquelle on pourra ſatisfaire d'une infinité de manieres.

Si l'on ſuppoſoit $m = 2n$; $BC = BA$, on trouveroit $\frac{A}{B} = \frac{3 + \sqrt{17}}{4}$, qui marque que le poids de la lentille d'en bas, devroit être preſque le double de celui de la lentille d'en haut.

Dans les Mémoires de l'Académie, pour l'année 1741, *pag.* 366, il eſt dit que la proportion de m à n a été obſervée pour le cuivre & le fer, comme 17 à 10, & faiſant pour cette proportion encore $a = b$, on trouvera $\frac{A}{B} = \frac{545}{340}$, ou environ $= \frac{8}{5}$, & toute la longueur du pendule AC ſera de 203 lignes, pour battre les ſecondes.

§. 35. Je n'ai rien à ajoûter aux méthodes Aſtronomiques, que j'ai données dans mes Recherches, ayant

confidéré toutes les circonftances où l'on peut fe trouver, & donné pour chacune, la méthode qui peut convenir le mieux, & ayant marqué outre cela, pour chaque méthode, le choix qu'il faut faire des aftres, de leur pofition, & du moment de l'obfervation, pour en déterminer l'heure avec le plus d'exactitude. Je profiterai feulement de cette occafion, pour rendre à M. de Maupertuis, la juftice que je lui dois à ce fujet. Je n'avois pas encore vû fa nouvelle Aftronomie Nautique, quand j'envoyai ma Piece à l'Académie, quoique publiée l'année précédente, où j'ai trouvé enfuite que cet illuftre Sçavant avoit déja expofé avant moi la méthode que j'ai donnée au §. LXI, pour derniere reffource, lorfque la tourmente feroit fi violente, qu'il fût abfolument impoffible de tirer le moindre fecours d'aucun inftrument, pour faire des obfervations. Il eft jufte que je m'acquite ici envers M. de Maupertuis, de ce que j'aurois fait la premiere fois, fi j'avois déja eu alors connoiffance de fon bel Ouvrage.



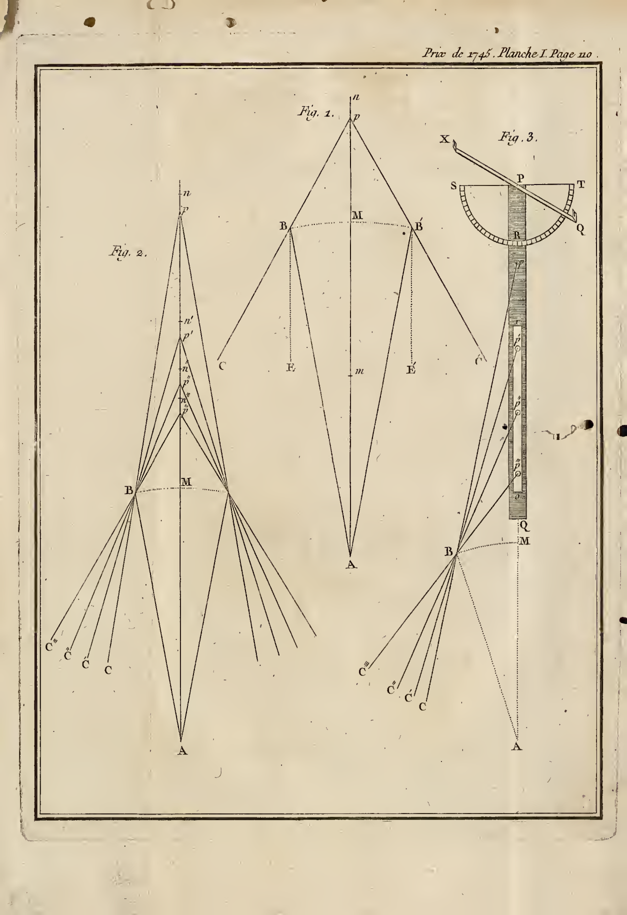
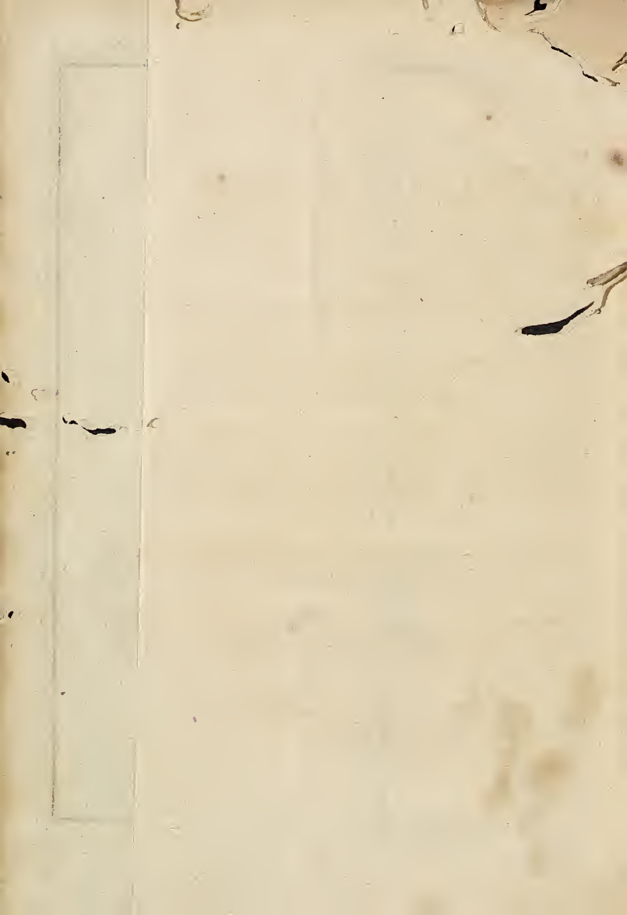

Fig. 1.
n
p
M
B
B′
C
E
m
E′
C′
A
Fig. 2.
n
p
n′
p′
n″
p″
n‴
p‴
M
B
C‴
C″
C′
C
A
Fig. 3.
X
S
P
T
Q
R
B
M
Q
C‴
C″
C′
C
A

Fig. 4.
p′
n
p
B′
M
F
B
G
F′
C′
m
C
E
A
Fig. 5.
p′
Fig. 8.
a
A
p
B′
B
C
M
B
C
c
D
C
A
Fig. 6.
P
R
p
r
p′
p′
p′
o
Q
B
B
B
B
B
B
C′
C′
C
C
Fig. 7.
M
M
B
N
N



MEDITATIONES
IN QUÆSTIONEM
AB ILLUSTRISSIMA
ACADEMIA REGIA PARIS. SCIENTIARUM,

Pro anno 1747. cum Præmio duplicato

PROPOSITAM.

Quibusnam observationibus mari, tam interdiu quam noctu, itemque durante crepusculo verum temporis momentum commodissimè & certissimè determinari queat?

Arbor non uno sternitur ictu.

MEDITATIONES



MEDITATIONES
IN QUÆSTIONEM
AB ILLUSTRISSIMA
ACADEMIA REGIA PARIS. SCIENTIARUM,
Pro anno 1747. *cum Præmio duplicato*
PROPOSITAM.

Quibusnam observationibus mari, tam interdiu quàm noctu, itemque durante crepusculo verum temporis momentum commodissimè & certissimè determinari queat?

Arbor non uno sternitur ictu.

I.
EXPLICATIO INSTITUTI.

§. 1. QUAMVIS accurata hujus quæstionis solutio non parùm ad inventionem longitudinis conferre videatur, quoniam ex discrimine temporum in diversis locis simul observatorum differentia inter eorum longitudines aptissimè concluditur; tamen hæc quæstio, etiam remoto hoc summo perfectionis gradu, in

omni navigatione non solùm est utilissima, sed etiam maximè necessaria, nihil enim in navi suscipitur, quod quidem ad ejus cursum pertineat, quin plurimùm intersit verum temporis momentum nosse, quo id factum sit. Verùm superfluum foret hîc dignitatem & utilitatem istius quæstionis collaudare velle, cùm ipsa Academia Regia, repetitâ ejus propositione, simul summum ejus usum declaret.

§. 2. Cùm tempus à meridie cujusque diei, vel à media nocte mensurari ac numerari soleat, patet in navi quando temporis momentum quæritur, numerum horarum ac minutorum desiderari, quæ vel à meridie vel à media nocte ejus loci, ubi navis tunc versatur, sint elapsa. Cùm enim Academia tempus non per horologia definire jubeat, sed per solas observationes, perspicuum est non requiri mensuram durationis à quopiam temporis momento cognito; sed verum tempus Astronomicum quod observationes pro eo loco & tempore exhibeant; vel quod horologium solare, siquidem in usum adhiberi posset, esset indicaturum.

§. 3. Si quidem navis vel quiesceret, vel sub eodem meridiano progrederetur, non aliud intercederet discrimen inter mensuram temporis reverâ præterlapsi & temporis Astronomici, nisi quòd ex æquatione temporis nasceretur. Sin autem navis continuò secundùm longitudinem promoveatur, manifestum est, hos duos temporis mensurandi modos, inter se plurimùm discrepare posse. Sin enim fieri posset, ut navis 24 horarum totum terræ ambitum conficeret, solemque constanter in meridiano constitutum aspiceret; Astronomicè tempus mensurando perpetuus deprehenderetur meridies, quotcumque etiam horæ præterlabantur.

§. 4. Triplicem igitur in navigatione temporis mensuram constitui oportet, quarum prima in æquabili temporis defluxu consistit, secundùm quam, verbi gratiâ, horæ

quæ à momento, quo navis è portu eſt egreſſa ad quodvis momentum datum reverâ ſint elapſæ, numerantur. Secundus tempus menſurandi modus ad meridiem ejus diei, quo hora petitur, ſpectat; eoque quæritur quot horæ ab eo momento, quo meridies proximè præcedens fuit obſervatus, effluxerint: etiamſi interea navis ſitum ſecundùm longitudinem mutaverit. Tertius autem tempus metiendi modus, dinumerat horas, quæ ab eo momento, in quod meridies ſub eo meridiano, ubi navis jam verſatur, incidit, ſunt præterlapſæ.

§. 5. Trium horum tempus deſcribendi modorum, primus quamquam ſolus, veram temporis notionem præbet, hic tamen non attenditur, quoniam exquiſitiſſima horologia requirit, neque per ſolas Obſervationes cœleſtes inſtitui poteſt, ſi quidem obſervationes eclipſium excipiamus. Interim tamen vera temporis duratio ex tempore per ſecundum vel tertium modum definito concludi poteſt. Si intervallum conſtet, quo navis ſecundùm longitudinem interea proceſſerit. Tempus enim quod differentiæ longitudinum reſpondet, tempori obſervato vel additum vel demtum, dabit verum temporis intervallum.

§. 6. Hîc igitur mihi tantùm ad ſecundum ac tertium temporis aſſignandi modum erit reſpiciendum: qui quidem duo modi plerumque parùm à ſe invicem diſcrepabunt, niſi forte navis propè alterutrum polum verſetur, ubi brevi temporis ſpatio ſatis magna longitudinis mutatio fieri poteſt. Præter hunc caſum bini iſti modi, etſi ſunt diverſi, tamen non difficulter alter ad alterum reduci, ſicque inſtar unius conſiderari poterunt. Æſtimatio enim itineris à nave confecti, jam eò uſque perfecta videtur, ut quantum navis aliquot ſaltem horarum ſpatio vel longitudinem vel latitudinem immutaverit ſine perceptibili errore aſſignari queat.

§. 7. Obſervationes autem per ſe tempus tertio tantùm modo oſtendunt, in quovis enim loco, ubicumque navis conſtiterit: aſpectus cœli perpetuò eam horam deſignat, quæ à meridie ejuſdem loci numeratur. Quando ergo navis ab eo tempore quo verus meridies fuit obſervatus, ad aliam longitudinem pervenerit, tum tempus differentiæ longitudinum debitum tempori tertio modo aſſignata addi vel demi debet, ut obtineatur menſura temporis ſecundo modo deſcripti. Facilè autem perſpicitur, etiamſi in æſtimatione differentiæ longitudinum haud levis error fuerit commiſſus, tamen hinc temporis determinationem non ſenſibiliter perturbari.

§. 8. Quæſtione ergo ad determinationem temporis tertio modo ſumti perductâ, definiendum eſt, cujuſmodi obſervationibus, ad hoc præſtandum, uti conveniat. Atque hic quidem ſtatim pleraque obſervationum genera, quæ in continenti inſtitui ſolent, hinc excludi debent. In mari enim neque tranſitus aſtri per meridianum, neque per datum verticalem obſervari poteſt, neque eas obſervationes inſtituere licet quæ exactiſſimum horologium requirunt. Relinquuntur ergo potiſſimùm ſolæ obſervationes altitudinum, quibus proinde in hoc negotio tantùm utar.

§. 9. Hîc igitur aſſumo ejuſmodi jam inventa eſſe inſtrumenta, quibus tam ſolis altitudo interdiu, quàm ſtellarum altitudines noctu ſatis accuratè obſervari queant. Cùm enim hæc ipſa quæſtio jam ſit ab illuſtr. Academia propoſita, atque hac occaſione plura eximia inſtrumenta altitudinibus obſervandis apta ſint excogitata, temerarium videri poſſit hoc negotium denuò ſuſcipere. Interim tamen ne ullam officii partem deſeruiſſe videar, quædam inſtrumenta hîc deſcribam, quæ forte ad præſens inſtitutum optato ſucceſſu haud carebunt.

§. 10. Quoniam denique non eo ſolùm momento, quo

obſervatio inſtituitur, temporis aſſignatio deſideratur, ſed præcipuè ut tempora tam antecedentia quàm conſequentia, modò intervallum non ſit nimis magnum, hoc modo emendentur; neceſſe eſt, ut hujuſmodi brevia temporis ſpatia ſatis exactè menſurari queant; quod vel clepſydrarum vel horologiorum portatilium vel aliorum nuper demùm inventorum inſtrumentorum beneficio, ſatis exactè fieri poſſe hìc aſſumo, neque in hoc argumento ampliùs evolvendo elaborabo.

§. 11. Navem igitur jam ejuſmodi inſtrumentis inſtructam eſſe pono, quibus ſaltem non nimis magna temporis intervalla accuratè ſecundùm horas & minuta demetiri liceat: tum verò pariter pono, ex curſu navis pariter pro exiguis temporis intervallis, variationem tam longitudinis quàm latitudinis ſatis exactè aſſignari poſſe; etiamſi hoc pro majoribus temporis intervallis ſine enormi errore fieri non poſſe concedam, ſimiliter ſcilicet modo, quo in terra variatio longitudinis ac latitudinis in parvis diſtantiis multò accuratiùs ex itineris æſtimatione concludi poteſt, quàm ex obſervationibus aſtronomicis, cùm tamen ſine his in majoribus diſtantiis nihil certi cognoſci queat.

§. 12. His igitur circumſtantiis perpenſis, primùm monſtrabo, quemadmodùm quovis tempore cujuſque ſideris altitudo idoneorum inſtrumentorum ope obſervari debeat: quod argumentum cùm jam ſit uberrimè ab aliis pertractatum, brevitati maximè ſtudebo, atque imprimis tantùm deſcriptioni quorundam novorum inſtrumentorum, quæ forte in mari utilitate non carebunt, operam dabo. Deinde plures modos deſcribam ex obſervatione altitudinum veram diei noctiſve horam colligendi; quod negotium cùm pariter ab aliis ferè exhauſtum videatur, quæſtioni illuſtriſſimæ Academiæ me pleniùs ſatisfacturum confido, ſi ſelectum ejuſmodi obſervationum, quibus

quàm minimo errore ſcopus obtineatur, indicavero, ſimulque quando aliquot obſervationibus ſucceſſivè inſtituendis utar, oſtendero, quomodò variationis, quam navis interea tam in longitudine quàm in latitudine ſubiit, ratio in calculo ſit habenda. Cùm enim hæc mutabilitas propria ſit obſervatorum in mari fluctuantium illuſtr. Academiam ad hanc potiſſimùm circumſtantiam reſpexiſſe, mihi quidem videtur.

I I.

De Obſervatione Altitudinum.

§. 13. CUM illuſtriſſima Academia expreſſis verbis trium temporum diei, crepuſculi, ac noctis mentionem faciat, ab obſervationibus interdiu inſtituendis initium faciam: quæ ab obſervationibus nocturnis hoc præcipuè diſcrepant, quod in illis horizon ſit conſpicuus, in his verò non item, ex quo fonte quoque diſcrimen inter obſervationes, durante crepuſculo & noctu factas me rectè petere arbitror, cùm in crepuſculo conſpectus horizontis, etiam nunc in obſervationibus adhiberi queat: præterquam quòd pauciſſima aſtra in crepuſculis appareant.

§. 14. Die autem præter ſolem nullum aliud ſidus ſe oculis noſtris offert, ex cujus obſervatione horam diei definire queamus, & hanc ob rem omnes obſervationes diurnas ad ſolum ſolem reſtringam, qui nobis etiam certiſſimam ac facillimam viam temporis dignoſcendi ſuggerit. Etiamſi enim, quando Luna interdiu ſuper horizonte cernitur, tamen ob curſum ejus nondum ſatis exactè cognitum, tum verò ob ejus parallaxin maximè incertam, ejus

obſervationes ad tempus cognoſcendum adhibere nolim.

§. 15. Solis autem altitudines commodiſſimè Quadrante Anglico obſervari videntur, tum quòd nautæ huic inſtrumento jam ſatis ſint aſſueti, tum quia non opus eſt, ut collimatio versùs ipſum ſolem fiat, ſed ad ejus imaginem per foraminulum projectam reſpicitur, cum qua obſervatione directio inſtrumenti horizontem versùs non difficulter conjungitur. Neque tamen refragabor, ſi aliud inſtrumentum, vel eorum, quæ jam ſunt propoſita, vel etiam eorum quæ ipſe deſcribam, ad ſolis altitudines obſervandas magis aptum videatur, quin id in locum Quadrantis Anglici ſubſtituatur.

§. 16. Si tali inſtrumento altitudo centri ſolis intra unum minutum primum certa haberi poſſet eam non ſolùm per refractiones, ſed etiam per parallaxin corrigi neceſſe foret, ſed quia in mari hujuſmodi accuratio vix ſperari poteſt, præclarumque nobiſcum agitur, ſi in altitudine ſolis non ultra 5 minuta erremus, parallaxin tutò negligere & refractiones quoque, niſi ſol propè horizontem verſetur, prætermittere licebit: ſcilicet, quamdiu refractio infra unum duove minuta prima ſubſiſtit, ſufficiet nimirùm in tabulis refractionum minuta ſecunda penitùs omitti, ne calculus deinceps inſtituendus præter neceſſitatem moleſtior reddatur, quod in obſervationibus ſtellarum æquè notatum velim.

§. 17. Soliſque ortus & occaſus quoties licuerit, diligenter obſervetur; ſic enim adhibitâ refractionum tabulâ, multò accuratiùs altitudo centri ſolis vel ſupra vel infra horizontem aſſignari poterit. Quin etiam hinc non difficulter momentum colligetur, quo altitudo centri ſolis reverâ fuerit nulla. Hæ verò obſervationes non ſolùm ſine ullis ferè inſtrumentis expediri poſſunt, ſed etiam adhiberi ſolent ad declinationem magnetis obſervandam, alioſque

usus nauticos; quamobrem eas eo minùs negligi conveniet.

§. 18. Durante crepusculo Planetæ, potissimùm Venus & Jupiter, cum maximè lucidis stellis fixis visui se offerunt. Quamquam autem hoc tempore horizontem adhuc conspicere licet, tamen vereor ne usus Quadrantis Anglici nimis evadat molestus & incertus. Cùm enim hoc casu dioptris uti, eaque versùs stellam dirigere oporteat eodem momento, quo versùs horizontem collimatur; neque unus observator, nisi sit exercitatissimus, stellaque propè horizontem hæreat, huic duplici collimationi par videtur, neque duo se mutuò adjuvare poterunt.

§. 19. Quoniam igitur ad observationes nocturnas alia instrumenta requiruntur, quæ sine respectu ad horizontem habito, altitudines siderum indicent; iisdem his instrumentis quoque in crepusculo uti præstabit, horizontisque intuitum, solis observationibus solaribus reservari, nisi forte alia instrumenta ad solem magis videantur accommodata. Remotâ itaque horizontis contemplatione, veniam peto, ut observationes crepusculares & nocturnas in eandem classem mihi referre liceat.

§. 20. Pervenio itaque ad observationes nocturnas, quæ non solùm ob horizontis defectum alium observandi modum postulant, sed etiamsi horizontem discernere liceret, tamen summa difficultas duplicem collimationem simul instituendi hunc modum inutilem redderet, cùm autem pendulorum usus in mari penitùs cesset, æquilibrium fluidorum, si quidem satis sit promtum, certissimè verum horizontis situm indicare videtur, ad quem deinceps siderum loca referuntur. At verò insuper necesse est ut hæc relatio secundùm plana verticalia fiat, quamobrem quocumque instrumento utamur, id proximè in plano verticali sustineri necesse est.

§. 21.

§. 21. Quocumque autem inſtrumento ad obſervandam ſtellæ cujuſdam altitudinem utamur, primò directio, in qua ſtella exiſtit, indagari debet, quæ vel dioptris vel Tubo Aſtronomico explorari ſolet. Etſi autem lentes cryſtallinæ objecta diſtinctiùs repreſentant, tamen earum uſus ſuper mari ferè nullus eſt, quia ob motum continuum, ſtellam quam forte per tubum conſpeximus, confeſtim amittimus, neque eam facilè recuperare valemus. Quin etiam in obſervationibus marinis ſtellas inſigniores adhiberi convenit, quarum loca in cœlo jam exactiſſimè ſint determinata, eas autem nudis oculis ſatis diſtinctè cernelicet, ut ob hanc cauſam tubis facilè carere queamus.

§. 22. Ad collimandum ergo inſtrumenta binis dioptris nudis inſtructa, reliquis quæ tubis ſunt munita, longè antecedunt, ac altera quidem dioptra exiguo foraminulo pertuſa ſit, per quod ſtella aſpiciatur. Altera verò dioptra ſatis amplam habeat aperturam, quo ſtella non facilè ex illa diſpareat, ſtatimque in eam reduci queat. Duo autem fila tenuiſſima in hac apertura firmata ſua interſectione ejus centrum deſignent, in qua ſi ſtella appareat, collimatio ritè ſit inſtituta.

§. 23. Eo ergo momento, quo ſtella in decuſſatione filorum iſtorum conſpicitur, inclinatio iſtius lineæ, quæ ab oculo ad ſtellam dirigitur ad rectam verticalem inveſtigari debet; quod ope quadrantis, cujus limbus accuratè in gradus & minuta ſit diviſus, commodiſſimè præſtatur. Si enim planum hujus quadrantis ſitum verticalem teneat, in eoque linea verticalis vel pendulo vel alio quoviſmodo indicetur angulus, quem linea directionis cum hac linea verticali efficit, diſtantiam ſtellæ à zenith metietur, ſi quidem recta dioptras jungens radio quadrantis, qui per diviſionis initium ducitur, fuerit parallela.

§. 24. Cùm enim ad hanc obſervationem duæ res

requirantur, poſitio, ſcilicet, quadrantis in ſitu verticali, & in eo directio gravitatis naturalis, ſeu poſitio rectæ ad horizontem perpendicularis, quemadmodùm utraque obtineri queat, ſeorſim perpendam. Primò igitur aſſumam totum negotium in ſitu quadrantis verticali eſſe poſitum, lineamque verticalem nihil habere difficultatis. Quadrans autem, ſi liberè ſuſpendatur, centrumque gravitatis in ipſo ſuo plano ſitum habeat, ſponte ſe ad ſitum verticalem componet, & oſcillationes, quæ ipſi à motu navis inducuntur, moderatione ejus à quo tenetur, non difficulter, ſi non penitùs coercentur, tamen ad ſummam exiguitatem redigentur.

§. 25. Tametſi autem in hoc error quidam levis committitur, planumque quadrantis verticale putatur, cùm tamen aliquantiſper declinet, error tamen qui inde in obſervationem altitudinis redundat, omninò erit imperceptibilis, neque reſpectu aliorum errorum, qui evitari nequeunt, in computum duci meretur. Interim tamen & hic error ex iis, quæ mox ſum traditurus facilè tolletur, cùm, pluribus obſervationibus inſtituendis, ea ſit veriſſima, quæ maximam ſtellæ diſtantiam à zenith oſtendat. Demonſtrabo enim, quò magis planum quadrantis à ſitu verticali declinet, eò minorem diſtantiam ſtellæ à zenith deprehendi debere.

§. 26. Ut igitur definiam, quantùm obſervatio altitudinis à declinatione plani quadrantis turbetur cujus perturbationis cognitio ad ejus emendationem maximi eſt momenti; conſiderabo primùm quadrantem ACB, in ſitu verticali, ſitque AC recta ab oculo ad ſtellam directa, in quadrante autem ſit CP, verticalis, erit angulus ACP, menſura vera diſtantiæ ſtellæ à zenith; ponamus hunc angulum $ACP = \varphi$, ut eum cum ſimili angulo, quem ſitus quadrantis inclinatus indicare reperietur, comparare queamus.

Fig. I.

§. 27. Concipiamus nunc quadrantem circa rectam AC, quæ eſt fixa, aliquantulùm inclinari, atque in ACb pervenire, in quo cum verticali angulum faciat $BCb = \theta$. Quia jam in hoc plano ACb linea verticalis non datur, pendulum à gravitate in eo ſitum Cp eligere cogetur, qui à directione verticalis vera, minimè diſcrepet. Iſte autem ſitus cognoſcetur, ſi ex puncto P, in planum ACb normalis ducatur Po, tum enim perſpicuum eſt rectam Cp per punctum hoc o tranſire debere; atque in hoc ſtatu angulus ACp, diſtantiam ſtellæ à zenith indicare putabitur.

§. 28. Ad hunc igitur angulum ACp inveſtigandum ex P ad AC quæ eſt communis utriuſque plani interſectio, ducatur normalis PQ, ex eodemque puncto Q ad eandem AC in plano ACb educatur normalis Qo, in quam ex P, perpendiculariter ducta Po, ſimul in planum ACb erit normalis. Invento autem hoc puncto o, ex triangulo CQo, ad Q rectangulo, angulus quæſitus ACp, innoteſcet.

§. 29. Sit radius quadrantis $AC = BC = 1$, qui ſimul pro ſinu toto habeatur, erit ob angulum $ACP = \varphi$, recta $PQ = \mathit{ſin.}\ \varphi$, & $CQ = \mathit{coſ.}\ \varphi$. Deinde angulus PQo, quia metitur inclinationem planorum ACB & ACb, erit $= \theta$, unde in triangulo QoP ad o rectangulo, fiet $Po = PQ$ $\mathit{ſin.}\ \theta = \mathit{ſin.}\ \theta\ \mathit{ſin.}\ \varphi$, & $Qo = PQ\ \mathit{coſ.}\ \theta = \mathit{coſ.}\ \theta\ \mathit{ſin.}\ \varphi$. Cùm jam $\frac{Qo}{CQ}$ exprimat tangentem anguli ACp, erit $\mathit{tang.}\ ACp = \frac{\mathit{coſ.}\ \theta\ \mathit{ſin.}\ \varphi}{\mathit{coſ.}\ \varphi} = \mathit{coſ.}\ \theta\ \mathit{tang.}\ \varphi$, conſequenter tangens ACP ſe habebit ad $\mathit{tang.}\ ACp$, ut ſinus totus ad coſinum anguli inclinationis utriuſque plani.

§. 30. Hinc patet duobus caſibus errorem ſeu diſcrimen inter angulos ACP & ACp fore nullum, quantumvis etiam fuerit inclinatio plani quadrantis magna. Si enim

ſit angulus $A C P = \varphi = 0$; quod fit ſi ſtella in zenith obſervetur, angulus $A Cp$ pariter erit $= 0$: atque ſi ſit angulus $A C P = 90°$, ſeu $tang.\ \varphi = \infty$, invenitur quoque $tang. A Cp = \infty$, ideoque $A Cp = 90°$, quare ſi ſtella in horizonte verſetur, inclinatio quadrantis pariter nullum errorem producit. Ex quibus jam liquet errorem fore majorem quo magis ſtella tam à zenith quàm ab horizonte ſimul fuerit remota.

§. 31. Cùm igitur angulus $A Cp$ minor ſit angulo ACP, ponatur hîc angulus $A Cp = \varphi - z$, ita ut z ſit error ex inclinatione quadrantis oriundus, eritque $tang.\ (\varphi - z) = cof.\ \theta\ tang.\ \varphi$: at eſt $tang.\ (\varphi - z) = \frac{tang.\ \varphi - tang.\ z}{1 + tang.\ \varphi\ tang.\ z}$. Unde reperietur $tang.\ z = \frac{(1 - cof.\ \theta)\ tang.\ \varphi}{1 + cof.\ \theta\ tang.\ \varphi^2}$. Si jam angulus inclinationis θ ſit valdè parvus, aſſumere licet $cof.\ \theta = 1 - \frac{1}{2}\theta\theta$. Eritque $tang.\ z = \frac{\theta\theta\ tang.\ \varphi}{2\ fec.\ \varphi^2 - \theta\theta\ tang.\ \varphi^2}$, ſeu ob $\theta\theta$ minimum, erit $tang.\ z = \frac{1}{2}\theta\theta\ fin.\ \varphi\ cof.\ \varphi = \frac{1}{4}\theta\theta\ fin.\ 2\varphi$. Sicque error erit maximus quando $2\varphi = 90°$. Seu quando elevatio ſideris ſupra horizontem eſt $45°$.

§. 32. Generaliter autem, quantacunque ſit inclinatio θ, valor ipſius φ reperietur, cui maximus error reſpondet, ſi fractionis $\frac{(1 - cof.\ \theta)\ tang.\ \varphi}{1 + cof.\ \theta\ tang.\ \varphi^2}$, ſeu, ob θ conſtans, hujus $\frac{tang.\ \varphi}{1 + cof.\ \theta\ tang.\ \varphi^2}$ differentiale, quod eſt $= \frac{(1 - cof.\ \theta\ tang\ \varphi^2)\ d\ tang.\ \varphi}{(1 + cof.\ \theta\ tang.\ \varphi^2)^2}$ nihilo æquale ſtatuatur, unde fit $tang.\ \varphi = \frac{1}{\sqrt{cof.\ \theta}}$; errorque z maximus huic angulo $A C P = \varphi$ reſpondens, definietur ex hac æquatione, $tang.\ z = \frac{(1 - cof.\ \theta) : \sqrt{cof.\ \theta}}{2} = \frac{1 - cof.\ \theta}{2\sqrt{cof.\ \theta}} = \frac{fin.\ \frac{1}{2}\theta^2}{\sqrt{cof.\ \theta}}$ ob $\frac{1 - cof.\ \theta}{2} = fin.\ \frac{1}{2}\theta^2$.

§. 33. Hinc ergo pro quavis quadrantis inclinatione maxima aberratio, quæ in obſervationem irrepere poteſt,

determinari poterit. Ponamus ergo planum quadrantis à plano verticali angulo 2° declinari, ita ut ſit $\theta = 2^\circ$ & $\frac{1}{2}\theta = 1^\circ$, reperietur $l\ tang.\ \varphi = 10.0001323$, & angulus $\varphi = 45^\circ\ 0'\ 31''$, & $l\ tang.\ z = 6.4438429$. Sicque error $z = 57''$, nequidem ad unum minutum primùm exſurget. Quando autem quadrans inter oſcillandum longiùs à plano verticali digreditur, angulusque ACp, dum ſtella in interſectione filorum conſpicitur continuò mutatur, ita ut variatio percipi queat, tum maximus angulus, qui quidem deprehenditur, veram diſtantiam ſtellæ à zenith indicabit. Interim tamen apparet, niſi inclinatio ultra duos gradus a[illegible]dat, ne hâc quidem præcautione opus eſſe, ſed altitudinem ſtellæ ſatis exactè indicari.

§. 34. His de ſitu quadrantis in ſitu verticali notatis, in id eſt incumbendum, ut in plano quadrantis ipſa linea verticalis exibeatur, quod in terra continenti quidem commodiſſime ope penduli præſtatur. Verum in mari uſum pendulorum prorsùs repudiare cogimur; eorumque loco ejuſmodi inſtrumenta adhiberi ſolent, quæ æquilibrio fluidorum innixa, verum horizontis planum exhibeant. Ex quo genere jam plura præclara extant inſtrumenta, alibi deſcripta, quæ ad meum uſum adhibere non dubitabo, ſi forte ea, quæ hîc ſum propoſiturus, minus apta videantur.



III.

Descriptio Quadrantis Nautici.

Fig. II. §. 35. CONFICIATUR primò quadrans *ACB* more solito ex metallo vel ligno durissimo, quod à varia tempestate non incurvetur; ubique autem materiam homogeneam adhiberi conveniet, ut à dilatati[one] ne & contractione quæ à mutato caloris gradu, accidit f[i]gura non distorqueatur. Limbus verò *AB*, sit dilige[nter] [..]ne in gradus & quina vel dena minuta prima divisus, quæ porrò per lineas diagonales in singula minuta subdividantur. Cujusmodi divisio pro magnitudine quadrantis vel magis vel minus distinctè exprimi poterit.

§. 36. Magnitudinem hujus quadrantis majorem non esse convenit, quàm ut ab uno homine commodè in manibus teneri ac tractari possit. Cùm igitur sustentaculo non sit opus, quo aliàs pondus valdè augetur, radius hujus quadrantis duos ferè pedes longum vel saltem sesquipedalem fieri licebit: quæ magnitudo jam divisionis satis minutæ est capax, ita ut singula ferè minuta prima discerni queant; siquidem lineis transversim ductis uti libeat. Infrà autem patebit, ne hâc quidem divisione opus esse, sed sufficere si integri tantùm gradus exprimantur.

§. 37. Dioptræ *A a* & *Cc* modò antè descriptæ super radio *AC*, constituantur, earumque distantia bipedalis seu sesquipedalis ad collimandum satis erit idonea, ut quævis stella per eas non difficulter detegi, sed etiam moderatione quadrantis in intersectionem filorum reduci possit, si forte pondus quadrantis observatori nimis grave videatur, quadrans ex centro *C*, suspendi poterit, ita tamen ut

manibus retineatur ac dirigatur; hoc enim modo Obſervator multùm ſublevabitur.

§. 38. Venio nunc ad præcipuam quadrantis partem, pendulum, ſcilicet, *CGH*, quod circa centrum *C* liberrimè mobile, in fiſſura *GI* habeat filum tenuiſſimum tenſum, quod in limbo quadrantis gradus & minuta diſtinctè indicet. Hoc igitur pendulum ſi perpetuò in ſitu verticali perſiſteret, ſtatim veram ſtellæ diſtantiam à zenith patefaceret: ſed in mari ob mutationem navis continuam, pendulum vix unquam in ſitu verticali acquieſcet.

§. 39. Marginem hujus penduli in *m* & *n*, non incongruum erit replicare, ut limbum quadrantis excipiat, ita tamen ut liberrimè juxta eum moveri poſſit, ſiquidem quadrans teneat ſitum verticalem. Hinc enim Obſervator ſtatim ſentiet utrùm quadrans in plano verticali verſetur; an notabiliter declinet, quo caſu non difficulter in ſitum verticalem proximè ſaltem dirigetur; quantùm quidem ad certitudinem obſervationum requiritur.

§. 40. Parti inferiori hujus penduli, ſeu regulæ mobilis *CG*, in *G* connectatur tubus vitreus *EF*, crenæ arcus lignei immiſſus, quæ modo mox indicando ſit diviſa. Tubus iſte vitreus autem aliquantulùm ſit incurvatus, & partibus utrinque æqualibus *GE* & *GF* cum regula ad angulos rectos firmiſſimè conjunctus, ſubſcudibus, ſcilicet, *EH* & *FH*, ut motum regulæ perfectiſſimè ſequatur, & cum ea unum continuum pendulum conſtituat.

§.41. Tubus iſte vitreus aquâ ſeu alio liquore magis idoneo repleatur, relictâ exiguâ bullulâ aëreâ, & utrinque in *E* & *F* obſtruatur, ut aëri nullus aditus pateat. Hæc ergo bullula *K*, in omni tubi ſitu jugiter ſupremum occupabit locum, & tametſi ipſa per theoriam, motum quemdam oſcillatorium recipere debet, tamen effici poteſt, ut eum ferè ſingulis momentis amittat, motuque tubi non obſtante,

nisi vehementer concutiatur, perpetuò in puncto tubi summo hæreat; qui effectus, quemadmodùm promptissimè produci queat, deinceps exponam.

§. 42. Curvatura tubi hujus *EF* sit, quantùm fieri potest, circularis, referatque arcum circuli, cujus centrum situm sit alicubi in recta *CGH*, producta, puta in *O*; quod punctum quò longiùs distet, eò majores evadent gradus in arcu *E F*. Quare si radius *GO* decies major accipiatur quàm radius quadrantis *AC*, singula minuta prima curvaturæ tubi satis distinctè exprimi poterunt. Nihil autem obstat, quò minus tubo huic *EF* longitudo arcui quadrantis *APB* ferè æqualis tribuatur, unde curvatura tubi 9 grad[illegible] complectetur; ita ut uterque semissis *GE* & *G*[illegible]ius capiat, quæ amplitudo pro motu penduli oscillatorio sufficiens videtur.

§. 43. Cùm autem nimis sit difficile tubum vitreum *E F*, tam exactè juxta arcum circuli, cujus centrum sit in dato puncto *O*, incurvare, ad præsens institutum sufficiet, dummodo proximè ejusmodi habuerit figuram. Hinc oportebit divisionem hujus tubi non geometricè, sed practicè per observationes absolvere in loco, scilicet, quieto, antequam in navim conscendatur. Neque ergo formatio istius tubi, neque ejus divisio ullâ amplius premetur difficultate.

§. 44. Quòd si autem quadrans *ACB*, cum pendulo *CIGEHF* modo exposito fuerit constructus, evidens est quemadmodùm ejus ope altitudo stellæ cujusvis cognosci queat. Dioptris enim *A a* & *C c* versùs stellam directis, eo momento quo stella in intersectione filorum apparet, notetur tam amplitudo arcûs *AG*, in limbo quadrantis, quem filum *GI* abscindit, quàm situs bullulæ aereæ *K*, & mensura arcûs *GK* in gradibus & minutis inventa, subtrahatur ab arcu *AG*, siquidem bullula in parte *GE* hæreat, sin autem

autem fuerit in arcu GF, ad arcum AG addatur; ſicque prodibit diſtantia ſtellæ à zenith.

§. 45. Concipiatur enim ducta vera linea verticalis CP, ita ut angulus ACP metiatur diſtantiam ſtellæ à zenith: jam quia bulla K in tubo locum ſupremum occupat, erit recta OK quoque verticalis, ideòque angulus GOK, quem arcus GK indicat, æqualis erit angulo GCP. Quamobrem angulus ACP, ſeu vera diſtantia à zenith obtinebitur, ſi ab angulo ACG quem pendulum in limbo quadrantis abſcindit, ſubtrahatur angulus GOK quem ſitus bullæ indicat.

§. 46. Quò autem hæc faciliùs expediri queant, pendulum CG cochleâ munitum eſſe conveniet, quâ pendulum ad limbum quadrantis firmari, ejuſque motus oſcillatorius penitùs coerceri queat. Adigatur autem hæc cochlea tum, quando pendulum non multùm à ſitu verticali CP, dum ſtella in interſectione dioptræ conſpicitur, diſtare æſtimabitur: ut deinceps ad ſolum ſitum bullæ in tubo EF reſpicere ſufficiat.

§. 47. Vel cùm altitudo ſideris jam ad aliquot tantùm gradus fuerit explorata, pendulum ope cochleæ firmetur in diviſione quadam inſigniori limbi, quâ integer gradus indicetur. Quo facto miniſter adſtans ſedulò bullam in tubo EF inſpiciat, ut ſimul atque Obſervator ſignum dederit, ſe ſtellam in interſectione filorum contueri, locum bullæ exactè aſſignare poſſit. Tum enim numerus minutorum arcûs GK ab arcu AG jam antè cognito, vel ſubtractus, vel ad eum additus, præbebit diſtantiam ſtellæ à zenith. Hinc intelligitur ſufficere, ſi limbus quadrantis tantùm in integros gradus dividatur, atque ulteriori diviſione facilè jam carere poterimus.

§. 48. Ad has autem obſervationes accuratè inſtituendas exercitio frequenti opus erit; quo Obſervator ſibi facilè habitum comparabit quadrantem hunc, ſi modo

idoneo fuerit ſuſpenſus, commodè tractandi, & quantum fieri poteſt, ejus motus violentiores compeſcendi. Neque mihi quidem videtur ad hoc negotium tantùm ſolertiæ requiri, quantùm vulgò tractatio Quadrantis Anglici poſtulare ſolet.

§. 49. Quando enim Obſervator pendulum jam in ſitu CG, à verticali CP, non multùm remoto firmaverit, tum pendulum alio motu, niſi qui ſit ipſi quadranti communis concitari non poterit; hunc autem Obſervator obſequendo, ita temperare poterit, ut fiat lentiſſimus, præcipuè quando ſtellam in interſectione filorum conſpicit. Hocque modo ipſa bulla aërea non ſenſibiliter movebitur, atque famulus ſeu ſocius Obſervatoris non difficulter, momento imperato, locum bullæ dignoſcet.

§. 50. Non ſolùm autem hæc motûs penduli imminutio ideo eſt neceſſaria, quo locus bullæ certiùs notari queat, ſed etiam bulla eò accuratiùs ſe in locum tubi ſupremum recipit, multoque minus ultrò citròque vagabitur, quò tardior fuerit motus. Hiſque circumſtantiis probè perpenſis, non dubito quin ope hujus quadrantis, dummodò Obſervator ſibi modicam ſolertiam acquiſiverit, cujuſque ſtellæ vera altitudo tam accuratè obſervari poſſit, ut error vix ultra minutum exſurgat; & majorem quidem certitudinis gradum ſuper mari expectare non licet.

§. 51. Quamquam autem hoc modo incertitudo, quæ à motu bullæ oſcillatorio ejuſve ſegnitie proficiſcitur, quoad maximam partem tollitur, tamen ſtructura quoque tubi talis effici poteſt, ut bulla quàm promtiſſimè, ſitum ſupremum affectet, ibique perſeveret. Hoc, ſcilicet, præſtabitur, ſi tubus non nimis fiat anguſtus, bullæque modica quantitas relinquatur, quæ res ut ſint ad ſcopum maximè accommodatæ, cùm judicio, tum experientiâ à ſolerti artifice non difficulter definientur; quare deſcriptioni hujus inſtrumenti

quod mihi quidem plurimis aliis ad hunc finem propoſitis, palmam præripere videtur, diutiùs non immoror.

I V.

Deſcriptio alius Quadrantis Nautici.

§. 52. NISI aliæ circumſtantiæ impediant, quominus *Fig. III.* longitudo penduli tres pedes ſuperare poſſit; tum ipſi pendulo adjungi poſſet barometrum $GIHKL$ Bernoullianum, ſcilicet, quòd minimas mutationes mercurii in tubo anguſto KL, ſatis diſtinctè indicet. Cùm enim mercurius in omni ſitu eandem altitudinem verticalem teneat, dum pendulum tantillùm inclinatur, mercurius in tubo LK, recedet notabiliter, unde viciſſim ex loco mercurii S inclinatio penduli cognoſci poſſet.

§. 53. Quia verò difficile foret quovis tempore veram altitudinem Barometri cognoſcere, atque receſſus mercurii S, in tubo horizontali LK non ſolùm ab inclinatione penduli, ſed etiam à declinatione plani quadrantis proveniat, ac præterea iſtæ mutationes ob frictionem ne in terra ſatis ſint certæ, Barometrorum uſum ad pendula mari perficienda penitùs rejiciendum eſſe arbitror. Quocirca aliam ideam ab æquilibrio tuborum communicantium deſumptam proponam; quæ tamen illâ, quam ſuprà deſcripſi, non parum præſtantior mihi quidem videtur.

§. 54. Confecto, ſcilicet, quadrante ACB, modo ſu- *Fig. IV.* prà deſcripto, cum pendulo CIG, infra connectatur ad angulos rectos, tabula ſeu regula EF ad quam firmatus ſit tubus recurvus $DEFH$, cujus ramus DE, multò ſit amplior quàm ramus FH, quem gracillum eſſe convenit, ut minimæ mutationi liquoris in tubo DE, ſatis magna

mutatio in tubo *FH* reſpondeat: tubus iſte liquore quodam ſeu argento vivo impleatur, præſtoque ſit obturaculum, quo tubus *DE* obſtrui poſſit, ſi reponatur ne liquor effluat.

§. 55. Ponamus liquorem, quando pendulum in ſitu verticali pendet, in *m* & *o* ſubſiſtere, ita ut recta *mo* tum ſit horizontalis. Quando autem pendulum extra ſitum verticalem verſatur, uti figurâ repreſentatur, in tubo ampliori *DE* liquor aliquantulùm aſcendet, in anguſtiori verò ſubſidet in *n*, ut jam recta *mn* ſit horizontalis. Mutatio in tubo ampliori hinc facta minima, & vix perceptibilis erit, cùm mutatio in anguſtiori, ſeu intervallum *no* ſit notabile.

§. 56. Quoniam igitur recta *mn*, ad veram lineam verticalem *CP* eſt normalis, angulus *omn*, erit æqualis angulo *GCP*, ſeu declinationi penduli à ſitu verticali. Cùm itaque punctum *o* conſtet ex mutatione in tubo *FH*, ſeu intervallo *no*, cognoſci poterit angulus *omn*, qui ab angulo *ACG* ſubſtractus, relinquet angulum *ACP* veram diſtantiæ ſtellæ à zenith menſuram. Tantùm igitur opus eſt, ut ad tubum *FH* diviſio in gradibus & minutis adſcribatur, quæ ſingulis punctis *n* reſpondeat, hocque aptiſſimè à perito artifice præſtabitur.

§. 57. Si amplitudo tubi anguſtioris *FH* præ ampliori *DE* evaneſcat, ramuſque *FH* ad baſin *EF* fuerit perpendicularis, tum intervallum *no* erit tangens anguli *omn*, ſi ſinus totus per *mo* exprimatur. Quare quò longior fuerit tubus *EF*, eò majora intervalla *no* iiſdem angulis declinationum reſpondebunt; ſin autem crus *FH* ad baſin *EF* inclinetur, eò magis intervalla *no* augebuntur, ſicque minimæ mutationes penduli à ſitu verticali ſatis ſenſibiliter exprimi poterunt.

§. 58. Ut autem liquor promtiſſimè ſe ſemper ad

æquilibrium componat, neque motu oſcillatorio obſervationem incertam reddat, tubi partem EF pariter multo ampliorem fieri conveniet tubo FH. Quò amplior enim fuerit hic tubus EF, eò celeriores erunt oſcillationes atque primo quaſi momento extinguentur.

§. 59. Pendulo ergo hac ratione inſtructo, uſus hujus quadrantis non diſcrepabit à præcedente. Firmato, ſcilicet, pendulo cochleâ, in ſitu à verticali CP parùm remoto, ſi ſummitas liquoris n in tubo FH accuratè notetur eo ipſo momento, quo obſervator ſtellam in interſectione ſpectat, cognoſcetur inde diſtantia lineæ verticalis veræ CP à loco penduli GI: unde angulus quæſitus ACP innoteſcet.

V.

Determinatio Meridiei.

§. 60. PRIMUM igitur ſol certiſſimus eſt index temporis veri, quo cognito, non difficulter inde tempus medium colligitur. Tempus autem à meridie numerari ſolet, ſeu ab eo momento quo ſolis centrum per meridianum loci, in quo verſamur, tranſit: unde ſi in mari meridianum dignoſcere liceret, obſervatio tranſitûs ſolis per meridianum facillimè momentum meridiei oſtenderet, neque ad hoc ullâ obſervatione altitudinis opus eſſet.

§. 61. Cùm autem linea meridiana minimè conſtet, verum meridiei momentum aliter definire nequit. Hinc circa meridiem cujus tempus ſaltem propè conſtare aſſumo, ſæpiſſimè altitudo ſolis obſervetur, inſtrumento vel conſueto, vel alio quod magis idoneum videbitur, quæ

quamdiu crescit, tempus adhuc antemeridianum indicat, simul ac verò decrescere incipit, pomeridianum declarat.

§. 62. Eo ergo momento, quo solis altitudo crescere desinit, atque decrescere incipit, meridies evenisse censendus est. Verùm quia altitudo solis in ipso meridie per notabile temporis intervallum insensibiliter mutatur, atque adhibitis etiam optimis instrumentis in observatione altitudinis error unius minuti committi potest, hoc modo nimis incertè momentum meridiei assignaretur. Interim tamen hæc observatio maximæ solis altitudinis non est intermittenda, cùm ex ea, ob declinationem solis cognitam, elevatio poli determinetur, cujus cognitio non solùm in universa navigatione maximi est momenti, sed etiam ad ipsam horam cognoscendam magnum adjumentum affert.

§. 63. Ad tempus ergo meridiei exactiùs definiendum præstabit duabus solis altitudinibus æqualibus uti, quarum altera ante, altera post meridiem sit facta, tum autem momentum medium inter has duas observationes meridiem indicabit sub his conditionibus; si primò solis declinatio non fuerit interea immutata; secundò si ipsa navis interea quieverit, ac tertiò si observationes nullis erroribus sint inquinatæ.

§. 64. Ante omnia igitur necesse est, ut hoc ipsum intervallum temporis, inter binas observationes elapsi exactè metiri valeamus, quod nisi id plures horas superet, fieri posse inter postulata est relatum. Nisi enim tempus per aliquod saltem intervallum ope clepsydræ seu automati exactè mensurari posset, tum ipsa temporis determinatio per observationes omninò esset inutilis, quia non tam determinatio unici cujusdam momenti, sed emendatio notabilis cujuspiam temporis intervalli desideratur.

§. 65. Quod jam ad tres antè memoratas circumstantias

attinet, ad quas attendi oportet, ſi meridiem ex duabus altitudinibus ſolis æqualibus determinare velimus; earum prima, quæ variatione ſolis declinationis continetur, jam ſatis eſt explorata, cùm habeantur tabulæ æquationis meridiei ad ſingulos gradus elevationis poli ſupputatæ, quibus differentia veri meridiei & momenti inter obſervationes medii indicatur. Quando autem intervallum obſervationum non quatuor horas ſuperat, quod aliæ quoque rationes prohibent, ne hac quidem correctione opus erit, cùm multo minor ſit, quàm errores qui in obſervationibus evitari nequaquam poſſunt.

§. 66. Altera difficultas, quæ à motu navis oritur, quæſtioni propoſitæ penitùs eſt propria; ad quam igitur removendam eò majorem operam adhibebo, quòd reliqua hujuſmodi obſervationum momenta in omnibus ferè elementis tradi ſolent, hæc verò obſervationum perturbatio à motu navis oriunda nuſquam ſatis diligenter explicata reperiatur. Quamquam autem accuratam itineris à nave confecti cognitionem inter poſtulata referre non licet, tamen quantùm navis intervallo aliquot horarum proceſſerit, ſatis exactè æſtimari poſſe, quantùm quidem ad horæ determinationem opus eſt, jure aſſumo.

§. 67. Ex æſtimatione igitur itineris, quod navis intervallo duarum illarum obſervationum, quibus eadem ſolis altitudo apparuit, ſatis accuratè colligi poteſt, quantùm tam longitudo, quàm latitudo navis interea fuerit mutata. Si enim noverimus quot milliaria anglica vel boream vel auſtrum versùs abſolverit, poli elevatio totidem minutis primis vel major vel minor evaſit, in hoc enim negotio mentem tutò, à ſphæroidica terræ figura abſtrahimus, quoniam minutiarum omiſſio, horæ determinationem non turbat.

§. 68. Deinde æquè facilè ex itinere æſtimatio judicatur,

quantùm navis vel ortum vel occasum versum secundùm circulum æquatori parallelum interea sit progressa. Ut autem hinc variatio longitudinis in minutis definiri possit, elevationem poli nosse oportet, cujus autem cognitio satis crassa ad hoc institutum sufficit. Si enim vel aliquot gradibus in elevatione poli erraverimus, tamen error qui inde in æstimationem variationis longitudinis redundat, omninò erit imperceptibilis.

§. 69. Quamquam autem navis plerumque in hoc intervallo tam longitudinem quàm latitudinem simul immutat, tamen utramque mutationem hîc seorsim perpendam. Si enim ostendero, quomodo conclusio ex observationibus respondentibus deducenda tam ratione longitudinis quàm latitudinis mutatæ corrigi debeat singulatim; his ambabus correctionibus simul uti oportebit quando navis interea tam longitudinem quàm latitudinem mutaverit. Interea autem declinationem solis invariatam considero, quia error inde oriundus jam est definitus.

§. 70. Ponamus ergo intervallo duarum illarum observationum solis, solam navis longitudinem esse mutatam, dato minutorum numero, latitudinem verò eandem mansisse. Sit in sphæra cœlesti P polus, & S locus solis immobilis, ita ut terra, quæ in centro hujus sphæræ posita concipiatur, ejus respectu circa axem spatio 24 horarum solarium giretur. Sit A zenith loci navis tempore primæ observationis, B verò zenith navis momento alterius observationis. Quia ergo in utroque situ tam eadem à polo distantia servatur, quàm utrinque eadem solis à zenith distantia observatur, erit $AP=BP$, & $AS=BS$. *Fig. V.*

§. 71. Hinc meridianus PS, angulum horarium APB bisecabit, unde sequitur tempore inter observationes medio, meridiem fuisse sub meridiano PCS; eo autem tempore navim sub ipso meridiano in C extitisse, siquidem

intereà motu uniformi fuerit ſecundùm longitudinem promota, perſpicuum eſt. Unde momento inter duas obſervationes medio meridies verus incidit ſub ipſo meridiano, ubi tum navis eſt verſata. Cùm enim navis zenith interea viam AB deſcripſerit cum motu proprio, tum motu toti terræ communi, & uterque motus ſit uniformis, neceſſe eſt navim tempore medio in ipſo puncto C hæſiſſe.

§. 72. Quò diſtinctiùs, quæ hinc conſequuntur, enunciare poſſimus, ponamus inter momenta obſervationum in A & B, elapſas eſſe quatuor horas, navemque interea ab occidente in orientem ſecundùm longitudinem abſol-[illegible]e unum gradum. Quando igitur navis in B verſatur, dicendum eſt ante bihorium meridiem incidiſſe, non ſub meridiano PB, ſub quo navis nunc eſt, ſed ſub meridiano PC, per quem navis ante duas horas tranſierit.

§. 73. Quia ergo navis intra hoc bihorium dimidium gradum ſecundùm longitudinem confeciſſe ponitur, quòd in tempore duo minuta prima, ſub meridiano BP, in quo navis nunc reperitur, ut pote orientaliori, neceſſe eſt ut meridies duobus minutis primis citiùs, hoc eſt, ante $2^h\ 2'$ eveniret, ita ut hoc momento in loco navis B, vera diei hora ſtatuenda ſit $2^h\ 2'$. Simili modo, dum navis tempore primæ obſervationis, in A hæſerat, horologia ſolaria indicare debuerunt $9^h\ 58'$ ante meridiem.

§. 74. Ex his ergo perſpicuum eſt quomodo ex dato intervallo duarum obſervationum & variatione longitudinis interea abſolutâ, tempus verum, quod, ſcilicet, horologia ſolaria indicarent, pro quovis loco navis medio definiri debeat. Atque ſi æquabilis temporis lapſus tam ante quàm poſt obſervationes, fuerit in ſolis & minutis ſolaribus animadverſus, etiam ea tempora ad horologia ſolaria emendari poterunt; ſiquidem mutationis longitudinis, quam navis continuò ſubit, ratio habeatur.

§. 75. Cùm igitur hæc ſatis ſint plana, atque biſectio temporis inter duas obſervationes elapſi, à variatione longitudinis non turbetur, videamus quantùm hoc negotium à mutatione latitudinis patiatur. Hîc quidem ſtatim liquet, correctionem multò fore difficiliorem, quoniam difficilis eſt ei, quæ ex mutatione declinationis ſolis oritur, eaque multò major fieri poteſt, cùm navis latitudo intervallo aliquot horarum, quæ inter obſervationes effluxerunt, ultra gradum mutari queat. Quocirca hanc correctionem multò minus negligi conveniet.

§. 76. Quod quò facilius fieri poſſit, quæramus primùm in loco fixo ex data altitudine ſolis tempus à meridie; ſcilicet, Z loci hujus zenith, P polus mundi, & S locus ſolis tempore obſervationis. Vocetur altitudo poli $= p$, cujus complementum eſt PZ, declinatio ſolis $= s$, cujus complementum $= PS$, ſiquidem declinatio ſolis fuerit ejuſdem denominationis ac latitudo loci, ſin minùs pro s, in calculo ponatur $-s$. Denique ſit altitudo ſolis obſervata $= a$, cujus complementum erit arcus ZS; atque angulus ZPS, qui tempus à meridie indicat, ſit $= X$, erit ex ſphæricis, poſito ſinu toto $= 1$; $cof. X = \frac{ſin. a - ſin. p\, ſin. s}{coſ. p\, coſ. s}$.

Fig. VI.

§. 77. Sit jam tempus inter binas obſervationes æqualium ſolis altitudinum interjectum, & ad arcum æquatoris reductum $= 2c$, altitudo ſolis in utraque obſervatione $= a$, & declinatio ſolis $= s$, quam pariter immutabilem aſſumo, quia error ex ejus variatione oriundus jam in tabulis æquationis meridiei indicatur. Sit elevatio poli tempore primæ obſervationis $= p$, ante meridiem, & elevatio poli tempore ſecundæ obſervationis poſt meridiem $= p + \pi$, ita ut navis interea per intervallum π propiùs ad polum acceſſerit.

§. 78. Jam quia navis ſub eodem meridiano moveri

ponitur & meridies non in medium momentum intervalli $2c$ incidit, ponamus arcum $c + z$ determinare tempus à prima observatione ad meridiem elapsum, erit $c - z$ tempus à meridie ad alteram observationem elapsum. Hinc duas obtinebimus æquationes:

$$\text{I. } \cos.(c + z) = \frac{\sin. a - \sin. p \sin. s}{\cos. p \cos. s}.$$

$$\text{II. } \cos.(c - z) = \frac{\sin. a - \sin.(p + \pi) \sin. s}{\cos.(p + \pi) \cos. s}.$$

quæ eliminata altitudine communi a dabunt:

$$\sin. p \,\tan g. s + \cos. p \cos.(c + z) = \sin.(p + \pi) \tan g. s + \text{[illegible]}\ \pi) \cos.(c - z).$$

§. 79. Cùm jam particulæ π & z præ p & c sint valdè parvæ, erit $\sin.(p + \pi) = \sin. p + \pi \cos. p$; $\cos.(p + \pi) = \cos. p - \pi \sin. p$; atque $\cos.(c + z) = \cos. c - z \sin. c$ & $\cos.(c - z) = \cos. c + z \sin. c$. Quibus valoribus substitutis, erit $2 z \sin. c \cos. p = \pi \cos. c \sin. p - \pi \cos. p \tan g. s$. Hincque $z = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{\tan g. p}{\tan g. c} - \frac{\tan g. s}{\sin. c} \right)$ unde ex data latitudinis mutatione π, angulus z facilè determinatur, qui in tempus conversus, indicabit quantùm ad medium intervallum observationum addi debeat, ut verum meridiei momentum obtineatur. Ad hoc autem elevationem poli p, proximè saltem nosse oportet; quia exiguus error in eâ commissus valorem ipsius z non sensibiliter afficit.

§. 80. Sit elevatio poli borealis $p = 48°$, declinatio solis borealis $17° 30'$, ideoque $s = + 17° 30'$, intervallum observationum sit $5^h 20'$, quod in angulum conversum dat $80°$, ita ut sit $c = 40°$; navis autem interea integro gradu propiùs ad polum accesserit, ut sit $\pi = 1°$, & in tempore $\frac{1}{2} \pi = 2'$. Jam calculus ita constituetur.

$$\begin{array}{lll} l.\,tang.\,p = 10{,}0455626 & l.\,tang.\,s = 9{,}4987223 & \frac{tang.\,p}{tang.\,c} = 1{,}323 \\ l.\,tang.\,c = 9{,}9238135 & l.\,sin.\,c = 9{,}8080675 & \frac{tang.\,s}{sin.\,c} = 0{,}490 \\ \overline{0{,}1217491} & \overline{9{,}6906548} & \qquad\qquad 0{,}833 \\ & & \tfrac{1}{2}\pi = \qquad 2 \\ & & z = 1',666 = 1'40''. \end{array}$$

Hoc ergo casu ad tempus medium inter observationes elapsum addi debet $1'40''$ ut prodeat verum meridiei momentum.

§. 81. Major prodit hæc correctio si declinatio solis satis sit australis, quia tum *tang. s*, signum contrarium obtinebit, sitque $z = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{tang.\,p}{tang.\,c} + \frac{tang.\,s}{sin.\,c}\right)$, cujus ut exemplum afferamus, sit altitudo poli $p = 60°$; declinatio solis australis $= 23°\,28' = -s$; intervallum observationum $= 3^h\,40'$, seu in angulo $= 55° = 2.c$; ideoque $c = 27°\,30'$; interea verò navis austrum versùs confecerit $36'$: erit $\pi = -36'$, & in tempore $\frac{1}{2}\pi = -1'\,12''$: unde calculus ita se habebit:

$$\begin{array}{lll} l.\,tang.\,p = 10{,}2385606 & l.\,tang.\,s = 9{,}6001181 & \frac{tang.\,p}{tang.\,c} = 3{,}327 \\ l.\,tang.\,c = 9{,}7164767 & l.\,sin.\,c = 9{,}6644056 & \frac{tang.\,s}{sin.\,c} = 0{,}862 \\ \overline{0{,}5220839} & \overline{9{,}9357125} & \qquad\qquad 4{,}189 \\ & & -\tfrac{1}{2}\pi = \quad -1\tfrac{1}{5} \\ & & z = -5',027 = -5'\,1''. \end{array}$$

Hoc ergo casu à momento inter observationes medio subtrahi debet $5'\,1''$, ut verum meridiei tempus habeatur.

§. 82. Possent hinc ad singulos gradus tum declinationis solis, tum elevationis poli pro præcipuis temporis intervallis tabulæ computari, quæ valores $\frac{tang.\,p}{tang.\,c} + \frac{tang.\,s}{sin.\,c}$ exhiberent, tum enim numeri hujus tabulæ per semissem variationis latitudinis $\frac{1}{2}\pi$ multiplicati & in tempus conversi, dabunt correctionem meridiei ex hoc capite necessariam. Sufficiat autem hîc regulam ad computum satis fidelem tradidisse, & cùm aliæ determinationes difficiliores

calculos requirant, hujuſmodi tabulis facilè carere poterimus.

§. 83. Antequam autem hoc argumentum deſeram, notaſſe conveniet ex illis duabus altitudinibus ſolis æqualibus facilè elevationem poli veram pro tempore meridiei aſſignari poſſe. Si enim p denotet hanc poli elevationem, eliminatâ ſupra littera Z, perveniet ad hanc æquationem, $\text{coſ.}\ c = \frac{\text{ſin.}\ a - \text{ſin.}\ p\ \text{ſin.}\ s}{\text{coſ.}\ p\ \text{coſ.}\ s}$, ſeu $\text{ſin.}\ a = \text{ſin.}\ s\ \text{ſin.}\ p + \text{coſ.}\ c\ \text{coſ.}\ s\ \text{coſ.}\ p$. Ex qua ſequenti modo, ut extractione radicis non ſit opus, valor p elicietur. Quæratur primò angulus v, ut ſit $\text{tang.}\ v = \frac{\text{ſin.}\ s}{\text{coſ.}\ c\ \text{coſ.}\ s}$, eritque $\text{ſin.}\ a = \text{coſ.}\ c\ \text{coſ.}\ s\ \text{tang.}\ v\ \text{ſin.}\ p + \text{coſ.}\ c\ \text{coſ.}\ s\ \text{coſ.}\ p = \frac{\text{coſ.}\ c\ \text{coſ.}\ s}{\text{coſ.}\ v}(\text{ſin.}\ v\ \text{ſin.}\ p + \text{coſ.}\ v\ \text{coſ.}\ p)$, ac porro $\frac{\text{ſin.}\ a\ \text{coſ.}\ v}{\text{coſ.}\ c\ \text{coſ.}\ s} = \text{coſ.}\,(p - v)$. Hinc ergo commodè innoteſcit angulus $p - v$, ex eoque porro altitudo poli quæſita p.

§. 84. Quamquam cognitio elevationis poli maximi eſt momenti, tamen ne nimis longè à quæſtione propoſitâ digrediar; neque hanc formulam uberiùs explico, neque in ſequentibus peculiarem operam, ad elevationem poli inveſtigandam adhibebo; ſed vel aliunde jam poli elevationem cognitam eſſe aſſumam, vel quomodo conjunctim cum hora diei ex obſervationibus concludi poſſit, docebo. Nunc igitur reſtat, ut inquiram quantùm determinatio meridiei ab ipſis obſervationum erroribus afficiatur, neque plures modos meridiem determinandi afferam, cùm omnes ſequentes modi horam diei determinandi ſimul ad meridiem reſpiciant, eumque definiant.

§. 85. Dum autem in turbationem ab ipſis obſervationum erroribus oriundam inquiro, reliquas anomalias omnes ſegrego, cùm quia eas jam ſum contemplatus, tum verò, quoniam, quid omnes conjunctim efficiant, ex

ſingulis ſeorſim concludi poteſt. Tam ſolis ergo declinationem, quàm ſitum navis immutabilem nunc conſidero, atque cùm in binas illas obſervationes duplex error irrepere poſſit, alter in altitudinibus ſolis, alter in æſtimatione intervalli temporis interea elapſi, utrumque pariter ſeorſim evolvam.

§. 86. Cùm igitur in utraque obſervatione, ſolis altitudo $= a$ putetur, ponamus diſcrimen inter ſolis altitudines eſſe $= \alpha$, ita ut, ſi altitudo primæ obſervationis fuerit $= a$, altitudo ſolis in altera obſervatione reverâ ſit $= a \pm \alpha$, denotabitque α errorem quem in obſervatione altitudinis committere poſſumus; hicque duplicatus eſſe poterit, ſi quidem altera in defectu, altera in exceſſu peccaverit. Unde ſi in una obſervatione duobus minutis errari queat, fieri poterit ut α fiat $= 4'$, quod tamen rariſſimè evenire cenſendum eſt.

§. 87. Ob hunc ergo errorem momentum meridiei à medio intervallo inter obſervationes elapſo pariter non nihil diſcrepabit. Sit ergo totum intervallum obſervationum in angulum converſum $= 2c$, & intervallum inter primam obſervationem & meridiem $= c + z$, erit intervallum à meridie ad ſecundam obſervationem $= c - z$. Unde ſi declinatio ſolis ſit $= s$, elevatio poli $= p$, habebuntur duæ ſequentes æquationes:

$$\text{I. } cof.\,(c + z) = \frac{fin.\,a - fin.\,p\,fin.\,s}{cof.\,p\,cof.\,s}.$$

$$\text{II. } cof.\,(c - z) = \frac{fin.\,(a \pm \alpha) - fin.\,p\,fin.\,s}{cof.\,p\,cof.\,s},$$

§. 88. Cùm jam ob z & α valdè parva, ſit $cof.\,(c + z) = cof.\,c - z\,fin.\,c$, & $cof.\,(c - z) = cof.\,c + z\,fin.\,c$, atque $fin.\,(a \pm \alpha) = fin.\,a \pm \alpha\,cof.\,a$. Si prorſus æquatio à poſteriori ſubtrahatur, relinquetur $2\,z\,fin.\,c = \frac{\pm \alpha\,cof.\,a}{cof.\,p\,cof.\,s}$, ideo-

que $z = \pm \frac{1}{2} \alpha \frac{cof.\, a}{fin.\, c\; cof.\, p\; cof.\, s}$: unde fi angulus $\frac{1}{2}\alpha$ in tempus convertatur, ftatim prodibit error meridiei z in tempore expreffus. Sic fi α æftimetur 5′, hoc in tempore dabit 20″, fietque $\frac{1}{2}\alpha = 10''$ temporis. Sit jam $2c = 2$ horas, feu angulus $c = 15°$, elevatio poli $p = 60°$, declinatio folis $s = 23° +$ altitudo $a = 6°$: reperietur $z = \pm 83''$. Quamquam ergo in hoc exemplo omnia obfervationem meridiei maximè perturbare affumta funt, tamen momentum meridiei tantùm ad 1′ 23″, incertum relinquitur.

§. 89. Quamvis igitur hunc errorem neque tollere ne[illegible]e emendare valeamus, tamen neceffe fuit noffe, quantùm [illegible]eterminatio meridiei impediatur; & quoniam reliquæ circumftantiæ majorem accurationem non admittunt, ut intra minutum primum de vero meridiei momento certi effe queamus; hunc errorem eò faciliùs negligere poterimus, quòd eo incertitudo veri momenti meridiei notabiliter non afficiatur.

§. 90. Quod denique ad errorem, qui forte in æftimatione temporis inter binas obfervationes elapfi, committitur, manifeftum eft, eo verum meridiei momentum à medio intervallo non removeri: neque ergo propterea correctione opus effet, etiamfi iftum errorem definire poffemus. Quamobrem methodo hîc expofita, verum meridiei momentum tam accuratè definiri poffe affumo, ut vix uno minuto primo à veritate aberret; valdèque dubito, an major certitudinis gradus obtineri queat. Multò tamen exactiùs definiri poterit, fi plures obfervationes fimul inftituantur, atque inter omnes conclufiones medium quoddam eligatur.



VI.

Determinatio horæ diei per obſervationes Solis.

§. 91. IN præcedenti articulo ad ſolum momentum meridiei reſpeximus, à quo reliquæ horæ tam diurnæ quàm nocturnæ ſunt numerandæ; nunc igitur docendum eſt, quomodo ex altitudinibus ſolis accuratè obſervatis, tam ante quàm poſt meridiem, vera diei hora colligi debeat, quæ, ſcilicet, ei meridiano, ſub quo navis tempore obſervationis verſatur, conveniat; perpetuò enim tenendum eſt eam horam requiri, quam exquiſitiſſimum horologium ſolare, ſi tali uti liceret, in eodem loco eodemque tempore eſſet indicaturum.

§. 92. Hîc ſtatim ſe offerunt duo caſus, prout elevatio poli vel cognita fuerit vel incognita. Declinationem enim ſolis, quæ in determinationem temporis ingreditur, perpetuò cognitam eſſe aſſumo. Namque ephemerides ſolis imprimis ad manus eſſe oportet, ex quibus ad quodvis momentum ejus loci ad quod ſunt computatæ, declinatio ſolis facilè colligitur. Etſi autem, ut idem ſub alio meridiano inde præſtari poſſit, differentiam meridianorum noſſe oportet, tamen vix unquam navis in ejuſmodi ſtatu verſatur, quin ejus longitudo ad aliquot gradus cognoſcatur. Error autem vel quindecim graduum hic commiſſus in declinatione ſolis nunquam errorem unius minuti parit; unde in hoc negotio declinationem ſolis omninò inter cognita referre licet.

§. 93. Ponamus ergo primò elevationem poli eſſe cognitam, ſive ea nunc demum ſit ex obſervationibus collecta

collecta, sive jam ante non nimis magnum tempus definita, ita ut variatio, quæ interea ob motum navis sit facta, ex æstimatione itineris satis exactè assignari queat. Cognitâ autem elevatione poli cum declinatione solis, ex observatione altitudinis solis facilè hora diei, sive antemeridiana sive pomeridiana determinatur. Si enim ponatur elevatio poli $= p$, declinatio solis borealis $= s$ (pro australi arcum s ejusque proinde sinum negativè accipi oportet, manente ejus cosinu), altitudo solis observata $= a$, & tempus à meridie in arcum æquatoris conversum $= x$, erit

$$cos. x = \frac{fin. a - fin. p \, fin. s}{cos. p \, cos. s}.$$

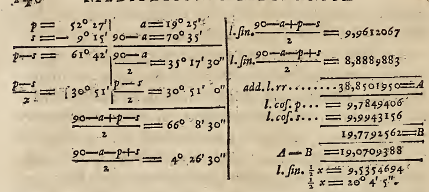
§. 94. Ex hac ergo formula definitur angulus x, qui in tempus conversus, quindecim gradus uni horæ tribuendo, habebitur vel hora antemeridiana vel pomeridiana tempore observationis, quorum utrum locum habeat, dubium esse nequit. Quò autem hic calculus faciliùs ope logarithmorum absolvi possit, quia est $fin. \frac{1}{2} x$

$$= \sqrt{\frac{cos. p \, cos. s + fin. p \, fin. s - fin. a}{2 \, cos. p \, cos. s}} = \sqrt{\frac{cos. (p - s) - fin. a}{2 \, cos. p \, cos. s}},$$

cum jam sit $\frac{cos. A - cos. B}{2} = fin. \frac{A + B}{2} \times fin. \frac{B - A}{2}$, & $fin. a = cos. (90° - a)$, erit $\frac{cos. (p - s) - cos. (90° - a)}{2} = fin. \frac{90° - a + p - s}{2} \cdot fin. \frac{90° - a - p + s}{2}$, ideoque habebitur $fin. \frac{1}{2} x =$

$$\sqrt{\frac{fin. \frac{90° - a + p - s}{2} \times fin. \frac{90° - a - p + s}{2}}{cos. p \, cos. s}} \, rr;$$ denotante r sinum totum, quem hactenus posui $= 1$.

§. 95. Quò usus hujus formulæ exemplo illustretur, sit elevatio poli $p = 52° \, 27'$, declinatio solis australis $- s = 9° \, 15'$, seu $s = - 9° \, 15'$, & observata sit ante meridiem altitudo solis $a = 19° \, 25'$, calculus ita se habebit.



$p = 52^\circ\ 27'$ | $a = 19^\circ\ 25'$
$s = -\ 9^\circ\ 15'$ | $90 - a = 70^\circ\ 35'$

$p - s = 61^\circ\ 42'$ | $\frac{90-a}{2} = 35^\circ\ 17'\ 30''$

$\frac{p-s}{2} = 30^\circ\ 51'$ | $\frac{p-s}{2} = 30^\circ\ 51'\ 0''$

$\frac{90-a+p-s}{2} = 66^\circ\ 8'\ 30''$

$\frac{90-a-p+s}{2} = 4^\circ\ 26'\ 30''$

$l.\mathit{sin}.\frac{90-a+p-s}{2} = 9{,}9612067$
$l.\mathit{sin}.\frac{90-a-p+s}{2} = 8{,}8889883$

add. $l.rr$ .... $38{,}8501950 = A$
$l.\mathit{cof}.p$ ... $= 9{,}7849406$
$l.\mathit{cof}.s$ ... $= 9{,}9943156$
$19{,}7792562 = B$

$A - B = 19{,}0709388$

$l.\mathit{sin}.\tfrac{1}{2}x = 9{,}5354694$
$\tfrac{1}{2}x = 20^\circ\ 4'\ 5''$.

Erit ergo $x = 40^\circ\ 8'\ 10''$, qui arcus in tempus conversus dat $2^h\ 40'\ 33''$, ita ut observatio facta sit $9^h\ 19'\ 27''$ tempore vero.

§. 96. Cùm autem in altitudine solis a error aliquot minutorum possit esse commissus, hinc hora inventa incerta reddetur; quanta ergo sit hæc incertitudo, operæ pretium erit indagare. Sit ergo altitudo solis vera $= a + \alpha$, ubi α errorem in observatione commissum denotet atque tempus à meridie in angulum conversum sit reverâ $x + \xi$, erit $\mathit{cof}.\,x = \frac{\mathit{fin}.a - \mathit{fin}.p\,\mathit{fin}.s}{\mathit{cof}.p\,\mathit{cof}.s}$, & $\mathit{cof}.(x + \xi) = \frac{\mathit{fin}.(a+\alpha) - \mathit{fin}.p\,\mathit{fin}.s}{\mathit{cof}.p\,\mathit{cof}.s}$. Jam quia ob α & ξ valdè parva, est $\mathit{cof}.(x + \xi) = \mathit{cof}.\,x - \xi\,\mathit{fin}.\,x$, & $\mathit{fin}.(a + \alpha) = \mathit{fin}.\,a + \alpha\,\mathit{cof}.\,a$; erit $\xi\,\mathit{fin}.\,x = \frac{-\alpha.\mathit{cof}.a}{\mathit{cof}.p\,\mathit{cof}.s}$ & $\xi = -\alpha\frac{\mathit{cof}.a}{\mathit{cof}.p.\mathit{cof}.s\cdot\mathit{fin}.x}$.

§. 97. Error igitur in tempus redundans eò erit major, quò 1. Minus observatio distet à meridie. 2. Quò major fuerit declinatio solis. 3. Quò major fuerit elevatio poli. Et 4. Quò minor sit altitudo solis. In exemplo ergo antè allato, quo erat $p = 52^\circ\ 27'$, $s = -9^\circ\ 15'$, $a = 19^\circ\ 25'$, & $x = 40^\circ\ 8'$, error erit $\xi = -2{,}433\ \alpha$. Unde si α seu error in altitudine commissus sit $= 5'$, seu in tempore $= 20''$, erit error in horæ determinationem inde ortus $= 48''$ qui, cùm integrum minutum non exhauriat,

facilè negligi poteſt, præſertim ſi error altitudinis infra $5'$ ſubſiſtat.

§. 98. Formula inventa $\xi = -\alpha \frac{cos. a}{cos. p\, cos. s\, sin. x}$ in ipſo meridie ubi $x = o$, errorem infinitum indicare videtur: ſed notandum eſt hoc caſu quia ξ præ x non ampliùs tanquam evaneſcens conſiderari poteſt, eam formulam non valere. Si enim ſit $x = o$, erit $sin. a = cos. p\, cos. s + sin. p\, sin. s = cos. (p - s)$, & $cos. a = sin. p\, cos. s - cos. p\, sin. s$. Cùm ergo ſit $cos. \xi = \frac{sin. (a+\alpha) - sin. p\, sin. s}{cos. p\, cos. s} = \frac{sin. a\, cos. \alpha + cos. a\, sin. \alpha - sin. p\, sin. s}{cos. p\, cos. s.}$, ob $cos. \xi = 1 - \frac{1}{2}\xi\xi$, $cos. \alpha = 1 - \frac{1}{2}\alpha\alpha$, & $sin. \alpha = \alpha$ erit $1 - \frac{1}{2}\xi\xi = \frac{cos. p\, cos. s + \alpha\, sin. (p-s)}{cos. p\, cos. s}$; ideòque $\xi\xi = \frac{-2\alpha\, sin. (p-s)}{cos. p\, cos. s} = -2\alpha\, (tang. p - tang. s)$. Sit $tang. p - tang. s = n$ poſito radio $= 1$, eritque $\xi\xi = 2 n \alpha$; (mutato ſigno erroris α) ponatur $\alpha = 5' = \frac{1}{12}{}^{\circ}$; & ob radium $1 = 57\frac{1}{3}{}^{\circ} = 3438'$, fiet $\xi = \sqrt{3438 o n}$ minus $= 186' \sqrt{n}$, & in tempore erit error $12'\, 24'' \sqrt{n}$. Qui error cùm nimis ſit magnus, ante peculiarem methodum meridiem inveniendi tradidi.

§. 99. Si in elevatione poli p error committatur, qui ſit dp, in angulo quoque horario x error naſcetur qui ſit dx, hicque ex differentiatione æquationis $cos. x = \frac{sin. a - sin. p\, sin. s}{cos. p\, cos. s}$ ponendis x & p variabilibus cognoſcetur, erit namque $-dx\ sin. x = \frac{-dp\, sin. s}{cos. s} + \frac{dp\, sin. p\, (sin. a - sin. p\, sin. s)}{cos. p^2\, cos. s}$, & $dx = \frac{dp\, (sin. s - sin. a\, sin. p)}{cos. p^2\, cos. s\, sin. x}$. Qui error iterùm, niſi circa ipſum meridiem, facilè tolerari poteſt, dummodo elevatio poli non nimis aberret.

§. 100. In ortu vel ocaſu ſolis, quem ſine inſtrumentis obſervare licet, dummodo refractionis ratio habeatur, quemadmodum illuſtriſſ. Dominus de Maupertuis, in

Aſtronomia Nautica docet, hora diei, ſiquidem elevatio poli & declinatio ſolis ſit nota, facillimè definietur. Cùm enim tum ſit $\alpha = o$, erit $\text{coſ.}\, x = \frac{-\text{ſin.}\, p\, \text{ſin.}\, s}{\text{coſ.}\, p\, \text{coſ.}\, s} = -\text{tang.}\, p\, \text{tang.}\, s$: unde ſi declinatio ſolis ſit borealis, fiet $x > 90^\circ$, contra verò minor & utroque caſu angulus x in tempus converſus, monſtrabit verum momentum vel ortûs ſolis vel occaſûs tempore.

§. 101. Quia hactenus altitudinem poli ſatis exactè cognitam aſſumſi, nunc ad alteram hujus ſectionis partem progrediar, inveſtigaturus quomodo horam diei per obſervationes ſolis definiri conveniat, ſi elevatio poli penitùs ſit incognita. Ac primo quidem liquet hoc per unicam ſolis obſervationem præſtari non poſſe, ſed ad minimum duas altitudines ſolis adhiberi debere. Hincque ergo non ſolùm ad tempus interea præterlapſum, ſed etiam ad variationem declinationis ſolis, & potiſſimùm ad mutationem loci, quam navis interea ſubierit, erit reſpiciendum, quibus rebus hæc determinatio non parum difficilis redditur.

§. 102. Ut has difficultates paulatim ſuperemus, ponamus primò navem ſitum non mutare, atque ex duabus altitudinibus ſolis, dato temporis intervallo, obſervatis, facilè invenietur verum tempus pro utravis obſervatione; ſive ſolis declinatio interea mutetur, ſive minus. Sit enim
Fig. VII. HOZ meridianus loci, in quo navis exiſtit, P polus, Z zenith, A & a loca ſolis binis obſervationum momentis, dabunturque arcus AP, aP quippe declinationum ſolis complementa, ſimulque ex tempore præterlapſo cognoſcitur angulus APa, præterea verò dantur arcus verticalium circulorum ZA, Za, ut pote altitudinum obſervatarum complementa.

§. 103. Jam per puncta A & a concipiatur ductus arcus

circuli maximi, quo quidem non via à sole percursa, præsentabitur, & in triangulo sphærico APa ex datis lateribus AP & aP, cum angulo intercepto APa invenietur latus Aa & anguli PAa, & PaA. Tum in triangulo AZa, cognitis omnibus lateribus, reperientur anguli ZAa, ZaA; ex quibus cum angulis PAa & PaA collatis, elicientur anguli ZAP & ZaP, hincque denique in triangulo ZAP, ob data latera ZA, PA & angulum ZAP, invenietur latus PZ complementum elevationis poli, & angulus ZPA, quo tempus alterius observationis à meridie indicabitur.

§. 104. Cùm igitur hic casus nihil habeat difficultatis, ponamus navem interea cursu suo tantùm longitudinem mutasse, ita ejus latitudo manserit eadem, perspicuum est angulum ad polum APa jam non ampliùs tempore inter observationes elapso mensurari, sed angulo ex hoc temporis intervallo deducto mutationem longitudinis vel esse addendam vel demendam, prout navis vel ab occidente in orientem vel ab oriente in occidentem feratur. Hoc autem angulo APa definito, reliqua definientur trigonometricè ut antè, reperieturque tam elevatio poli, quàm vera diei hora tempore utriusque observationis.

§. 105. Sin autem navis interea quoque latitudinem mutaverit, calculus aliquanto fiet difficilior atque ad formulam generalem suprà adhibitam primùm recurramus. Sit tempore primæ observationis elevatio poli $= p$; declinatio solis $= s$, altitudo solis observata $= a$, atque angulus horarius, seu qui verum tempus à meridie ejus loci, ubi terra nunc versatur, indicat, $= x$. Tempore secundæ observationis sit elevatio poli $= p + dp$, declinatio solis $= s + ds$; altitudo solis observata $= a'$, & angulus horarius verum tempus à meridie hujus loci, ubi navis nunc hæret, indicans $= x'$.

§. 106. Sit intervallum temporis harum duarum obſervationum jam more ſolito ad angulum horarium reductum $= v$; hocque tempore navis ſecundùm longitudinem ab occidente in orientem confecerit angulum $= \mu$; ſecundùm latitudinem verò boream versùs acceſſerit per angulum ν, ubi me non monente intelligitur, ſi navis vel in occidentem, vel auſtrum versùs, ſit progreſſa, tum vel $-\mu$ pro μ, vel $-\nu$ pro ν ſcribi oportere. Erit ergo $x' - x = v + \mu$, ideoque $x' = x + v + \mu$; & $dp = \nu$: atque ex formula ſuprà data colligitur, $cos. x = \frac{sin. a - sin. p \, sin. s}{cos. p \, cos. s}$ & $cos. x' = \frac{sin. a' - sin. (p + dp) \, sin. (s + ds)}{cos. (p + dp) \, cos. (s + ds)}$.

§. 107. Ex his quantitatibus cognitæ ſunt s, $s + ds$ declinatio, ſcilicet, ſolis in utraque obſervatione borealis; nam pro auſtrali hi anguli negativè ſunt accipiendi, porrò altitudines a & a' cum intervallo v, atque mutationes longitudinis & latitudinis μ & ν; manentque duæ incognitæ x & p definiendæ, quibus etiam binæ æquationes inventæ ſufficiunt. Poſterior autem æquatio, evolutis differentialibus, dat $cos. x' = \frac{sin. a' - sin. p \, sin. s}{cos. p \, cos. s} + \frac{dp \, (sin. a' sin. p - sin. s)}{cos. p^2 \, cos. s} + \frac{ds \, (sin. a' sin. s - sin. p)}{cos. p \, cos. s^2} = cos. (x + v + \mu)$. Quòd ſi jam hinc p eliminare velimus, ope æquationis $cos. x = \frac{sin. a - sin. p \, sin. s}{cos. p \, cos. s}$, reperietur quidem æquatio valorem anguli x definiens, ſed opus foret immenſum calculum inde adſtruere.

§. 108. Calculum autem multò faciliùs expedire poterimus, ſi modò azimuthum ſolis in alterutra obſervatione in computum ducamus, quod ſufficit circiter ſaltem noſſe, etiamſi error inde oriundus, ſi opus videatur, facilè corrigi queat. Beneficio autem acûs magneticæ azimutha non adeò ſunt incognita; ut non ad aliquod ſaltem gradus æſtimari queant, quod ad meum propoſitum ſufficit.

Sumto ergo polo P, formetur angulus $APa = v + \mu$, *Fig. VIII.* quem vocemus brevitatis gratiâ $= u$, capianturque $PA = 90° - s$, & $Pa = 90° - s - ds$. Hincque in triangulo sphærico APa definietur tertium latus Aa, cum angulis PAa, PaA.

§. 109. Sit porro angulus $ZPA = x$, erit PZH meridianus pro loco solis visi prioris, unde si fiat $PZ = 90° - p$, arcus ZA præbebit complementum altitudinis solis in prima observatione. Deinde cùm sit $ZPa = x + v + \mu$ erit $ZPa = x'$, ideoque circulus $HZPO$ referet quoque meridianum respectu loci solis a in posteriori observatione. Quare si capiatur $Pz = 90° - p - dp$, repræsentabit arcus za complementum altitudinis solis in posteriori observatione: sicque habebitur $ZA = 90° - a$, & $za = 90° - a'$, atque $Zz = dp = v$.

§. 110. Sit jam azimuthum in posteriori observatione, seu angulus $Hza = \theta$, quem proximè saltem cognitum esse pono; & ex Z ad az ducatur perpendiculum Zu, erit $zu = v\ cos.\ \theta$. Concipiatur ductus arcus circuli maximi Za erit $Za = au = 90° - a' - \frac{v}{u}\ cos.\ \theta$, atque ob cognita in triangulo AZa tria latera, invenientur anguli ZAa & ZaA; & ob $Zu = v\ sin.\ \theta$, erit angulus $Zaz = \frac{v\ sin.\ \theta}{cos.\ a'}$; ideoque & angulus zaA erit datus.

§. 111. Nunc in triangulo Paz dantur latera $Pa = 90° - s - ds$, $za = 90° - a'$, & angulus $zaP = PaA = zaA$, hincque reperientur primò latus Pz complementum latitudinis navis in posteriori observatione, deinde angulus $aPz = x + v + \mu$, & proinde angulus $APZ = x$, seu tempus verum in utraque observatione. Præterea verò elicietur angulus Pza, qui si notabiliter discrepare deprehendatur ab assumto azimutho θ, is loco θ jam substituatur, idemque calculus repetatur. Hocque

pacto per merum calculum geometricum, cujus præcepta ubique exstant, hoc problema aliàs difficillimum facilè resolvetur.

§. 112. Problema ergo hoc in navigatione utilissimum; quo ex observatis duabus altitudinibus solis, & tempore interea elapso, hora diei cum elevatione poli quæritur, ita hîc solutum dedi, ut calculus ob ipsius navis motum vix molestior reddatur. Etsi ergo sæpissimè variatio latitudinis $Z z$ tam parva est, ut tutò omitti posset, tamen ejus quoque ratione habitâ calculus non turbatur; quamobrem cùm hæc operatio magis contrahi nequeat ut vulgaribus regulis Trigonometriæ absolvetur, ne exem[illegible] quidem ad ejus illustrationem opus esse judi[illegible]que ad observationes nocturnas, in quibus crepusculares simul sum complexus, progrediar.



VII.

Determinatio horæ nocturnæ, si elevatio Poli sit data.

§. 113. NOCTU igitur verum tempus ex altitudinibus ſtellarum, ſive fixarum ſive inerrantium concludi debet, quarum tam declinationes quàm aſcenſiones rectas ad quodvis tempus cognitas eſſe aſſumo; neque ergo hic ejuſmodi methodis quæ ad obſervationes ſtellarum incognitarum ſunt accommodatæ, immorabor. Stellæ autem fixæ hoc præ ſole gaudent commodo, quòd perpetuò (ſaltem quamdiu iter navis durat) eandem declinationem conſervent: ſin autem planetæ adhibeantur, variationis quoque quam in declinatione patiuntur, quoties opus fuerit, ratio erit habenda.

§. 114. Ad manus ergo eſſe pono catalogum præcipuarum ſtellarum fixarum, in quo ſingularum declinationes & aſcenſiones rectæ ad id tempus, quo navigatio ſuſcipitur, ſint expreſſæ. Præterea verò quoque in promtu eſſe debent ephemerides planetarum ad præſentem annum computatæ; ex quibus non ſolùm eorum declinationes & aſcenſiones rectæ, ſed etiam harum rerum variationes diurnæ cognoſci queant. Imprimis autem, ut jam notavi, obſervatorem inſtructum eſſe oportet, ephemeridibus ſolaribus, quoniam omnia tempora ad ſolem referri ſolent.

§. 115. Cùm quælibet ſtella fixa ad eundem meridianum revertatur poſt $23^h\ 56'\ 4''$, dum ſol ſecundùm motum medium eandem periodum abſolvit tempore 24

horarum, si illud temporis intervallum $23^h\ 56'\ 4''$ in 24 partes æquales dividatur; hæ partes horæ sidereæ appellari solent ad distinctionem horarum communium, quæ ex motu solis definiuntur; eritque hora siderea ad horam solarem ut 86164 ad 86400, seu proximè ut 365 ad 366, unde conversio horarum siderearum in solares nihil habebit difficultatis & contrà.

§. 116. Ascensiones rectæ à principio arietis secundùm signorum ordinem numerari solent, unde cujusque stellæ ascensio recta indicat, quanto ea temporis intervallo post initium arietis ad eundem meridianum appellat. Hoc, scilicet, tempus in horis sidereis exprimitur, si quindeni gradus ascensionis rectæ in unam horam computentur: vel si 360° pro $23^h\ 56'\ 4''$ sumatur, prodibit tempus in horis solaribus expressum. Quia porro in ephemeridibus appulsus principii arietis ad meridianum assignari solet, hinc verum tempus quo quævis stella fixa ad meridianum venit, innotescet.

§. 117. Hoc quoque tempus hujusmodi tabulis deficientibus hoc modo colligitur, subtrahatur ascensio recta solis, quam ipso meridie proximè elapso tenuit, ab ascensione recta stellæ, & residuum in horas sidereas conversum dabit tempus, quo hæc stella per meridianum transiit, in horis sidereis expressum, quas deinde in horas solares mutare convenit. Vel cùm tabulæ habeantur, quæ differentias ascensionum rectarum in horis solaribus exhibeant, & vicissim cujusmodi in *Notitiâ temporum*, quæ Parisiis quot annis edi solet, *pag.* 93 *&* 94, est inserta, ejus ope cujusque stellæ appulsus ad meridianum in horis solaribus statim reperitur; sicque horis sidereis carere poterimus.

§. 118. In ephemeridibus porro ascensio recta solis ad meridiem ejus loci, ad quem sunt computatæ, exhibetur: unde si ejus variatio diurna spectatur, pro quovis alio

meridiano, cujus differentia ab illo constat, ipso meridiei momento ascensio recta solis concludetur. Neque verò ad hoc accuratâ longitudinis cognitione opus est, cùm error 15° in longitudine commissus, in ascensione recta tantum 2′ circiter producat. In navigatione autem vix unquam longitudo loci adeò incerta esse solet, ut ex hoc capite error sit metuendus.

§. 119. Cùm igitur tempus sit cognitum, quo quævis stella fixa ad meridianum ejus loci ubi navis versatur appellet, si ipsum transitum cujuspiam stellæ fixæ per meridianum observare liceret, tum eo momento vera diei hora haberetur, sed jam suprà animadverti observationes transituum per meridianum nimis esse incertas quàm ut eæ ad temporis determinationem adhiberi possent. Interim tamen plurimùm proderit culminationes stellarum seu maximas earum altitudines observare, quia inde ob earum declinationem cognitam elevatio poli certissimè colligi potest. Quod ad modos in hac sectione tradendos eo magis erit necessarium, quia hîc elevationem poli cognitam assumo.

§. 120. Ad verum ergo tempus definiendum stellas eligi oportet, quæ jam à meridiano sunt remotiores; ubi primùm attendendùm est, utrùm ad meridianum accedant, an verò jam versùs occasum inclinent; seu an observatio ante ejus appulsum ad meridianum, an post instituatur. In qua quidem dijudicatione nullus est metuendus error. Deinceps autem fusiùs investigabo, quænam stellæ fixæ, si quidem delectus concedatur, ad hoc institutum sint aptissimæ.

§. 121. Observetur ergo instrumento, quod maximè idoneum videbitur, stellæ cujuspiam fixæ, cujus ascensio recta ac declinatio sit cognita, distantia à zenith ZS quæ sit $= a$. Tum sit elevatio æquatoris, seu distantia poli à Fig. VI.

zenith $PZ = p$, & diſtantia ſtellæ à polo $PS = s$ quæ ex ejus declinatione habetur : atque in triangulo ſphærico PZS omnia latera erunt cognita, unde ſi angulus horarius ZPS vocetur $= x$, erit $cos. x = \frac{cos. a - cos. p\, cos. s}{sin. p\, sin. s}$.

§. 122. Invento ergo hinc angulo x, inſtituatur hæc proportio ut $360°$ ad $23^h\ 56'\ 4''$, ita angulus x, ad tempus in horis ſolaribus expreſſum, quod tempori, quo eadem ſtella fixa per meridianum tranſire fuerit reperta, vel additum vel demtum, prout obſervatio vel poſt vel ante ſtellæ culminationem fuerit inſtituta, dabit verum tempus ſolare, tempore obſervationis.

§. 123. Quo autem in hoc calculo commodius logarithmis uti liceat, quæratur ſemiſſis anguli x, nam ob $sin. \frac{1}{2} x = \sqrt{\frac{1 - cos. x}{2}}$, erit $sin. \frac{1}{2} x = \sqrt{\frac{sin. p\, sin. s + cos. p\, cos. s - cos. a}{2\, sin. p\, sin. s}}$ $= \sqrt{\frac{cos. (p - s) - cos. a}{2\, sin. p\, sin. s}}$. At eſt $cos. (p - s) - cos. a = 2\, sin. \frac{p - s + a}{2}\, sin. \frac{a - p + s}{2}$, unde erit $sin. \frac{1}{2} x = \sqrt{\frac{sin. \frac{a + p - s}{2}\, sin. \frac{a - p + s}{2}}{sin. p\, sin. s}}$. Hincque commodè per calculum elicietur angulus $\frac{1}{2} x$.

§. 124. Ponamus anno 1743 Maii die 11 veſperi, navem in loco verſari, cujus longitudo Pariſiis occidentem versùs æſtimatur circiter $55°$, & elevatio poli inventa ſit $32°\ 24'$, atque ſtellæ urſæ majoris α ſignatæ altitudinem obſervari $51°\ 8'$ poſt ejus culminationem, quæriturque pro momento obſervationis verum tempus.

§. 125. Ex ephemeridibus igitur primò reperitur pro meridie diei 11 Maii anno 1743, ſub meridiano Pariſienſi, aſcenſio recta ſolis $47°\ 49'\ 37''$, quæ intervallo unius diei creſcit $58'\ 37''$. Quia jam locus navis æſtimatur $55°$ occidentalior, dum ſol per ejus meridianum tranſiit, erat ejus aſcenſio recta major, ſcilicet $= 47°\ 49'\ 37''$

$+ \frac{55}{360} \cdot 58' 37'' = 47^\circ 58' 34''$, ſtellæ autem α urſæ majoris invenitur declinatio borealis $= 63^\circ 8' 22''$, & aſcenſio recta $= 161^\circ 54' 55''$, à qua ſubtrahatur, aſcenſio recta ſolis $= 47^\circ 58' 34''$ remanet $113^\circ 56' 21''$ quod in tempus ope tab. *pag.* 93, *Not. temp.* converſum dat $7^h 34' 29''$, ita ut hæc ſtella die propoſito veſperi horâ ſeptimâ $34' 29''$ per meridianum loci, ubi navis eſt tranſierit.

§. 126. His præparatis in triangulo ſphærico PZS, erit elevatio æquatoris $PZ = p = 57^\circ 36'$, diſtantia ſtellæ à polo $PS = s = 26^\circ 51' 38''$, & diſtantia ſtellæ à zenith obſervata $ZS = 38^\circ 52' = a$: unde calculus ita adornabitur.

$p = 57^\circ 36' 0''$	$\frac{1}{2} a = 19^\circ 26' 0''$
$s = 26^\circ 51' 40''$	$\frac{p-s}{2} = 15^\circ 22' 10''$
$p - s = 30^\circ 44' 20''$	$\frac{a+p-s}{2} = 34^\circ 48' 10''$
$\frac{p-s}{2} = 15^\circ 22' 10''$	$\frac{a-p+s}{2} = 4^\circ 3' 50''$

log. ſin. $\frac{a+p-s}{2} = 9{,}7564485$	Hinc ergo invenitur.
l. ſin. $\frac{a-p+s}{2} = 8{,}8504550$	$\frac{1}{2} \chi = 19^\circ 0' 10''$
cum quadr. radii $= 38{,}6069035$	$\chi = 38^\circ 0' 20''$
l. ſin. $p = 9{,}9265112$	quod in tempus per tab. 93 alleg. converſum dat ;
l. ſin. $s = 9{,}6549744$	
$19{,}5814856$	30° . . . . $1^h 59' 40''$
	8° . . . . $31' 53''$
divid. per 2 . . . . $19{,}0254179$	20'' . . . . $1''$
l. ſin. $\frac{1}{2} \chi = 9{,}5127089$	Tempus $2^h 31' 34''$

§. 127. Cùm ergo ſtella α urſæ majoris ad meridianum appulerit tempore $7^h 34' 29''$, atque obſervatio nunc tardiùs facta fuiſſe inventa ſit $2^h 31' 34''$; ſi hunc numerum ad illum addamus, habebimus verum tempus pro ipſo obſervationis momento, ſcilicet, $10^h 6' 3''$ poſt meridiem

diei 11 Maii. Perſpicuum autem eſt hunc calculum multùm fore ſuccinctiorem, ſi explicationes hîc adjectæ omittantur. Neque etiam opus eſſe arbitror applicationem formulæ datæ oſtendere, ſi vel arcus Ps $90°$ ſuperet, vel navis in hemiſpherio telluris auſtrali verſetur, quia has circumſtantias eum, qui calculum ſuſcipit probè noſſe oportet.

§. 128. Si in altitudine ſtellæ error quidam fuerit commiſſus, tempus quoque inde concluſum, ſeu angulus x erit erroneus, cujus error facilè reperietur, ſi æquatio $cof. x = \frac{cof. a - cof. p\, cof. s}{ſin. p\, ſin. s}$ differentietur poſitis x & a variabilibus; unde fiet $dx\, ſin. x = \frac{da\, ſin. a}{ſin. p\, ſin. s}$. Hincque $dx = da \frac{ſin. a}{ſin. p\, ſin. s\, ſin. x}$. Quare ſi in altitudine error committatur $= da$, inde in angulum horarium x influet error $dx = da \frac{ſin. a}{ſin. p\, ſin. s\, ſin. x}$ ſeu poſito $\frac{ſin. a}{ſin. p\, ſin. s\, ſin. x} = n$, ſi ſit $da = 5'$, erit $dx = n\, 5'$: hincque in tempore orietur error $20\, n''$.

§. 129. Quò ergo hic error minimè ſit perceptibilis, requiritur primò ut angulus horarius x ſatis ſit notabilis; atque ut ſtella à polo 90 gradibus diſtet, ſeu prope æquatorem ſit ſita: tum verò ut ſtella tam parum à zenith diſtet, quàm prima conditio permittit. Utrique enim ſimul ſatisfieri nequit, quia quò major capitur angulus x, eò major quoque diſtantia ſtellæ à zenith evadet.

§. 130. Videamus ergo in quonam circulo horario data ſtella obſervari debeat, ut coefficiens $n = \frac{ſin. a}{ſin. p\, ſin. s\, ſin. x}$, ſeu tantùm fractio $\frac{ſin. a}{ſin. x}$ fiat minima. Hoc autem evenit ſi $da\, cof. a\, ſin. x = dx\, ſin. a\, cof. x$. At eſt $dx = \frac{da\, ſin. a}{ſin. p\, ſin. s\, ſin. x}$; ergo fit $cof. a = \frac{ſin. a^2\, cof. x}{ſin. p\, ſin. s\, ſin. x^2}$, ſeu $cof. a\, ſin. p\, ſin. s - cof. a\, ſin. p\, ſin. s\, cof. x^2 = ſin. a^2\, cof. x$, ubi ſi valor loco $cof. x$ ſubſti-

tuatur, invenietur $\frac{cof. a}{1+cof. a^2} = \frac{cof. p \, cof. s}{cof. p^2 \, cof. s^2}$; hincque duplex valor prodit, vel $cof. a = \frac{cof. p}{cof. s}$, vel $cof. a = \frac{cof. s}{cof. p}$, quorum prior eligendus eſt ſi $p > s$, poſterior ſi $p < s$.

§. 131. Sit igitur $cof. a = \frac{cof. p}{cof. s}$, erit $fin. a = \frac{\sqrt{(cof. s^2 - cof. p^2)}}{cof. s}$ & $cof. x = \frac{cof. p \, fin. s}{fin. p \, cof. s}$, atque $fin. x = \frac{\sqrt{(cof. s^2 cof. p^2)}}{fin. p \, cof. s}$, hincque fit $n = \frac{1}{fin. s}$, qui valor fit minimus ſi $s = 90°$, ſed tum fieri nequit $p > s$. Quare propoſitâ ſtellâ quâcunque, eam tum obſervari conveniet, quando fuerit vel $cof. a = \frac{cof. p}{cof. s}$ vel $cof. a = \frac{cof. s}{cof. p}$. Cùm autem ſtellæ in æquatore ſitæ ſint aptiſſimæ, ſi qua earum eligatur, fiet $s = 90°$, & $n = \frac{fin. a}{fin. p \, fin. x}$; qui valor minor fieri nequit quàm ſi $fin. x$ ſit maximus; quod evenit, ſi hæc ſtella prope circulum horarium ſextæ horæ obſervetur; hæcque eſt tutiſſima regula ad tempus quàm exactiſſimè inveniendum.

§. 132. Sin autem in altitudine poli fuerimus decepti, videamus cujuſmodi obſervationes inſtituere oporteat, ut determinatio temporis inde quàm minimè turbetur. In hunc finem differentiemus æquationem $cof. x = \frac{cof. a - cof. p \, cof. s}{fin. p \, fin. s}$, ponendis x & p variabilibus, reperieturque $- dx \, fin. x = \frac{dp \, cof. s}{fin. s} - \frac{dp \, cof p \, (cof. a - cof. p \, cof. s)}{fin. p^2 \, fin. s}$, ſeu $dx \, fin. x = \frac{dp \, (cof. a \, cof. p - cof. s)}{fin. p^2 \, fin. s}$.

§. 133. Manifeſtum ergo eſt errorem in tempus hinc redundantem penitùs evaneſcere, ſi ſit $cof. s = cof. a \, cof. p$, ſeu $cof. a = \frac{cof. s}{cof. p}$. Quòd ſi ergo ſtella in æquatore eligatur, hic error evitatur, ſi ſtella in ipſo horizonte obſervetur, quod cùm congruat cum horario ſexta horæ pro

hac ſtellâ, quæ conditio antè eſt requiſita, perſpicuum eſt utrique incertitudini optimè occurri, ſi ſtella non longè ab æquatore remota prope horizontem obſervetur.

§. 134. Cùm autem prope horizontem refractiones nimis ſint magnæ, atque rarò ſtellas in hac regione diſtinctè cernere liceat, facilè intelligitur regulam inventam pro circumſtantiis quàm proximè tantùm eſſe obſervandam, & quia fieri nequit $a = 90°$; eligatur ſtella declinationis cujuſdam borealis, verbi gratiâ 15°, & æquatio $cos.\ a = \frac{cos.\ s}{cos.\ p} = \frac{sin.\ 15°}{cos.\ p}$, dabit altitudinem hujus ſtellæ obſervandam, quâ non ſolùm error ex erronea elevatione poli oriundus penitùs tollitur, ſed etiam, qui ex minùs accuratâ obſervatione naſcitur, minimus redditur; ſuprà enim §. 129 elicuimus quoque hanc æquationem $cos.\ a = \frac{cos.\ s}{cos.\ p}$.

§. 135. Sub quavis ergo elevatione poli hoc judicium quænam ſtella optimo cum ſucceſſu ad obſervationem eligatur, facilè inſtituitur. Primùm enim diſpiciatur, quà exigua altitudine ſtella diſtinctè obſervari poſſit, cujus altitudinis complementum vocetur $= a$; tum quæratur s, ut ſit $cos.\ s = cos.\ a\ cos.\ p$, & inter ſtellas quæ à zenith intervallo $= a$, remotæ æſtimantur, eligatur una, cujus diſtantia à polo ſit proximè $= s$. Hancque ſtellam diligenter obſervando, dico concluſionem temporis inde deductam quàm minimè à vero eſſe aberraturam. Hoc autem modo quæſtioni propoſitæ ex aſſe ſatisfactum eſſe arbitror.



VIII.

VIII.

Determinatio horæ nocturnæ, ſi elevatio poli ſit incognita.

§. 136. QUANDO elevatio poli eſt incognita, ſicque præter tempus verum quoque ipſam poli elevationem inveſtigare debemus, manifeſtum eſt, ad hoc duabus obſervationibus opus eſſe, vel ejuſdem ſtellæ vel duarum diverſarum; unde in hac ſectione mihi duæ quæſtiones erunt pertractandæ. Altera, quomodo ex obſervatis ejuſdem ſtellæ duabus altitudinibus cum tempore interea elapſo vera hora inveniri debeat; altera verò quomodo ex obſervatis duarum ſtellarum altitudinibus vel ſimul vel ſucceſſivè, ita ut intervallum temporis ſit cognitum, verum tempus ſit definiendum.

§. 137. Quamvis hæc problemata inſignem habeant utilitatem, tamen iis carere poſſemus, cùm ipſa poli elevatio non difficulter tam craſſo modo uti in ſectione præcedente aſſumſimus, æſtimari queat, atque ad id vix opus ſit inſtrumentis. Deinde etiam putaverim nunquam intermittendas eſſe obſervationes, ex quibus elevatio poli concludi poſſit, ſicque vix evenire poterit ut quoties ſtellæ ſint conſpicuæ, elevatio poli ſit ignota; niſi fortè poſt longam turbidam tempeſtatem nubes diſſipare incipiant, ſtellaſque aliquot tranſmittant, quo caſu neque elevatio poli cognita, neque ſi ſatis accuratè æſtimari poſſet, delectus ſtellarum ad obſervandum permitteretur.

§. 138. Quod igitur ad prius problema attinet, quo eadem ſtella bis interjecto quodam temporis intervallo

cognito obſervatur, ſolutio omninò ſimilis erit ei, quam ſuprà pro determinatione temporis ex duabus altitudinibus ſolis ſucceſſivè obſervatis tradidi. Quamquam hoc problema caſu antè allato, quo cœlum plerumque nubibus eſt velatum, nullum uſum habere poteſt, propterea quod ignoramus, quamnam ſtellam poſt aliquot tempus iterùm ſimus viſuri. Tum verò hic modus nimis prolixum calculum requirit, ut equidem mallem alio modo uti, dummodo liceret. Interim tamen ſolutionem hujus problematis, ne ullam quæſtionis partem prætermiſiſſe videar, breviter exponam.

§. 139. Primùm igitur ſtella obſervata vel erit fixa, vel planeta; priori caſu ejus aſcenſio recta, & declinatio manebit invariata; poſteriori verò inquirendum eſt, quantùm utraque intervallo temporis inter obſervationes elapſi ſit mutata, quod ex ephemeridibus facilè colligitur. Deinde etiam ex æſtimatione itineris diſpiciendum eſt, quantùm navis tam longitudo quàm latitudo interea immutetur. Inveſtigetur porro verum temporis momentum, quo ſtella per meridianum alterius loci, quo navis tempore alterutrius obſervationis eſt verſata, tranſeat, unde ſimul ex variatione longitudinis navis & aſcenſionis rectæ ſtellæ, ſi fuerit planeta, verum culminationis tempus ſub altero meridiano patebit.

§. 140. His præparatis, ſit AP diſtantia ſtellæ à polo in prima obſervatione, aP in altera: ac definiatur angulus APa rite, tam ex intervallo temporis, quàm ex mutationibus aſcenſionis rectæ, ſi ſtella fuerit planeta, & longitudinis navis, ſcilicet, tempus inter obſervationes elapſum convertatur in angulum per *pag.* 94 Notitiæ temporum Pariſinæ. Ab eo vel ſubtrahatur, vel addatur variatio aſcenſionis rectæ, prout ea interea vel creſcat vel decreſcat. Mutatio autem longitudinis navis addatur, ſi curſus in

Fig. VIII.

orientem sit directus, contra verò subtrahatur, hocque modo habebitur verus angulus ad polum APa.

§. 141. Per puncta A & a ductus concipiatur arcus circuli maximi Aa, & in triangulo sphærico APa, ex datis lateribus AP, aP, cum angulo intercepto APa, quærantur anguli PAa, PaA cum latere Aa. Deinde sit APZ angulus verus horarius pro tempore primæ observationis, eritque aPZ angulus horarius pro tempore secundæ observationis quæ ad eundem meridianum $HZPO$ sit perducta, dum variatio longitudinis jam in angulo APa est inclusa, superest ergo ut positio hujus meridiani $HZPO$ respectu arcuum AP & aP definiatur.

§. 142. Capiatur PZ æqualis complemento elevationis poli in prima observatione, & Pz complemento elevationis poli in observatione altera, etsi utraque est incognita; quo facto erit arcus ZA distantia stellæ à zenith in prima observatione, & za in altera; ideoque utraque per observationes dantur. Erit ergo Zz variatio latitudinis, quam navis interea subiit, ideoque cognita, quæ plerumque valdè erit parva & pro nihilo haberi poterit. Primò autem hoc intervallum reverâ rejiciam, quo calculus faciliùs institui queat, & deinceps in errorem inde oriundum inquiram.

§. 143. Incidat ergo z in Z, ut sit $Za = za$, & quia in triangulo AZa dantur singula latera, AZ, aZ & Aa, hinc colligentur anguli ZAa, ZaA, & quia jam antè inventi sunt anguli PAa, PaA, hinc innotescent anguli ZAP, ZaP, unde in utroque triangulo ZAP, ZaP tres res erunt cognitæ; sufficiet autem alterum ZaP evolvisse, in quo ob data latera aZ, aP cum angulo ZaP reperientur, 1. Latus PZ, complementum elevationis poli. 2. Angulus aPZ, ex eoque angulus APZ. Et 3. angulus azimuthalis PZa.

§. 144. Quod si jam variatio latitudinis Zz alicujus momenti esse videatur, quia invenimus angulum PZa, ei proximè æqualis erit angulus Pza; sufficit autem hunc angulum propemodum tantùm nosse. Ex Z ad za demittatur perpendiculum Zu, positoque angulo $Zzu = \theta$, erit $zu = Zz . cos. \theta$: quo ablato ab aZ remanebit au, cui aZ est æqualis. Jam posito hoc valore aZ loco ejus, quo antè sum usus, calculus in §. præced. præscriptus repetatur, ut tam vera elevatio poli ex PZ & tempus quæsitum ex angulo APZ vel aPZ concludi queat.

§. 145. Angulus, scilicet, APZ hoc modo inventus in tempus convertatur per tab. *p.93*, Not. temp. hocque tempus ad tempus culminationis stellæ sub meridiano primæ observationis addatur, vel ab eo subtrahatur, prout observatio vel post, vel ante ejus culminationem fuerit instituta, sicque habebitur tempus verum solare pro momento primæ observationis; unde facilè angulum APa similiter in tempus convertendo, deducetur verum tempus pro momento posterioris observationis.

§. 146. Patet ergo hoc problema, quod si calculo analytico aggredi velimus, in intricatissimos calculos nos seduceret, sine ulla difficultate, per sola præcepta Trigonometriæ solvi posse, neque solutionem variationibus tam ascensionis rectæ & declinationis stellæ, quàm longitudinis ac latitudinis navis; quæ res alioquin calculum summoperè impedire videantur, quicquam perturbari, ita ut in hoc negotio major calculi sublevatio exspectari quidem possit.

§. 147. Alterum problema, quo tempus ex duabus observationibus duarum stellarum vel simul vel successivè factarum determinare jubemur, maximam sæpe utilitatem habere videtur, quando inter nubes tantùm hinc inde stellæ transparent, tum enim, vel simul vel successivè

duarum ſtellarum altitudines obſervari poterunt, dum fortè eadem ſtella non ampliùs denuò ſe ſpectandam offerat, neque propterea priori problemati locus concedatur. Commodo autem uſu venit, ut ſolutio hujus problematis non difficilior evadat quàm præcedentis.

§. 148. Excerptis ergo duarum ſtellarum, quas obſervamus tam aſcenſionibus rectis, quàm declinationibus, definiantur earum tempora culminationis, pro meridiano ſub quo navis tum verſatur, atque ſi intervallum obſervationum ſatis ſit notabile, ſimul variationis longitudinis, quæ in mari evenerit, ratio habeatur, quemadmodum ſuprà eſt præceptum, ſimul verò in utraque obſervatione notetur, utrùm ante an poſt culminationem inſtituatur.

§. 149. Si ambæ obſervationes eodem momento inſtituantur, tum differentia aſcenſionum rectarum dabit angulum ad polum *APB*, ſin autem ab obſervatione ſtellæ *A*, ad obſervationem ſtellæ *B*, tempus quoddam ſit præterlapſum, tum id in angulum convertatur, iſque ad angulum antè inventum *APB* ſuperaddatur, ſimulque variationis longitudinis navis interea factæ ratio haberi poterit, quæ ad illum angulum addatur, ſi navis orientem versùs feratur, contrà verò ab eo ſubtrahatur. *Fig. IX.*

§. 150. Cùm hoc pacto vera quantitas anguli ad polum *APB* fuerit definita, ſumatur arcus *AP* æqualis diſtantiæ prioris ſtellæ à polo, & *PB* æqualis diſtantiæ poſterioris ſtellæ à polo, ducaturque arcus circuli maximi *AB*; atque in triangulo ſphærico *APB*, ex datis lateribus *AP* & *BP* cum angulo intercepto *APB*, ſupputentur anguli *PAB*, *PBA*, cum latere *AB*.

§. 151. Deinde ductus concipiatur meridianus *HZPO* utrique obſervationi communis ſive ambæ ſimul ſint factæ, ſive interjecto quodam tempore, quod fieri poſſe ſuprà jam eſt oſtenſum: ſitque *ZP* complementum elevationis

poli pro priori obſervatione, zP verò pro poſteriori; ſiquidem latitudo navis inter obſervationes variationem quandam fuerit paſſa. Primâ tamen calculi operatione hoc diſcrimen Zz negligatur; ita ut arcus ZA & ZB repreſentent complementa altitudinum ſtellarum obſervatarum.

§. 152. In triangulo ergo ſphærico AZB cùm data ſint tria latera AB, AZ & BZ, computentur anguli ZAB, ZBA; hincque colligantur anguli ZAP & ZBP, quo facto vel in triangulo ZBP, latera ZB, PB, cum angulo ZBP: unde porrò complementum elevationis poli PZ cum angulis horariis ZPA & ZPB invenientur, ex quibus vera tempora obſervationum rectè concludentur; ſiquidem variatio latitudinis navis, quæ per Zz, exprimitur nullius fuerit momenti, ut plerumque fit, fierique præſtat cum una obſervatione abſoluta nihil obſtat, quo minus ſtatim alteram ſuſcipiamus.

§. 153. Sin tamen nihilominus tempus quoddam notabile inter tempora obſervationum præterfluxerit, atque variatio latitudinis Zz interea facta ſine errore negligi nequeat, tum ſaltem ſuperior calculus azimuthum PZB ſatis prope indicabit, & cùm jam arcus ZB veram diſtantiam ſtellæ B à zenith exhibeat, demiſſo perpendiculo zu, definiri poterit particula Zu, quæ ſecundùm figuram ad ZB addita, dabit veram longitudinem arcùs ZB, quâ in ſuperiori calculo jam repetendo pro ZB uti oportebit.

§. 154. Si igitur ex tribus lateribus trianguli AZB denuò angulus ZAB determinetur, ab eoque angulus PAB ſubtrahatur, ſiquidem figura ad caſum propoſitum ſit accommodata, remanebit angulus ZAP, ex quo & arcubus ZA, PA, reperietur cùm vera quantitas PZ arcus, tùm angulus horarius ZPA, qui debito modo in tempus converſus indicabit quanto tempore obſervatio ſtellæ A vel ante, vel poſt ejus culminationem ſit facta.

§. 155. Supereſſet ut quoque de ſelectione ſtellarum ad certitudinem obſervationum maximè idonearum plura adjicerem; ſed quoniam ſi cœlum eſt ſerenum, & delectus conceditur, methodis in ſuperiori ſectione traditis potiùs uti conveniet; pauca tantùm annotabo, quæ ex præceptis ſuprà traditis facilè conſequuntur. Primùm ergo ad hoc ſtellas non procul ſupra horizontem elevatas eligi debere perſpicuum eſt, quæ declinationem habeant borealem, ſed exiguam; ſiquidem navis in hemiſphærio boreali verſetur. Deinde concluſio erit eo certior quò magis ſtellæ in aſcenſione recta diſcrepent. Quamobrem tutiſſimum conſilium erit, ut altera ſtella prope horizontem orientem, altera prope occidentem eligatur.



DE

Fig. 1.

Fig 2.

Fig. 3.

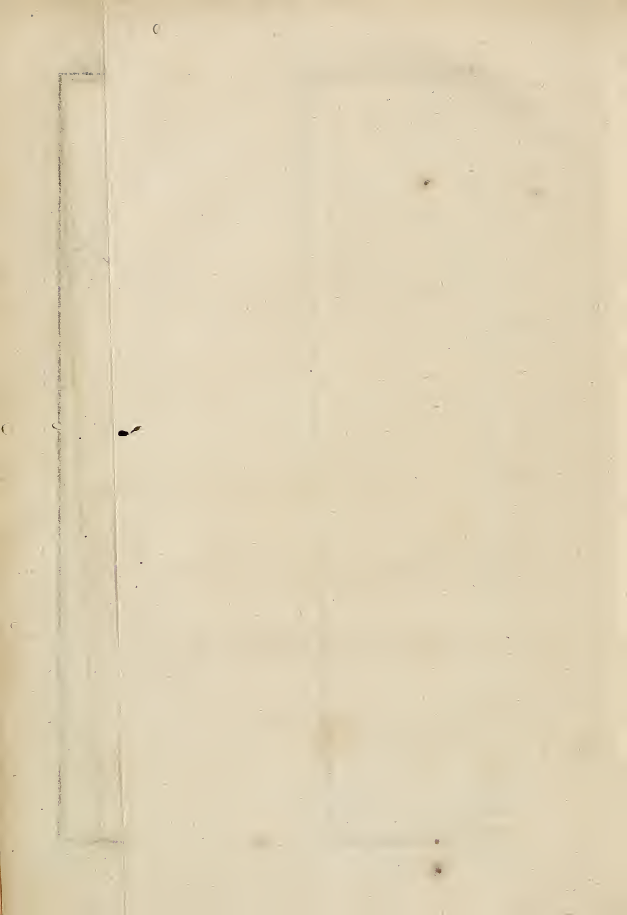


Fig. 4.

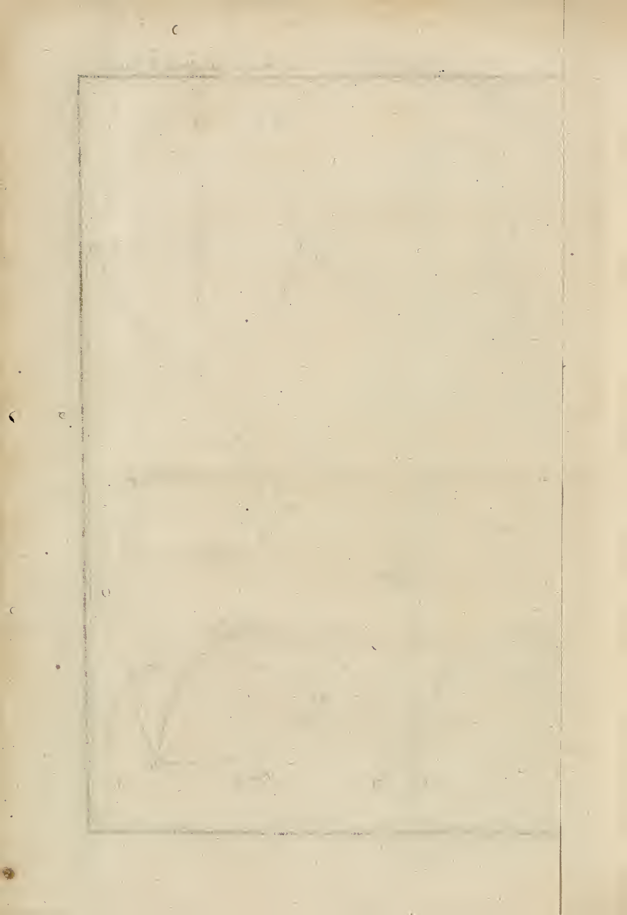
Fig. 5.

Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 8.

Fig. 9.



DE LA MEILLEURE MANIERE

DE TROUVER L'HEURE EN MER,

PAR OBSERVATION;

Soit dans le jour, ſoit dans les crépuſcules, & ſur-tout dans la nuit, quand on ne voit pas l'horiſon.

Nihil unquàm invenietur, ſi contenti fuerimus inventis. Sen. *Ep.* LXIV.



Prix. 1745.



DE LA MEILLEURE MANIERE DE TROUVER L'HEURE EN MER, PAR OBSERVATION,

Soit dans le jour, soit dans les crépuscules, & surtout dans la nuit, quand on ne voit pas l'horison.

Nihil unquàm invenietur, si contenti fuerimus inventis. Sen. Ep. LXIV.



N peut trouver l'heure en mer par l'observation de la hauteur, ou de l'azimuth, ou de différentes hauteurs, ou de différens azimuths d'un astre ou de plusieurs astres, ou enfin par l'observation de la même hauteur ou du même azimuth de plusieurs astres, ou du même astre. Les Cadrans mobiles, les Anneaux Astronomiques & autres instrumens, se rapportent à ces sortes d'observations.

Ainsi nous diviserons cette Dissertation en trois Parties. Dans la premiere, nous examinerons les instrumens les plus propres à ces observations. Dans la seconde, nous choisirons parmi les différens usages de ces instrumens, ceux qui nous paroîtront plus sûrs & plus faciles pour trouver l'heure en mer, surtout pendant la nuit. Et dans

la troiſieme, nous verrons en quelle rencontre l'erreur des inſtrumens influe moins ſur la détermination de l'heure.

PREMIERE PARTIE.

Examen des Inſtrumens les plus propres à obſerver en Mer la hauteur ou l'azimuth des Aſtres.

§. 1. TOUT le monde ſçait que parmi les inſtrumens à prendre hauteur, on ne peut ſe ſervir la nuit à la mer, quand on ne voit pas l'horiſon, que de ceux qui portent leur horiſon avec eux, & que même ceux qui ſont à pinnules, comme l'Aſtrolabe marin, ne ſont pas propres à obſerver la hauteur des étoiles, parce qu'il eſt preſque impoſſible de viſer exactement à une étoile par une pinnule percée d'un très-petit trou, pendant que l'inſtrument & le navire ſont dans l'agitation. Mais je crois qu'on peut corriger, ou du moins diminuer beaucoup ce défaut, en ſubſtituant à la pinnule inférieure de l'Aſtrolabe marin, un miroir de métail, perpendiculaire au plan de l'inſtrument, & qui forme avec la ligne de foi de l'alidade, un angle de 45 degrés, en ſorte que l'alidade qui porte la pinnule & le miroir, ait toutes ſes parties en équilibre autour du centre de l'inſtrument, qui doit être ſon centre de gravité. On peut, au lieu de la pinnule ſupérieure, placer une lunette.

Fig. I. En effet, ſoit l'Aſtrolabe marin $THNO$; ſa ligne horiſontale HO, & ſa ligne verticale TN. Imaginons la pinnule ou la lunette au point T, & le miroir au point N, placé parallelement à la ligne MI, laquelle fait un angle

TCI ou *ICO*, de 45° avec la ligne de foy *TC*, ou avec l'horifontale *HO*; il faut tracer au point *N*, fur le miroir, une droite perpendiculaire au plan de l'inftrument. Il eft clair que fi un aftre eft dans une ligne *hN* parallele à *HO*, l'œil en *T* le verra par réflexion, dans le point *N* du miroir, ou plutôt dans la direction *TN*; parce que l'angle d'incidence *hNμ* ou *HCM* eft égal à l'angle de réflexion *TNJ*, ou *TCI*, tous ces angles étant chacun de 45°. Donc fi l'alidade *TC* defcend vers *t* d'un nombre quelconque (*n*) de degrés, le point *I* de la ligne *MI*, ou le point *J* du miroir *μNJ*, defcendant de même vers *i*, & *M* montant vers *m* d'autant de degrés; un aftre *S* placé au même nombre *n* de degrés de hauteur, paroîtra dans le centre *N* du miroir, & la ligne de foi *Ct*, marquera *n* degrés au point *t*. Car l'angle d'incidence $SCm = SCH + HCM\ (45°) - MCm\ (n) =$ l'angle de réflexion $tCi = TCI\ (45°) + ICi\ (n) - TCt\ (n)$. Donc $SCH = n$; donc l'aftre *S* fera réfléchi vers *t* par la ligne *Ct*, & l'arc *Tt* marquera fa hauteur.

Ou plus brievement, il eft évident, que l'angle formé par les deux rayons, l'un d'incidence, & l'autre de réflexion, eft toûjours droit, puifque l'angle de réflexion & celui d'incidence font chacun de 45 degrés. Donc l'aftre doit être élevé au-deffus de l'horifon de la même quantité de degrés, que l'alidade eft defcendue au-deffus du zénith.

On peut vérifier cet inftrument, en vifant à un point connu, ou à l'horifon. Car l'erreur de cet Aftrolabe ne peut venir que de ce que le miroir *μNJ* ne fait pas avec l'alidade un angle de 45°, ou de ce que la ligne *TCN*, perpendiculaire à *HO*, n'eft pas exactement verticale.

Or, dans le premier cas, en vifant à un point horifontal *h*, on verra que l'alidade s'écarte du point *T*, & l'on

corrigera l'erreur de l'inſtrument, en faiſant tourner le miroir autour du point N, & le fixant en ſorte que l'alidade étant placée au point T, qui eſt marqué zero, l'objet paroiſſe dans la ligne horiſontale du miroir ou de la lunette. Mais dans le ſecond cas, ſuppoſons que la verticale ſoit θCn, éloignée de TN d'un nombre quelconque (e) de degrés : ſi le miroir fait un angle de 45° avec la ligne de foi, il faudra néceſſairement placer l'alidade dans la ligne θCn, pour découvrir un objet placé dans la ligne nN, parallele à la vraie horiſontale KCO, & perpendiculaire à θn. Donc l'erreur de l'inſtrument ſera l'arc $T\theta$: mais pour corriger cette erreur, il faudra encore tourner le miroir comme dans le premier cas, enſorte que l'alidade étant placée au point T, l'objet paroiſſe dans la ligne horiſontale du miroir, ou de la lunette ; alors le miroir fera avec TN un angle de $45° + \frac{1}{2} hNn$, ou $45° + \frac{1}{2} HK$, & l'inſtrument donnera toûjours la hauteur exacte ; car dans cette ſituation, ſi un aſtre eſt dans la ligne horiſontale Nn ou CK, l'angle d'incidence $nNV = CNu$, ſera $= 45° + \frac{1}{2} hNn$, parce que l'angle nNC étant moindre qu'un angle droit de la quantité hNn, les angles égaux d'incidence & de réflexion, qui forment le ſupplément de cet angle nNC à 180°, doivent augmenter chacun de $\frac{1}{2} hNn$. Donc ſi l'alidade deſcend vers t d'un nombre quelconque n de degrés, le point u du miroir deſcendant de même, un aſtre S placé au même nombre n de degrés de hauteur ſur l'horiſon, paroîtra dans le miroir au même point, & l'alidade marquera le même nombre de degrés au point t. En effet, par le même raiſonnement que ci-devant, en ſuppoſant TI de $45° + \frac{1}{2} hNn$, on aura $Sm = SK + HK + HM$ ($= ICO = 45° - \frac{1}{2} HK$) $- Mm$ (n), (l'angle d'incidence étant égal à l'angle de réflexion) $= ti = TI$ ($45° + \frac{1}{2} HK$)

$+ Ii(n) - Tt(n)$. Donc $SK - n = o$, ou $SK = n$, ce qu'il falloit démontrer. De-là il suit que l'angle CNJ ne doit être de 45°, que dans le cas où la ligne TN est exactement verticale, & que les hauteurs seront toûjours exactes, lorsqu'on fixera le miroir, en sorte que l'alidade étant placée à zero, l'objet horisontal paroisse dans la ligne horisontale tracée sur le miroir, ou dans le fil horisontal de la lunette.

On sçait que le miroir renverse les objets, & que la lunette les redresse, si elle n'a que deux verres convexes, & que pour prendre hauteur au Soleil, on a besoin d'un verre obscurci, placé devant le miroir, tel que celui qu'on voit dans les Octans Anglois à double réflexion.

Pendant la nuit on a besoin d'une lumiere pour éclairer les fils de la lunette, à moins qu'on ne mette au lieu du fil une petite lame de cuivre.

Si l'on se sert d'une pinnule, on peut tracer sur le miroir, ou sur son bord parallele au plan de l'instrument, une ligne droite, qu'on divisera en degrés & minutes, pour voir tout-à-coup, sans toucher à l'alidade, la minute où se trouve l'astre. En voici la méthode.

Soit TC la ligne de foi de l'alidade; ACB la ligne du miroir parallele au plan de l'instrument. Décrivez du centre T où est la pinnule, un arc-de-cercle DEF, que vous diviserez en degrés & minutes, par des lignes menées de ce centre, comme TDG. Si l'arc DE est d'un degré, la ligne GC marquera un degré de diminution ou d'augmentation, & ainsi des autres, de part & d'autre du point C. En effet, soit AB le miroir, TC l'alidade, HO, ho deux lignes horisontales qui passent par les points C & G; soit l'astre E inférieur à l'astre S, la hauteur EGh de l'astre E, sera $= EGA + AGh =$ (à cause des paralleles HO, ho, & de l'angle d'incidence $TGC = EGA$) TGC *Fig. II.* *Fig. III.*

$+ ACH =$ (à cauſe de l'angle extérieur $TCB = TGC + GTC$, ou $TGC = TCB$ ou. $SCA - GTC$) $SCA - GTC + ACH = SCH - GTC$. Donc GTC eſt la diminution de la hauteur SCH pour l'étoile E.

Si l'on ſe ſert d'une lunette, on pourra faire la même choſe plus exactement avec un micrometre.

Cet inſtrument a cet avantage ſur l'Octant à double réflexion de M. Hadley, & ſur celui de Caleb Smith, à ſimple réflexion, que les erreurs de la diviſon n'y ſont pas doublées comme dans ceux-ci. On peut cependant ſe ſervir de l'un de ces deux Octans Anglois, en les rendant plus peſans, & prolongeant l'alidade pour conſerver l'équilibre.

L'alidade ſe mouvant aiſément dans tous ces inſtrumens, on peut la fixer à la hauteur prévûe, ſurtout lorſqu'on cherche l'heure, & attendre le paſſage de l'aſtre à cette hauteur.

A l'égard des miroirs, ceux de verre ne peuvent pas ſervir aux étoiles, à moins qu'ils ne ſoient parfaitement plans, & d'une épaiſſeur égale par-tout, ce qui ne ſe trouve preſque jamais. C'eſt pour cela qu'on emploie les miroirs de métal dans pluſieurs Octans Anglois; car ces miroirs étant bien polis, repréſentent les étoiles auſſi clairement que les Téleſcopes de réflexion, au lieu que les miroirs ordinaires de verre les repréſentent très-confuſément.

§. 2. Ce que l'on vient de dire, prouve qu'on peut aujourd'hui obſerver la hauteur des étoiles ſur un navire, beaucoup mieux qu'on ne le pouvoit avant l'invention des Octans à miroir : mais la plus grande difficulté, qui eſt la ſuſpenſion des inſtrumens à plomb, ſubſiſte encore, & il eſt queſtion de la vaincre, ou au moins de la diminuer autant qu'il eſt poſſible.

M. Jean

M. Jean Bernoulli, dans le Recueil de ses Ouvrages, *Fig. IV.* imprimé en 1742, *Art.* 177, *tom.* IV, *p.* 269 & 274, fait voir, que si un corps d'une figure quelconque *DFEG* étant en repos, ayant son centre de gravité *C*, est frappé au point *D* selon la direction horisontale *DAE*, il aura deux mouvemens angulaires uniformes en même tems, l'un autour du centre de gravité *C*, pendant que ce centre se meut d'un mouvement uniforme, suivant une direction parallele à *AE*, & l'autre autour du centre de rotation *B*, qui se meut d'un mouvement uniforme sur la cycloïde ordinaire, dont le rayon est *BC*, pendant que ce cercle roule sur la droite *BP* parallele à *AE*, & il démontre que le centre de rotation *B*, n'est pas différent du centre de suspension d'un pendule dont *A* seroit le centre d'oscillation ou de percussion, & comme par la démonstration d'Hugens, les pendules composés ont cette propriété, qu'on peut changer le point de suspension en centre d'oscillation; il suit de-là qu'on peut prendre le corps *DFEG*, pour un pendule composé, qui fait ses vibrations autour du point de suspension *A*, & dont le centre d'oscillation est *B*. Ce mouvement de rotation est plus lent ou plus promt, selon que la direction *AE* est plus près ou plus loin du centre de gravité *C*. Si l'on considere la cycloïde d'Hugens décrite par le point *B*, & si l'on prend le corps *EFDG* pour un cercle homogene, dont le centre est *C*, *Horol. Oscill. fol.* 142. & le rayon $= r$, on prendra, selon la regle d'Hugens, $\frac{2}{5}$ de la troisieme proportionnelle à *CB* & *r*, pour avoir *CA*, ce qui donne $CA = \frac{2}{5} \frac{rr}{CB}$, & par conséquent $CB = \frac{2}{5} \frac{rr}{CA}$. Tout cela suit des principes de M. Bernoulli; donc la distance *CB* croît en raison composée de la raison directe doublée du rayon *r* du corps, & de la raison inverse simple de la distance *CA*. Donc plus le point *A* de suspension

ſera proche du centre de gravité de l'inſtrument, & moins il ſera expoſé à tourner autour de *B*, le point *B* étant éloigné à proportion; & plus le corps ſera peſant ou ſolide, moins il ſera expoſé à tourner autour de *B*; puiſque le quarré *rr* du rayon en ſera plus grand, & par conſéquent le point *B* plus éloigné. Donc ſi le point *A* de ſuſpenſion eſt fort près du centre de gravité *C*, ce point *A* étant frappé par le mouvement d'un navire, le centre de rotation *B* ſera fort éloigné de *C*, ſurtout ſi l'inſtrument a beaucoup de peſanteur, laquelle eſt toûjours proportionnelle à *rr*, dans les cercles de même épaiſſeur. Donc le mouvement horiſontal de *CBF*, &c. ſera preſque égal à celui de *A*, d'autant plus que le point fixe *A* réſiſte au mouvement de la peſanteur.

Il faut donc tâcher de ſuſpendre les inſtrumens à plomb, par un point *A*, qui ſoit fort peu au-deſſus de leur centre de gravité, & leur donner beaucoup de peſanteur, afin qu'ils aient fort peu de rotation. Le meilleur moyen pour cela, & en même tems le plus ſimple, eſt la ſuſpenſion des bouſſoles en cette maniere.

Dans les bouſſoles ordinaires, ou compas de variation, *Fig. V.* le chaſſis *HIKL* eſt appuyé ſur deux pivots *M* & *N*, & la boëte intérieure de la bouſſole eſt appuyée ſur deux points oppoſés *E* & *D* des côtés *HL*, *IK* du chaſſis. Les pinnules & le fil horiſontal ſont dans le diametre *ED*, de ſorte que les points *M* & *N* du chaſſis étant ſeuls fixes, le mouvement ſe fait toûjours autour de l'axe *MN*, parce que la boëte de la bouſſole ne peut avoir, par cette ſuſpenſion, que deux mouvemens circulaires, l'un autour de l'axe *ED*, & l'autre autour de l'axe *MN*: mais l'axe *ED* étant mobile autour de l'axe fixe *MN*, le mouvement circulaire fait néceſſairement une impreſſion ſur cet axe; & le force à tourner dans très-peu de tems autour de

l'axe fixe MN. De-là vient que les pinnules E & D sont toûjours à fort peu près dans le même azimuth ; & c'est-là le plus grand avantage de la suspension des boussoles. Pour profiter de cet avantage dans le cas présent, il faut donner à l'Anneau Astronomique, ou à l'Astrolabe marin, une situation toute différente, & le placer dans la direction MN, en sorte qu'il soit traversé par un axe fixe ED, & que cet axe soit appuyé sur le chassis aux points E & D, où l'on appuie les pivots des boussoles. Ce chassis roulera sur les points fixes M & N; & par ce moyen, l'instrument étant dans l'azimuth MN, ne pourra plus rouler autour de son axe ED, & ne roulant qu'autour de MN par des vibrations qui le feront incliner vers E ou vers D, l'erreur dans la hauteur des astres sera très-petite. On pourra même l'éviter, en choisissant la plus petite hauteur de toutes celles que l'instrument pourra donner dans ses différentes inclinaisons. Car soit S le Soleil ; CH, Ch, deux différentes lignes horisontales, dont l'une CH, soit dans le vrai azimuth du Soleil. Il est clair que l'angle SCH sera toûjours plus petit qu'aucun des autres SCh ; puisque les côtés SC, CH, & SC, Ch étant égaux, la distance SH perpendiculaire à l'horison, est toûjours plus petite que la distance oblique Sh. Ainsi l'erreur produite dans la hauteur, sera l'excès de l'angle oblique SCh sur l'angle de la vraie hauteur SCH. Pour trouver cet excès, l'inclinaison ShH étant donnée, on calculera le triangle sphérique SHh rectangle en H. Soit le sinus de l'angle d'inclinaison $ShH = i$, le sinus total $= r$, & le sinus de la hauteur $SH = h$; nous aurons $i : r :: h$: au sinus de $Sh = \frac{rh}{i}$, & la différence entre l'angle d'inclinaison erronée ShH, & l'angle droit SHh étant l'erreur de l'inclinaison, & en même tems le complément de cet angle d'inclinaison, *Fig. VI.*

nommant e le ſinus de cette erreur, nous aurons le ſinus de $Sh = \frac{rh}{\sqrt{rr-ee}}$, puiſque $i = \sqrt{rr-ee}$. De ſorte que ſi cet écart eſt, par exemple, de 10°, on trouvera le ſinus de $Sh = \frac{10000.h}{9848}$, ou $\frac{1250}{1231}h$; ce qui n'eſt pas une grande erreur, puiſque dans un ſi grand écart de 10°, le ſinus de la fauſſe hauteur ne ſurpaſſeroit le ſinus de la véritable, que de $\frac{19}{1231}$, ou à fort peu près $\frac{1}{65}$. Cependant cet écart produiroit une erreur conſidérable dans les grandes hauteurs; car la véritable hauteur étant de 76°, & ſon ſinus 97029,57, on trouveroit que pour un écart de 10° d'inclinaiſon, la fauſſe hauteur ſeroit de 80° 9'; & ainſi l'erreur ſeroit de 4° 9'. Mais ſi la vraie hauteur étoit de 10° 30', ſon ſinus 18223, 55 donneroit dans la même hypotheſe, le ſinus de la fauſſe hauteur 18504, laquelle ſeroit 10° 40', & l'erreur ne ſeroit que de 10', ce qui eſt bien peu pour 10° d'inclinaiſon. D'ailleurs on s'apperçoit aiſément d'une ſi grande inclinaiſon, & l'on ne riſque preſque rien en prenant la plus petite hauteur dans les différentes inclinaiſons, puiſque la vraie hauteur SH eſt toûjours la plus petite de toutes.

On voit que cette méthode réunit tous les avantages qu'on peut eſpérer de la ſuſpenſion d'un inſtrument à prendre hauteur. Car 1° l'inſtrument étant ſuſpendu par ce moyen en E & D, un peu au-deſſus de ſon centre de gravité, ne roulera preſque plus autour du centre d'oſcillation, qui ſera très-éloigné du point de ſuſpenſion. 2°. Etant ſuſpendu comme la bouſſole, de maniere qu'il ne puiſſe pas rouler autour de ſon axe, mais ſeulement autour de ſon diametre horiſontal, il ne pourra s'écarter que très-peu de la vraie hauteur, comme on vient de le voir. 3°. Le poids de l'inſtrument étant fort grand, on en ſera d'autant plus aſſûré de la vraie hauteur.

Fig. V.

Pour perfectionner cette ſuſpenſion, on peut placer un niveau d'air ſur l'axe *MN*, & l'on verra que la bulle d'air reſtera toûjours au milieu du niveau, pendant que l'inſtrument ne tournera qu'autour de l'axe *MN*; mais il faut que ce niveau ſoit exactement dans la direction de cet axe. On peut ajoûter un autre niveau d'air perpendiculaire à celui-ci, & exactement dans l'axe *ED*, pour pouvoir prendre la hauteur au moment que la bulle d'air ſera au milieu, & pour éviter par ce moyen, autant qu'il eſt poſſible, l'erreur que l'inclinaiſon de l'inſtrument peut produire.

§. 3. Le Compas azimuthal, que les Anglois ont imaginé pour obſerver l'azimuth des aſtres, eſt préférable au compas ordinaire de variation, par la grandeur de ſes degrés, & par la hauteur de ſa pinnule; mais il a un très-grand défaut, qui ne ſe trouve pas dans les compas ordinaires de variation. Car dans ceux-ci, la boëte qui porte la roſe des vents étant appuyée ſur les points *E* & *D* du chaſſis *HIKL*, & ce chaſſis roulant avec cette boëte autour des pivots fixes *M* & *N*, il arrive que le mouvement ſe fait toûjours autour de l'axe *MN*, comme on l'a déja remarqué, & que par conſéquent les pinnules étant fixées en *E* & *D*, l'azimuth qui répond à *ED* reſte toûjours le même, malgré l'agitation de l'inſtrument, qui n'incline jamais vers *M* ni vers *N*, ou dont le mouvement ſe réduit promptement aux vibrations ſeules autour de *MN*, comme l'expérience & la raiſon le démontrent; ce dernier mouvement l'emportant toûjours ſur le premier : au contraire l'alidade du compas azimuthal Anglois roulant autour du point *D*, ſe trouvera ſouvent placée dans une ſituation telle que *DG*, éloignée de *DE*, & l'inſtrument roulant toûjours autour de *MN*, l'azimuth qui répond à *DG* variera ſans ceſſe. Les Auteurs qui ont fait un ſi grand éloge de cet inſtrument, n'ont pas ſans doute apperçû ce

défaut, qui rend inutile la grandeur de la graduation & la hauteur de la pinnule.

Mais pour rendre le compas ordinaire de variation propre à obſerver l'azimuth de l'aſtre, il faut placer un fil de laiton au-deſſus de l'une des pinnules *D*, non pas ſur les bords de l'inſtrument, mais ſur la boëte intérieure, perpendiculairement au verre qui la couvre, & tendre un fil du haut de ce ſtyle au bas de la pinnule placée en *E*, pour avoir un triangle rectangle, qui ſera toûjours dans le même vertical, & qui ſera très-propre à obſerver l'azimuth des étoiles ; parce que cette boëte tournant autour du ſeul axe *MN*, le ſtyle pourra bien pancher vers *E*, mais ſon inclinaiſon ne ſe fera que dans le plan du même vertical.

Si l'on veut être aſſûré que la petite boëte où eſt la roſe des vents, ne tourne qu'autour de l'axe *MN*, il faut faire en ſorte que le fil horiſontal *ED* ſoit bien perpendiculaire à l'axe *MN*, ce qui n'eſt pas fort difficile ; & il eſt bon d'imprimer ce mouvement autour de *MN*, en appuyant la main ſur *E* ou *D*, pour détruire entierement l'autre mouvement autour de l'axe *ED*.

§. 4. A l'égard des obſervations qui ſe font pendant le jour, ou lorſqu'on voit l'horiſon, tout le monde convient que l'Octans de Hadley & de Smith ſont les plus propres à prendre hauteur.



SECONDE PARTIE.

De l'usage des instrumens à prendre hauteur, & à observer l'Azymuth, pour trouver l'heure.

I. ON trouve facilement l'heure par la hauteur du Soleil ou d'une étoile, & la plûpart des livres de navigation nous donnent la maniere de résoudre cette question par le calcul & par le Quartier Sphérique. Il paroît cependant que le Quartier Sphérique a deux grands défauts. Le premier est que dans les grandes hauteurs, on est obligé de suppléer au quart-de-cercle, qui manque à cet instrument ; ce qui expose à quelque erreur, par la petitesse des divisions de la ligne droite, qui supplée à ce quart-de-cercle. Le second défaut est que les divisions des heures sur les paralleles à l'équateur, sont trop serrées auprès du méridien, & que les paralleles sont aussi trop serrés auprès du pole, ce qui empêche de déterminer l'heure assez exactement.

Il vaudroit donc beaucoup mieux substituer au Quartier Sphérique, un demi cercle, divisé selon la projection stéréographique, qui suppose l'œil au pole ou au zénith. On verra par la construction de cet instrument, qu'il n'a pas les défauts du Quartier Sphérique ; car les méridiens ou les azimuths, y sont tous à distances égales, & les paralleles à l'équateur ne sont serrés que vers le pole, à proportion des tangentes de leurs demi-distances au pole.

Ce demi-cercle sphérique contient les projections de

Fig. VII. tous les quarts de méridiens, qui sont des lignes droites *BP*, *CP*, *DP*, &c. & les projections des paralleles à l'équateur, qui sont différens cercles concentriques, dont les demi-diametres *P* 10, *P* 20, &c. sont les tangentes des demi-distances de chaque parallele au pole *P*, par où l'on voit de quelle maniere on peut construire & diviser cet instrument. Mais pour en faciliter l'usage, on élevera au milieu *F* du rayon *PC*, & au milieu *R* de *FC*, les droites *FG*, *RI*, perpendiculaires à *PC*. En voici l'usage dans la question présente.

La déclinaison du Soleil étant donnée, (par exemple, de 23° N.) la latitude d'un pays (57° 10′ N.); la distance au zénith (75°), on trouvera l'heure, en prenant sur *PB* le point de la distance du Soleil au pole Nord (67°). Si la déclinaison étoit Sud, on trouveroit ce point sur le quart-de-cercle *B-C*. Ensuite on comptera de part & d'autre du point trouvé (67°) vers *P* & *B*, la distance du Soleil au zénith (75°); on aura à main droite du point *P* dans cet exemple, le point marqué 8; & à main gauche, en descendant du point *B* vers *C*, sur le quart-de-cercle, le point marqué 142. Ensuite ayant attaché un fil au point le plus bas *C*, on le tendra successivement sur les deux derniers points trouvés (8 & 142). Ce fil rencontrera la ligne *GF*, prolongée en deux autres points, dont la distance sera le demi-diametre d'un cercle, qui doit passer par le premier point (8), trouvé sur la ligne *PB*, & dont le centre doit être sur la même ligne, endeça de *P* à main gauche. Décrivez donc ce cercle, qui viendra couper le parallele de la latitude donnée au point de la projection du zénith, par où passe le méridien éloigné du cercle horaire *PB* (de 98°), ce qui réduit en tems, donne l'heure requise (6 heures 32′ après-midi).

La raison de cette méthode, est que le zénith doit se

trouver

trouver dans le parallele de latitude, & dans le petit cercle qui a pour pole le centre du Soleil, & dont la circonférence eſt autant éloignée du Soleil que le zénith. Or le cercle décrit par la méthode précédente eſt dans ce cas, ſelon les regles de la projection ſtéréographique : donc ce cercle doit déterminer le méridien de l'obſervation. Lorſque le fil tendu du point *C*, ne peut rencontrer la ligne *GF* qu'à une diſtance infinie, ou preſque infinie, le diametre du cercle requis étant preſque infini, ſa circonférence doit être regardée ſans erreur ſenſible, comme une ligne droite perpendiculaire à *PB*.

Si le fil ne pouvoit pas couper *GF*, mais ſeulement *IR*, on doubleroit la diſtance trouvée ſur *IR*, pour avoir le rayon du petit cercle requis.

II. Lorſque la latitude n'eſt pas donnée, on peut trouver l'heure, non-ſeulement par le calcul, qui eſt trop difficile pour les marins, mais encore par le demi-cercle ſphérique, en prenant deux hauteurs inégales du Soleil le même jour, & obſervant la différence des tems ; ce qui ne peut ſe réſoudre qu'en tâtonnant & par haſard, lorſqu'on ſe ſert du Quartier Sphérique. Par exemple, le Soleil ayant 19° 39′ de déclinaiſon N. ou ſa diſtance au pole N. étant de 70° 21′. Si l'on trouve ſa diſtance au zénith le matin de 51° 41′, & une heure & demi après, de 39° 35′, on trouvera très-aiſément l'heure & la latitude en cette maniere. Prenez de part & d'autre, du point de la diſtance du Soleil au pole (70° 21′), comme dans le premier Article ; ſa diſtance au zénith (51° 41′), vous trouverez à main droite entre *P* & *B*, un point marqué 18° 40′, & à gauche ſur le quart-de-cercle *BC*, le point marqué 122° 2′. Tendez le fil ſur ces deux points, il coupera *GF* en deux autres points, dont la diſtance ſera le rayon d'un cercle, qui doit paſſer par le premier (18° 40′),

Prenez de même du point (70° 21′) de part & d'autre, la deuxieme distance au zénith (39° 35′); vous trouverez deux autres points (30° 46′ à droite, & 109° 56′ à gauche), lesquels détermineront sur *FG* le rayon d'un autre cercle, qui doit passer par le premier point (30° 46′). Mais ce premier point ne doit pas être pris dans le méridien *PB*, qui appartient à la premiere observation; on doit le prendre dans un autre méridien, qui fait avec *PB* un angle de 22° 30′, ou de 1 heure $\frac{1}{2}$; & ce second cercle doit avoir son centre sur ce second méridien. L'intersection de ces deux cercles déterminera le zénith, & par conséquent, le parallele de la latitude, que l'on trouvera marquée sur *PC* (de 51° 32′), & le méridien qui passe par ce zénith, faisant avec *PB* un angle de 52° 26′, on aura l'heure de la premiere observation, en divisant ce nombre par 15, ce qui donne ici 3 heures & demi de distance à midi, ou 8 heures 30′ du matin.

On voit combien ce Problême est utile à la mer, où l'on manque souvent l'occasion d'observer la latitude à midi.

Lorsque la distance du Soleil au zénith est fort petite, le rayon du cercle qu'on doit décrire étant petit, se décrit fort aisément; mais lorsqu'elle est fort grande, le rayon de ce cercle est si grand, qu'il est difficile de le bien décrire, à moins qu'il ne soit presque infini.

III. Ce que l'on vient de dire, suppose que le navire ait été sans mouvement dans l'intervalle des deux observations; mais si le navire a fait route, on mesurera l'angle *BAC* compris par la route *AB* du navire, & l'azimuth *ACS* du Soleil; & achevant le triangle rectangle *ACB*, on trouvera par le calcul, ou par le quartier de réduction, ayant réduit en degrés la route *AB*, quel est le mouvement *AC* du zénith vers le Soleil *S*: ensuite on retranchera

Fig. IX.

AC de la premiere diſtance *AS*, ſi on a fait route du côté du Soleil, ou bien on l'ajoûtera à cette même diſtance, ſi on a fait route du côté oppoſé au Soleil. Par ce moyen, on aura la diſtance du Soleil au ſecond zénith *B* dans la premiere obſervation, & faiſant l'opération avec cette diſtance & avec celle de la derniere obſervation, on aura deux cercles qui ſe couperont au zénith de la ſeconde obſervation ; ce qui donnera l'heure.

Si la diſtance entre les deux obſervations ſurpaſſe 12 heures ; ſi elle eſt, par exemple, de 14 heures dans le même jour, ôtez 14 de 24, le reſte 10 ſera la différence des tems. On aura ſeulement égard à la variation de la déclinaiſon dans 14 heures.

Si la diſtance entre les deux obſervations ſurpaſſe 24 heures, par exemple, ſi elle eſt de 26, on doit opérer comme ſi elle n'étoit que de deux heures, mais en différentes déclinaiſons. M. Graham, de la Société Royale de Londres, propoſe dans les Tranſactions Philoſophiques, au lieu de ce demi-cercle ſphérique, une partie d'un grand globe, dont le demi équateur eſt diviſé en heures & minutes. Un compas circulaire, fixé à la diſtance du Soleil au zénith, ſert à décrire deux arcs-de-cercle, qui, par leur interſection, déterminent le zénith.

Il eſt certain que cet inſtrument eſt fort ſimple, mais il doit être trop grand & trop diſpendieux, pour être utile à la navigation. La dépenſe & l'embarras des grands inſtrumens, empêchent toûjours les Pilotes de s'en ſervir. C'eſt ce qui m'a déterminé à propoſer le demi-cercle ſphérique.

IV. On peut, au lieu de la diſtance horaire des deux obſervations, prendre la différence des azimuths ; alors le centre *P* du demi-cercle ſphérique, repréſentera le zénith, & ayant pris ſur l'azimuth *PB*, la diſtance du Soleil

au zénith, on comptera de part & d'autre sa distance au pole, pour avoir le demi-diametre du premier cercle. On fera la même opération sur le second azimuth, pour avoir un second cercle, qui, par son intersection avec le premier, déterminera le pole & le méridien. Mais pour trouver l'heure, ayant trouvé par ce moyen la latitude, on se servira du premier Article de cette seconde Partie, ou des regles ordinaires de la projection stéréographique, qu'il est inutile de répéter ici.

V. Quoique les deux cercles tracés dans les deux Articles précédens, se coupent toûjours en deux points, il ne sera pas difficile de distinguer celui des deux points qui représente le pole ou le zénith, comme dans le demi-globe de M. Graham. Si l'on joint ces deux distances ensemble, celle des tems, & celle des azimuths, on sera plus assûré de l'heure & de la latitude.

VI. On peut trouver l'heure & la latitude par différentes hauteurs de deux étoiles, en les regardant comme une seule étoile, dont la hauteur & la déclinaison auroient varié, & prenant la différence de leur ascension droite, pour la différence des tems, on auroit cet avantage sur les méthodes précédentes, que celle-ci seroit indépendante du mouvement du navire; parce qu'on pourroit observer les deux étoiles presque en même tems.

VII. La méthode la plus facile, & peut-être la plus sûre, pour trouver l'heure à la mer pendant la nuit, est d'observer le moment auquel deux étoiles sont dans le même azimuth, ou paroissent à plomb l'une sous l'autre. Car si l'on connoît la latitude, on trouvera l'heure, ou par le calcul, ou par le demi-cercle sphérique. En effet, soit *P*
Fig. VIII. le pole du monde, Nord ou Sud, le plus près des deux étoiles observées, ou le centre du demi-cercle sphérique Soient *PE*, *PA*, les deux méridiens où se trouvent les

étoiles obſervées *E* & *A*. L'angle *APE* doit être égal à la différence de leurs aſcenſions droites, & les lignes *PE*, *PA*, doivent être les tangentes de la demi-diſtance de chaque étoile au pole. Faites paſſer par les points *E* & *A*, un grand cercle *AEZ*, ſelon la méthode de cette projection; ce cercle repréſentera l'azimuth des deux étoiles, & coupera le parallele de latitude en un point *Z*, qui marquera le zénith; la ligne droite *ZPM* ſera le méridien du lieu de l'obſervation. Donc on aura l'heure *APM* de l'étoile *A*, ou *EPM* de l'étoile *E*. Or la différence de l'aſcenſion droite de chaque étoile & du Soleil, donne l'heure requiſe.

On voit aſſez qu'on peut trouver la même choſe plus exactement par le calcul. Car dans le triangle ſphérique *EPA*, connoiſſant *EP*, *AP*, & l'angle *P*, on aura l'angle *A*, & dans le triangle *ZAP*, avec l'angle *A* & *ZP*, & *AP*, on aura l'angle horaire *ZPA*.

VIII. Si la latitude n'eſt pas donnée, ou ſi l'on n'en eſt pas aſſûré, il faut avoir deux obſervations ſemblables de 4 étoiles, pour trouver en même tems l'heure & la latitude. Car ſoient deux autres étoiles *a* & *e*, qui ſe trouvent dans un même azimuth, outre les deux premieres *A* & *E*, & ſuppoſons que le zénith ou le navire n'aient point changé de place. Prenez les angles *APa*, *aPe*, égaux aux différences d'aſcenſions droites des étoiles *A*, *a* & *e*, ſi les deux obſervations ont été faites en même tems : mais ſi la deuxieme obſervation a été faite plus tard que la premiere, ajoûtez à l'angle *APa*, la différence des tems réduite en degrés, & ayant placé les étoiles *a* & *e* dans leur cercle de déclinaiſon, vous ferez paſſer un grand cercle par les points *a* & *e*, qui coupera le premier azimuth *AEZ* au point *Z*, & ce point donnera le zénith & la latitude. L'angle *APM* ſera l'angle horaire de l'étoile *A*.

Par le calcul; connoiſſant PE, Pe, & l'angle EPe, on aura l'arc de grand cercle Ee, & les deux autres angles du triangle EPe; & par le moyen des triangles EPA, ePa, ayant les angles AEP, aeP, j'aurai les angles ZEe, ZeE, & par conſéquent, le côté EZ du triangle EZe, & l'angle EPZ requis, ce qui eſt trop long & trop difficile pour le commun des Pilotes.

IX. Si le navire a été en mouvement dans l'intervalle des deux obſervations, le point Z n'eſt pas le zénith; mais le zénith doit s'être trouvé dans l'azimuth EZ, au tems de la premiere obſervation, comme en V, & dans l'azimuth eZ, au tems de la deuxieme comme en u. Donc connoiſſant la longueur de l'arc Vu, décrit par le navire, & l'angle ZVu ou ZuV de la route, avec l'azimuth EZ ou eZ, par le moyen de la bouſſole, on aura la correction Zu, en diſant: Comme le ſinus de l'angle VZu, que font enſemble les deux azimuths, eſt au ſinus de l'arc Vu de la route que l'on prend pour l'arc d'un grand cercle; ainſi le ſinus de l'angle V de la route avec l'azimuth de la premiere obſervation, eſt au ſinus de l'arc Zu, ou de la correction, ce qui donne la diſtance Pu du pole au zénith, & l'heure uPe de l'étoile e.

X. Si la différence en aſcenſion droite des étoiles E & A eſt nulle, le triangle PZE s'évanoüit, & il n'eſt pas néceſſaire de connoître PZ pour avoir l'heure. Le cas eſt le même, lorſque la différence en aſcenſion droite eſt de 180°. Mais dans ces deux cas, les deux étoiles ne ſont dans le même vertical, que l'orſqu'elles ſont dans le méridien. Ainſi l'heure ſe trouvera par la différence entre leur aſcenſion droite & celle du Soleil.

XI. Plus l'une des étoiles E eſt proche du pole, moins l'obſervation dépend de la latitude; en ſorte que ſi l'étoile polaire étoit dans le pole même, il ne ſeroit pas néceſſaire

de connoître la latitude en ſe ſervant de cette étoile; c'eſt pour cela qu'elle eſt plus utile qu'aucune autre à cette obſervation, ſur tout dans les petites latitudes. Car ſi le zénith étoit dans l'équateur, l'azimuth de cette étoile le plus éloigné du Nord, n'en feroit éloigné que de deux degrés. On doit donc ſe déterminer à l'étoile polaire, & chercher, autant qu'il eſt poſſible, une autre étoile, qui differe très-peu de celle-ci en aſcenſion droite, pour trouver l'heure plus exactement.

XII. La latitude étant donnée avec la ſituation de deux étoiles, que l'on ſuppoſe à la même hauteur dans le même tems, on peut trouver l'heure par le calcul, ou par le demi-cercle ſphérique. Car en ſuppoſant ici la dénomination des principaux élémens de la ſphere, tirée de l'Aſtronomie Nautique de M. de Maupertuis, le calcul, dans le Problême 29, donne $rsx - rsx' = cy'u' - cyu$. Mais par les principes de la Trigonométrie rectiligne, nommant a le ſinus de la différence d'aſcenſion droite des deux étoiles, & b ſon coſinus, on a $u't - ut' = ra$ & $u' = \frac{ta - bu}{r}$, ce qui donne $rsx - rsx' = \frac{cy'ta - cy'bu}{r} - cyu$, ou $-rrsx + rrsx' + cy'ta = cy'bu + cyru$. On trouve la même choſe par le demi-cercle ſphérique, en y appliquant les regles connues de la projection.

Voyez ci-après, p. 194, la Figure & les Formules.

XIII. Comme il eſt difficile de trouver deux étoiles qui arrivent en même tems à la même hauteur, on peut attendre que la deuxieme étoile arrive à la hauteur de la premiere; & obſervant la différence des tems, la queſtion ſe réſoudra comme ſi la deuxieme étoile avoit une plus grande ou plus petite différence d'aſcenſion droite avec la premiere.

XIV. On peut appliquer la même réflexion à la méthode de l'Art. VII. Car ſi par un compas de variation, on

connoît l'azimuth EA de l'étoile E, & qu'une autre étoile arrive au même azimuth EA après un tems déterminé, on trouvera l'heure de la même maniere.

XV. Si on obſerve quatre étoiles qui aient de deux en deux la même hauteur, les deux dernieres donneront un nouvel azimuth différent du premier, & l'interſection des deux azimuths déterminera le zénith, la latitude & l'heure.

XVI. Si le navire a été en mouvement dans l'intervalle des deux obſervations, on trouvera le zénith par la méthode de l'Article IX.

XVII. On a différentes méthodes pour trouver l'heure par l'azimuth d'un aſtre, & la latitude donnée. Car ayant la diſtance PZ du pole au zénith, l'angle de l'azimuth EZ avec le méridien PZ, & la déclinaiſon de l'aſtre, ou ſa diſtance au pole EP, on aura l'heure ZPE. Mais pour la trouver ſur le demi-cercle ſphérique, il faudra décrire un azimuth EZ, qui faſſe avec le méridien PZ l'angle donné, ſelon la méthode de cette projection. Cet azimuth coupera le parallele de la déclinaiſon de l'aſtre en quelque point E, & le méridien PE donnera l'angle horaire ZPE, que l'on réduira à l'heure ſolaire.

XVIII. On peut encore trouver l'heure par la ſeule différence des azimuths de deux étoiles, ce qui ne dépend pas de la variation de la bouſſole, comme les méthodes précédentes. Mais le calcul en eſt très-difficile, & la queſtion ſe réduit à un Problème du quatrieme degré. Car en me ſervant des formules, dénominations & figures de M. de Maupertuis, ſoit a le ſinus de la différence des aſcenſions droites; b le coſinus; f le ſinus de la différence des azimuths, & g ſon coſinus.

La troiſieme Formule de M. de Maupertuis, donne $\frac{rn}{pm} = \frac{su - cx}{t}$ (en prenant $x = \frac{rx}{y}$, pour la tangente de la délinaiſon

déclinaiſon d'un aſtre) & $\frac{rn'}{m'} = \frac{su'-cx'}{t'}$ pour un autre aſtre ; mais $m' = \frac{gm-fn}{r}$, & $n' = \frac{fm+gn}{r}$. Donc $\frac{ru'}{m'} = \frac{frm+grn}{gm-fn}$ $=$ (à cauſe de $m = \frac{rnt}{su-cx}$) $\frac{frt+grsu-grcx}{grt-fsu+fcx} = \frac{su'-cx'}{t'}$; mais nous avons $t' = \frac{bt-au}{r}$, & $u' = \frac{at+bu}{r}$. Donc en ſubſtituant ces valeurs, on aura : $\frac{frt+grsu-grcx}{grt-fsu+fcx} = \frac{ast+bsu-crx'}{bt-au}$.

Ce qui donne l'équation ſuivante :

$$\left.\begin{array}{c} tt-\frac{grx}{fc} \\ -\frac{au}{b} \\ -\frac{asx}{bc} \\ +\frac{grrx'}{bcf} \end{array}\right\} t = \left\{\begin{array}{c} \frac{rsx'}{bc} \\ +\frac{sx}{c} \\ -\frac{agrx}{bcf} \end{array}\right\} u \quad \begin{array}{c} +\frac{agr^3s}{bccf} \\ -\frac{rrss}{cc} \\ -\frac{rxx'}{b} \end{array}$$

que l'on peut exprimer ainſi :

$$\left.\begin{array}{c} tt+A \\ +Cu \end{array}\right\} t+Bu+Dr=0.$$

Et réduiſant enſuite la valeur de $u = \sqrt{rr-tt}$, on aura :

$$0 = Dr+Br \begin{array}{c} +At \\ +Crt \end{array} \begin{array}{c} -\frac{Btt}{2r} \\ +tt \end{array} -\frac{Ct^3}{2r} -\frac{Bt^4}{8r^3} -\frac{Ct^5}{8r^3} -\frac{Bt^6}{16r^5} - \&c.$$

& par le retour des ſuites, on aura, ſelon la Formule du P. Renaud, *p.* 437, premiere édition, de l'analyſe démontrée,

$$t = \frac{-Dr-Br}{A+Cr} - \frac{2rr+Br}{2}\left(\frac{\overline{D+B}^2}{\overline{A+Cr}^3}\right) + \frac{\overline{2r-B}^2(r)+Acrr+ccr^3}{2(A+cr)^5}\left(\begin{array}{c}-D \\ -B\end{array}\right)^3$$

$+$ &c. c'eſt-à-dire, pour les deux premiers termes,

$$t = \frac{agr^3s-bfrrss-ccfrxx'+cfrrsx'+bcfrsx-acgrrx}{-bcgrx-acfsx+cgrrx'-accfr}$$

$$\frac{\left(-2bcfrr-frrsx'-bfrsx+agrrx\right)\times\left(\begin{array}{c}-agrrs+bfrss+ccfxx' \\ -cfrsx-bcfsx+agcrx\end{array}\right)^2}{2(-bgrx-afsx+grrx'-acfr)^3}$$

Lorſque $f = 0$, la premiere équation donne celle du Problème 26. de M. de Maupertuis, $rras = rcx't - bcxt + acxu$; & le premier terme de la ſuite, donne $rras = rcx't - bcxt + acrx$. Lorſque $b = 0$, l'équation donne $t = \frac{-cfsx'u + cgrxu - gr^3s + ccfxx'}{ccfu + cfsx - cgrx'}$. Lorſque $c = 0$; ou que le pole eſt au zénith, on trouve dans l'équation & dans la ſuite, t infini; ce que l'on ſçait d'ailleurs. Si l'on ſuppoſe x & $x' = 0$; on trouvera par l'équation:

$$t = \sqrt{\frac{aa}{2} + \frac{abgrs}{ccf} - \frac{bbss}{cc} \pm \sqrt{\left(\frac{aa}{2} + \frac{abgrs}{ccf} - \frac{bbss}{cc}\right)^2 - \left(\frac{bss}{cc} - \frac{agrs}{ccf}\right)^2 rr}}.$$

Pour conſtruire cette équation, $\left.\begin{matrix} tt + A \\ + Cu \end{matrix}\right\} t + Bu + Dr = 0$; par le moyen de l'hyperbole entre ſes aſymptotes, dont les coordonnées ſoient x & y; faiſons $A = \frac{B}{C} - Cu - t + x$ & $t = y - \frac{B}{C}$, ce qui donne $u = \frac{x - t - A}{C} + \frac{B}{CC}$, & l'équation devient $xy - \frac{BA}{C} + \frac{BB}{CC} + Dr = 0$. On voit aſſez la conſtruction qui réſulte de cette réduction; & combien ce Problème eſt important, puiſqu'il eſt indépendant de la réfraction & de la variation de la bouſſole. On pourroit le rendre plus facile, par le moyen d'une Table, ou d'un Inſtrument Géométrique.

FIGURE ET DE'NOMINATIONS DE L'ASTRONOMIE NAUTIQUE.

Fig. X. LE rayon $CP = r$.

Le ſinus de la déclinaiſon de l'aſtre $CB = x$, ſon coſinus $DB = y$.

Le ſinus de la hauteur polaire $PQ = s$, ſon coſinus $CQ = c$.

Le ſinus de la hauteur de l'aſtre $CG = h$, ſon coſinus GL ou $GE = k$.

Le ſinus de l'angle horaire $= t$, ſon coſinus $= u$.

Le ſinus de l'angle azymuthal $= m$, ſon coſinus $= n$.

FORMULES.

I. $\pm rsh \mp rsx = cyu$.

II. $rrx \pm nck = rsh$.

III. $+rnyt \pm rmcx = msyu$; ou $-rnyt + rmcx = msyu$, lorſque F eſt entre B & O.

IV. $rcht \pm nskt = rmku$.

V. $mk = yt$.

TROISIEME PARTIE.

En quelle rencontre l'erreur des Inſtrumens influe moins dans la détermination de l'heure.

I. POUR trouver dans quelle rencontre l'erreur dans la hauteur influe plus ou moins dans la détermination de l'heure, je me ſervirai des formules de M. de Maupertuis, nommant dH l'erreur dans la hauteur, & dE celle de l'heure. Or nous avons par la nature du cercle, $r : k :: dH : dh = \frac{kdH}{r}$; & la premiere formule de M. de Maupertuis donne $\pm rrdh = cydu$, ou $du = \frac{rrdh}{cy}$ $=$ (en ſubſtituant la valeur de dh) $\frac{rkdH}{cy}$; Mais l'équation du cercle donne auſſi, $t : r :: du : dE = \frac{rrkdH}{tcy}$.

Cette expreſſion fait voir combien une erreur commiſe dans l'obſervation de la hauteur d'un aſtre, influe dans le calcul de l'heure; puiſqu'en ſe trompant de la quantité dH dans la hauteur, on ſe trompe de la quantité $\frac{rrkdh}{tcy}$, dans la détermination de l'heure. Ainſi l'erreur de la hauteur eſt à celle de l'heure comme tcy eſt à rrk, ou en ſuppoſant c & y conſtantes, comme t eſt à k : c'eſt-à-dire, que l'erreur de l'heure ſera d'autant plus petite, que la hauteur ſera plus grande, & l'heure plus près de 6 heures; puiſqu'alors le coſinus k de la hauteur, ſera plus petit, & le ſinus t de l'heure plus grand. Par conſéquent, on doit préférer les aſtres qui ſont auprès du cercle de 6 heures, & ceux qui ſont plus élevés; d'autant plus que ceux-ci ſont moins expoſés à l'erreur de la réfraction.

II. Pour trouver le *minimum* de cette valeur $\frac{rrkdH}{tcy}$, j'en prens la différence, en ſuppoſant dH, c & y conſtantes; & l'égalant à l'infini, je trouve $r = u$, ou $t = 0$; c'eſt-à-dire, que la plus grande erreur dans l'heure, eſt lorſque l'aſtre eſt au méridien; ce que l'on ſçait d'ailleurs. Mais ſi on égale cette différence à zéro, on trouve $tdk = kdt$, ou $\frac{t}{k} = \frac{dt}{dk}$. Subſtituons à cette raiſon, ſa valeur tirée de la premiere formule de M. de Maupertuis, $\pm rrdh = cydu$, ou $\mp rrukdk = -cythdt$, ou $\frac{dt}{dk} = \pm \frac{rruk}{cyth}$; ce qui donne $cytth = \pm rrukk$, ou $kr\sqrt{u} = t\sqrt{hcy}$, lorſque l'aſtre eſt au-deſſus du point B, ou entre 6 heures & midi, conformément à la note du problème I. de l'Aſtronomie Nautique. Mais lorſqu'il eſt au-deſſous, la valeur de k eſt imaginaire. Ce qui fait voir qu'il faut chercher la moindre erreur dans les hauteurs qui ſont entre midi & 6 heures, & non pas au-deſſous. Et en

effet, si k étoit $= 0$, l'erreur $\frac{rrkdH}{tcy}$ ne feroit pas $= 0$, parce que t feroit $= 0$. Subſtituons dans cette formule la valeur de $k = \frac{t}{r} \sqrt{\frac{hcy}{u}}$, nous aurons le moindre $dE = rdH \sqrt{\frac{h}{cyu}}$. Ce qui fait voir qu'entre midi & 6 heures, on doit préférer la moindre hauteur & la moindre diſtance à midi.

L'équation $k = \frac{t}{r} \sqrt{\frac{hcy}{u}}$, donne $urr(rr - hh) = tthcy$, & $h = -\frac{ttcy}{2urr} \pm \sqrt{rr + \frac{t^4ccyy}{4uur^4}}$. Si $t = r$, ou $u = 0$, l'aſtre étant au cercle de 6 heures, la quantité rr diſparoîtra, & l'on aura $h = 0$. Donc $dE \left(= rdH \sqrt{\frac{h}{cyu}}\right)$ feroit alors $= rdH \sqrt{\frac{0}{0}}$ ou $= \sqrt{-\frac{rr}{2} + \frac{rr}{2}}$. Quelle eſt la valeur de cette fraction $\frac{0}{0}$? M. le Marquis de l'Hôpital preſcrit (Article 163, des infiniment petits) d'en différentier le numérateur & le dénominateur ; ce qui donne encore ici $\frac{0}{0}$: & M. Jean Bernoulli veut qu'on prenne une 2e 3e 4e, &c. différence des deux termes, juſqu'à ce que la fraction $\frac{0}{0}$ diſparoiſſe. Mais cela ne ſuffit pas dans le cas préſent, puiſque quand même on prendroit une infinité de différences, on trouvera toûjours $\frac{0}{0}$, ce qui vient des incommenſurables. Il faut donc en délivrer cette fraction, & faire $dE^2 = \frac{rrhdH^2}{cyu}$, & différentiant les deux termes, on aura $\frac{dH^2 rrdh}{cydu}$; & par la ſubſtitution de $\frac{dh}{du} = \frac{cy}{rr}$, on aura $dE = dH$, lorſque h & $u = 0$: ce qui ſe démontre comme la méthode de M. le Marquis de l'Hôpital, en faiſant $AB = rr$, $AP = tt$, $PN = h$, $PO = cyu$, & $PM = \frac{rrh}{cyu}$. Cela peut auſſi ſervir à perfectionner la méthode de M. Bernoulli.

III. Dans ce moindre $rdH\sqrt{\frac{h}{cyu}}$, il y a encore un moindre, qui eſt le *minimum minimorum.* On le trouve en égalant à zéro la différence de cette expreſſion ; ce qui donne $\frac{dh}{du} = \frac{h}{u}$; & en ſubſtituant la valeur $\frac{cy}{rr}$ de $\frac{dh}{du}$, on aura $h = \frac{ucy}{rr}$. Donc le *minimum* eſt $= dH$; ce qui fait voir que la moindre erreur poſſible, eſt égale à celle de la hauteur, & cette erreur eſt dans le cas de $h = \frac{ucy}{rr}$.

Si l'on ſubſtitue dans la premiere formule $\frac{rrkdH}{cyt}$, la valeur de $yt = mk$, tirée de la 5[e] de M. de Maupertuis, on aura $\frac{rrdH}{cm}$, & l'on verra clairement que l'erreur de l'heure ne peut pas être moindre que celle de la hauteur, puiſque le quarré rr ne peut pas être plus petit que le rectangle cm : mais comme ce quarré peut devenir infiniment plus grand que cm, l'erreur de l'heure peut devenir infinie, par rapport à celle de la hauteur, & c'eſt lorſque c ou $m = 0$; mais cela ne doit s'entendre que dans le cas des deux erreurs infiniment petites : car ſi l'on ſuppoſoit celle de la hauteur finie, on ne pourroit pas conclurre que l'erreur de l'heure fût infinie. Comme dans le cercle dont les appliquées ſont k, & les coupées depuis le centre, ſont h, l'équation étant $rr - hh = kk$, on trouve bien que $dH : dh :: r : k$, & que dans le cas de $k = 0$, dH eſt infini par rapport à dh ; parce qu'alors k devient $= r$, & $dh = 0$; mais on ne peut pas dire que dh devenant une quantité finie, dH ſoit réellement infinie lorſque $k = 0$.

On voit ici qu'on doit préférer les aſtres les plus près du premier vertical, dans lequel $m = r$; l'erreur dE étant alors $= \frac{r}{c} dH$. Si c étoit encore $= r$, ou le pole dans

l'horiſon, l'erreur dE ſeroit $= dH$. En genéral l'erreur de l'heure $\frac{rrdH}{cm}$ eſt à celle de la hauteur, en raiſon compoſée inverſe du coſinus de la hauteur polaire, & du ſinus de l'angle azymuthal.

Si dans la valeur trouvée de $h = \frac{ucy}{rr}$, on fait $c = r$, & $y = r$; c'eſt-à-dire, ſi l'aſtre eſt dans l'équateur, & le pole dans l'horiſon, on aura $dE = dH$; & ſi l'on avoit ſubſtitué ces deux valeurs $y = r$, & $c = r$, dans la premiere formule $\frac{krrdH}{cyt}$, on auroit trouvé $dE = \frac{kdH}{t}$; ce qui revient au même, parce que dans ce cas, $k = t$, ou $u = h$.

IV. Si l'on ſe trompe ſeulement dans la hauteur du pole, ſoit dS cette erreur, nous aurons $r : c :: dS : ds = \frac{cds}{r}$. La premiere formule de M. de Maupertuis nous donnera $\mp rxds = cydu + uydc$, ou $\mp rcxds + uysds = ccydu$, & $du = \frac{uys \mp rcx}{cyr} dS$, & la proportion $t : r :: du : dE$ donne $dE = \frac{uys \mp rcx}{cty} dS$.

On voit d'abord que $dE = 0$, lorſque $uys = \pm rcx$. Si l'aſtre eſt dans l'équateur, on a $x = 0$, $y = r$. Donc alors $dE = \frac{us}{ct} dS$, qui ſeroit $= 0$: ſi u ou S étoient $= 0$, c'eſt-à-dire, ſi le pole étoit à l'horiſon, ou l'aſtre au Cercle de 6 heures. Et en effet, dans la ſphere droite, l'heure ne peut pas varier ſans que la hauteur de l'aſtre varie, & dans la ſphére oblique, l'aſtre eſt toûjours dans le cercle de 6 heures, s'il eſt dans l'équateur.

Si $u = 0$, ou $t = r$, dE ſera $= \mp \frac{x}{y} dS$; & ſi de plus $x = y$, dE ſera $= dS$. Il vaut donc mieux obſerver les aſtres qui ſont près du cercle de 6 heures, & dont la déclinaiſon eſt très-petite.

Il eſt inutile de chercher le *minimum* de cette formule;

puifque dE peut devenir $=0$, & c'eft lorfque $uys = \pm rcx$, ou $x = \frac{urs}{\sqrt{r^4 - sstt}}$.

V. Pour trouver de même dans quelle rencontre l'erreur de l'azymuth (dM) influe moins fur l'heure, nous avons $r : n :: dM : dm = \frac{n.dM}{r}$. La premiere formule de M. de Maupertuis donne $dh = \frac{\pm cydu}{rr}$; & la deuxieme, $dh = \mp \frac{ckkmdm}{nkrs \mp nnch}$. Donc $\mp kkmrrdm = (\mp nkyrs + nncyh)$ du, ou $du = \frac{\mp kkmrr}{\pm nkyrs + nncyh} du =$ (en fubftituant $yt = mk$) $\frac{\mp rrkt}{\pm nkrs + nnch} dm = \frac{\mp rkt}{\pm krs + nch} dM$. Mais $t : r :: du : dE = \frac{\mp rrk}{\pm krs + chn} dM$.

On voit d'abord que l'erreur eft moindre, lorfque les aftres font au-deffus du point B, puifque dans ce cas le dénominateur eft $krs + chn$.

Si $s = r$, on a $dE = dM$, lorfque le pole eft au zénith. En prenant la différentielle de cette formule, & fi on l'égale à zéro dans le cas de l'aftre au-deffus du point B, en faifant feulement k, h & n variables, on trouvera $(hhn + kkn)$ $dk = hhkdn$, ou $dk = \frac{hhk}{rrn} dn =$ (par la deuxieme formule de M. de Maupertuis) $\frac{-ckhdn}{krs + chn}$. Donc $k = \frac{-chhn - crrn}{rsh}$. Donc en fubftituant cette valeur de k dans la formule $dE = \frac{-rrk}{krs + chn} dM$, on aura le moindre requis, $\frac{rr + hh}{-rs} dM$. Ce qui fait voir que l'erreur eft moindre, lorfque la hauteur de l'aftre eft fort petite au-deffus du point B, & lorfque le pole eft fort élevé au-deffus de l'horifon. Le moindre au-deffous de B eft $\frac{r^3 - rhh}{2shh - srr} dM$. Si l'on fubftitue à la place de h, fa valeur $\frac{cyu + rsx}{rr}$, tirée de la premiere formule

de

de M. de Maupertuis, on verra que l'erreur eſt moindre du côté du cercle de 6 heures, où $u = o$, dans les aſtres qui ſont au-deſſus de B, ou plutôt dans ceux qui répondent au point B.

CONCLUSION.

La meilleure maniere de trouver l'heure en mer par obſervation, pendant la nuit, eſt d'obſerver le paſſage de deux étoiles par le même azymuth, parce que cette obſervation eſt très-aiſée, & qu'elle n'eſt pas expoſée aux erreurs de la réfraction, de la variation de la bouſſole, & de la ſuſpenſion des inſtrumens à plomb. Un fil à plomb ſuffit, lorſque deux étoiles ſont dans le même vertical.

La meilleure maniere pendant le jour, eſt de prendre deux hauteurs du Soleil, & d'obſerver la différence des tems & des azymuths; parce que cette obſervation eſt indépendante de la latitude, & que la différence des tems corrige la différence des azymuths, & au contraire.

On peut auſſi ſe ſervir de l'heure du lever ou du coucher du Soleil, ayant égard à la réfraction; & il eſt inutile de répéter ici ce que l'on trouve ailleurs. On peut encore employer le Problème XXX de M. de Maupertuis, qui eſt indépendant de la hauteur du pole & de la réfraction.





ADDITIONS ET CORRECTIONS

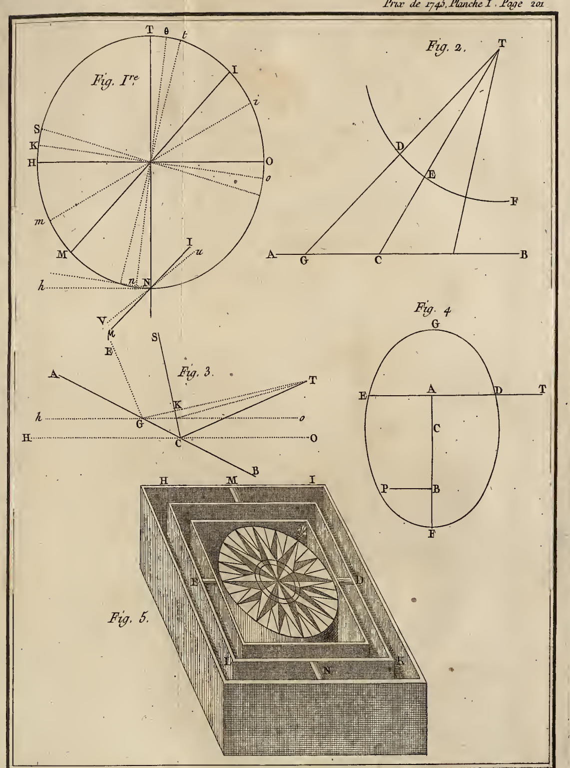
Faites à la Piece cottée N° IV, & qui a pour Sentence & Devise :

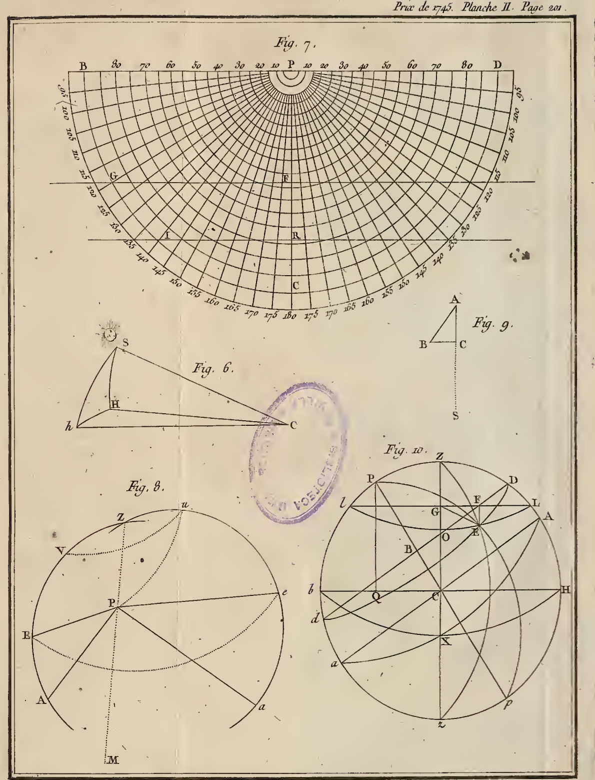
Nihil unquàm invenietur, si contenti fuerimus inventis.
Sen. *Ep.* 64.

L'ARTICLE second de la premiere Partie, doit être changé en cette maniere.

II. Ce que l'on vient de dire, prouve qu'on peut aujourd'hui observer la hauteur des étoiles sur un navire, beaucoup plus exactement qu'on ne le pouvoit avant l'invention des Octans à miroir. Mais la plus grande difficulté, qui est la suspension des instrumens à plomb, subsiste encore, & il est question de la vaincre, ou au moins de la diminuer autant qu'il sera possible. C'est même le principal objet que nous devons nous proposer, pour suivre les vûes de l'Académie Royale des Sciences.

M. Bouguer a fait sur cette matiere une remarque importante, qui mérite toute notre attention : on la trouve dans le Chap. IIIe de sa Méthode d'observer sur mer la hauteur des astres. « Représentons-nous, dit-il, un pendule, un poids suspendu à l'extrémité d'un fil, ce pendule demeurera exactement vertical, tant que le navire cinglera avec un mouvement parfaitement uniforme ;


Fig. Ire
T
θ
t
I
i
S
K
H
O
o
m
M
N
n
h
I
u
V
μ
E
Fig. 2.
T
D
E
F
A
G
C
B
Fig. 3.
S
A
T
K
h
G
o
H
C
O
B
Fig. 4
G
E
A
D
T
C
P
B
F
Fig. 5.
H
M
I
E
D
L
N
K


Fig. 7.
B
80
70
60
50
40
30
20
10
P
D
95
100
105
110
115
120
125
130
135
140
145
150
155
160
165
170
175
180
G
F
I
R
C
Fig. 9.
A
B
C
S
Fig. 6.
S
H
h
C
Fig. 10.
Z
P
D
l
F
L
G
A
E
O
B
b
Q
C
H
d
X
a
p
z
Fig. 8.
u
Z
V
P
e
E
A
a
M

» mais il commencera à faire des vibrations, aussi-tôt que » la vitesse du sillage souffrira quelque changement; par- » ce que le mouvement du poids ne s'accordera pas avec » le mouvement du point de suspension. Si une vague, » par exemple, en choquant la proue, fait diminuer tout » à coup la vitesse du navire d'une certaine quantité, le » poids ira ensuite plus vîte que le point de suspension de » cette même quantité; & ainsi il avancera vers l'avant, » en décrivant un arc-de-cercle par rapport au navire, » jusqu'à ce qu'il ait perdu en montant toute sa vitesse re- » lative : mais lorsqu'il l'aura perdue, il retournera en ar- » riere par sa pesanteur; il fera donc plusieurs vibrations » de part & d'autre; & comme l'agitation de la mer est » continuelle, ces vibrations ne cesseront presque jamais. » Or la même chose doit arriver aussi aux instrumens pro- » pres à prendre hauteur; car ce ne sont que des especes » de pendules, malgré tous les ressorts & tous les genoux » auxquels ils sont attachés. »

D'un autre côté, M. Hughens ayant proposé dans son excellent traité, *De Horolog. Oscillat.* de suspendre son horloge de la même maniere que l'on suspend les boussoles, en y ajoûtant un poids de 50 livres, conclut en cette maniere : *Quibus ita se habentibus, quâcumque navis inclinatione perpendicularem positum servat horologium..... Porrò axium crassitudo quæ pollicem æquat, gravitasque plumbi inferiùs appensi, nimiam movendi libertatem horologio adimunt, faciuntque ut, si fortè succussu navis graviore commotum fuerit, continuò ad quietem perpendiculumque suum revertatur.*

Ces deux sentimens, qui paroissent opposés, doivent nous tenir en suspend; jusqu'à ce que nous ayons bien examiné la nature du mouvement d'un Astrolabe, tel que *EMOMD*, dont le centre de gravité & de grandeur est au point *A*, & que je suppose suspendu comme une *Fig. IV. n° 2.*

bouſſole, ou comme l'horloge de M. Hughens.

Cet aſtrolabe étant en repos, ou, ce qui revient au même, *demeurant exactement vertical, tant que le navire ſe meut d'un mouvement parfaitement uniforme*; je ſuppoſe d'abord que la viteſſe du ſillage venant à augmenter, le point C de ſuſpenſion reçoive une nouvelle impreſſion, ſelon une direction quelconque, parallele au plan de l'inſtrument (nous parlerons dans la ſuite, de la direction oblique, ou perpendiculaire au même plan). On pourra toûjours décompoſer cette direction parallele en deux autres, l'une CA, verticale, & l'autre CE, horiſontale. La direction verticale ne produira aucun balancement, & il ne reſtera que la direction horiſontale, qui fera effort pour mouvoir toutes les parties M de l'Aſtrolabe, autour d'un centre fixe B, que l'on appelle, *centre de rotation*; tandis que la peſanteur réunie au centre de gravité A, fera effort pour mouvoir l'Aſtrolabe autour du point ou de l'axe de ſuſpenſion C.

Pour déterminer exactement le centre de rotation B; il faut ſuppoſer l'Aſtrolabe ſans peſanteur, ou qu'il ſe meuve ſur un plan horiſontal infiniment poli, & ſans frottement, parce que ce mouvement de rotation n'eſt produit que par la ſeule inertie des particules M, & qu'il eſt indépendant de leur peſanteur. Si de chaque point M de l'Aſtrolabe, on mene au centre B une ligne MB, on voit que le point B étant immobile, toutes les forces d'inertie M doivent être en équilibre avec la puiſſance appliquée en C. Suppoſons donc que le point C ſoit porté en c autour de B, les particules M ſeront portées en m ſur les directions Mm, perpendiculaires à BM, & les petites lignes Mm ſeront proportionnelles aux rayons BM, BM, &c. Les forces de ces particules ſont en raiſon compoſée de leurs maſſes, & de leurs viteſſes initiales, ou de $M.BM$;

& il résulte de ces forces qui résistent au mouvement de rotation, une impression (B), qui pousse le centre B perpendiculairement à CB. Cette impression B est dirigée du même côté où tend la force C, selon la direction BP, perpendiculaire à CB.

Prolongeons chaque Mm en H, & abbaissons CH perpendiculaire à MH. Nous avons donc un levier coudé HCB, dont le point d'appui est C, & le moment de la force d'inertie $M.BM$, appliqué en H, sera $= M.BM.CH$; ce qui donne pour l'équilibre, $B.CB = M.BM.CH$. Mais abbaissant MF perpendiculaire à CB, nous avons (à cause des triangles semblables CHG, FBM, GBM), $CH:CG::BF:BM::BM:GB$. Donc $CG.BF = CH.BM$; & $\overline{BM}^2 = BF.GB$. Donc en substituant ces valeurs, on aura : $B.CB = M.CG.BF =$ (à cause de $CG = CB - GB$) $M.BF.CB - M.BF.GB = M.BF.CB - M.\overline{BM}^2$; & $B = M.BF - \frac{M.\overline{BM}^2}{CB}$. Donc $\int.B = \int.M.BF - \int\frac{M.\overline{BM}^2}{CB}$; Mais $\int.B = 0$, parce que toutes les impressions faites sur le point B, doivent être les unes positives, & les autres négatives, pour conserver ensemble un équilibre qui rende le point B immobile au commencement du mouvement. Donc $\int.M.FB = \int\frac{M.\overline{BM}^2}{CB}$.

Soit A la somme de toutes les particules qui composent l'Astrolabe, on aura par la nature du centre de gravité, ou plutôt du centre de masse, $\int.M.BF = A.BA = \int\frac{M.\overline{BM}^2}{CB}$, & $CB = \frac{\int.M.\overline{BM}^2}{A.BA}$. Donc la distance CB est égale à celle d'un pendule composé, suspendu au point B, & dont le centre d'oscillation seroit en C. Car telle est la propriété du centre d'oscillation, comme l'a démontré

M. Hughens, *pag.* 100, de ſon livre *De Horolog. Oſcillat.* Et l'on ſçait par les démonſtrations du même Auteur, que l'on peut prendre le centre de ſuſpenſion pour centre d'oſcillation, auquel cas *C* deviendra centre de ſuſpenſion.

La viteſſe du centre de gravité *A*, eſt à celle du point *C* comme *BA* eſt à *BC*. Le point *c* ſe trouvant toûjours dans la ligne *CE*, par l'hypotheſe, le centre de rotation *B*, décrira la cycloïde ordinaire, comme l'a démontré M. Clairaut, dans les Mémoires de 1736. Le cercle générateur aura pour rayon *CB*, & ſon centre roulant ſur *CE*, le point *B* ſera le point décrivant du côté de *P*. La ligne *CB* ſera la tangente initiale de cette cycloïde.

Si l'on prend l'Aſtrolabe pour un cercle homogène, on aura, ſelon la regle d'Hughens, *pag.* 128, *De Horol. Oſcillat.* $CA : AO :: AO : 2AB$. Donc $AB = \frac{\overline{AO}^2}{2CA}$. Donc la diſtance *AB*, croît en raiſon compoſée de la raiſon directe doublée du rayon *AO*, & de la raiſon ſimple inverſe de la diſtance *CA*. Donc plus le point *C* de ſuſpenſion de l'inſtrument ſera proche de ſon centre de gravité *A*, moins il ſera expoſé à tourner autour de *B*, ce point étant éloigné à proportion ; en ſorte que ſi $CA = 0$, on auroit $AB = \infty$. De même, plus le quarré du rayon *AO* ſera grand, ou plus l'aire du cercle ſera grande, moins l'Aſtrolabe ſera expoſé à tourner autour de *B*.

On ne peut pas anéantir la diſtance *CA* ; parce que ſi l'Aſtrolabe étoit ſuſpendu par ſon centre de gravité *A*, on ne ſeroit jamais aſſûré que le point *O*, par où commence la diviſion, fût dans la verticale *AB*, & qu'ainſi l'aſtrolabe ſeroit inutile à l'obſervation de la hauteur des aſtres.

Si le point *C* étoit ſeulement une ou deux lignes au-deſſus du centre de gravité *A*, on ſeroit preſque dans la

même incertitude. Il faut donc s'attacher principalement à augmenter le rayon AO autant qu'il sera possible ; ce qui fournira trois avantages : car si le rayon AO est 10 fois plus grand, les degrés de l'instrument seront 10 fois plus sensibles ; le point B sera 100 fois plus éloigné, & la pesanteur de l'Astrolabe 100 fois plus grande. On doit même tâcher d'augmenter considérablement la pesanteur absolue de l'instrument, parce qu'elle résiste beaucoup à ce mouvement de rotation autour du point B, & qu'elle peut même l'anéantir.

En effet, dans le calcul précédent, on n'a pas considéré la pesanteur des particules M de l'Astrolabe, mais seulement leur inertie. Cette pesanteur sera cause que le centre B restera moins en arriere, & qu'il sera repoussé vers P, sur la ligne horisontale BP. Soit A le poids de l'instrument, réuni au centre de gravité A. Soit C la force qui pousse le point C, & lui fait parcourir Cc. Ayant décrit du centre B les petits arcs Cd, Ae, on verra que la puissance C fait effort pour élever le poids A de la hauteur cd, & que le poids A fait effort pour descendre de la hauteur ae. Or, $cd : ae :: CB : AB$; donc le moment de la force $C = C.\ cd$ étant égal à celui du poids A, dans l'état d'équilibre de ces deux forces, nous aurons $C.\ cd = A.\ ae$, & $C : A :: AB : CB$; ou $C = \frac{A.\,AB}{CB}$. Mais par la regle d'Hughens, *pag.* 124, *De Horol. Oscillat. Si magnitudo eadem nunc breviùs, nunc longiùs suspensa agitetur ; erunt sicut distantiæ axium oscillationis à centro gravitatis ; ita contrariâ ratione distantiæ centrorum oscillationis ab eodem gravitatis centro.* C'est-à-dire, que dans le pendule CB, la quantité $CA.\ AB$ est constante, ou $AB = \frac{aa}{CA}$, prenant a pour une constante, & $C = \frac{A.\,aa}{CA.\,CB} = \frac{A.\,aa}{aa + CA^2}$.

Cette force C ne peut pas être infinie, car il faudroit pour cela que $aa+\overline{CA}^2=0$, ou $CA=a\sqrt{-1}$. De plus, C ne peut pas être plus grand que A dans l'état d'équilibre. Car soit $C=nA$, prenant n pour un nombre entier, on aura $n(aa+\overline{CA}^2)=aa$; & $aa(n-1)=-n(\overline{CA}^2)$. Soit $n=2$; donc $aa=-2\overline{CA}^2$, racine imaginaire. Il faut donc chercher un point C de suspension, tel que le moment $C.CB$ soit le plus petit de tous, en supposant C & A constantes. Pour cela, j'égale à zéro la différentielle $dCA+dAB$, ce qui donne $dCA=-dAB$, & prenant la différentielle de l'équation $CA.AB=aa$, j'ai $CA.dAB=-AB.dCA$; & en substituant, il vient $CA=AB$. Le plus petit moment $C.CB$, est donc $2CA$, ce qui donne AB ou $AC=\frac{\overline{AO}^2}{2AB}$. Et faisant $AO=1$, j'ai AC ou $AB=\sqrt{\frac{1}{2}}$. La longueur du pendule CB, est $=\sqrt{2}$. Si l'on faisoit AB plus petit, par exemple, $\frac{1}{2}CA$, on auroit $\overline{CA}^2=1$; & le pendule CB seroit $=\frac{3}{2}>\sqrt{2}$. Si l'on faisoit AB plus grand, par exemple, $=2CA$, on auroit $CA=\frac{1}{2}$, & le pendule $CB=\frac{3}{2}$. Ainsi la longueur $=\sqrt{2}$, est celle du pendule brachystochrone, c'est-à-dire, de celui dont les vibrations sont les plus promtes. Donc le moment trouvé $C\sqrt{2}=A\sqrt{\frac{1}{2}}$, est un moindre.

Ce point de suspension C étant ainsi déterminé, il suit que dans l'équilibre $C:A::\sqrt{\frac{1}{2}}:\sqrt{2}::1:2$, & que si le poids A de l'Astrolabe est $=2C$, il n'y aura point de rotation autour de B, en supposant cette suspension; au lieu qu'en la faisant varier, on ne trouve l'équilibre que lorsque $CA=0$.

Si le poids A étoit $>2C$, la force C ne pourroit pas l'entraîner, & il n'y auroit point de mouvement de rotation.

rotation. Il faut donc que le poids de l'Aſtrolabe ſoit auſſi grand qu'il eſt poſſible, pour approcher du double de la force C, ſans craindre de la ſurpaſſer.

Si le poids A eſt $< 2C$, le centre de rotation B ſubſiſtera, & il décrira la courbe déterminée par M. Clairaut, dans les Mémoires de 1736 (Probl. 5, p. 17.) dont l'équation eſt $\frac{dy}{\sqrt{1-yy}} = \frac{dz}{m}\sqrt{2gy+2pmm}$, en faiſant le ſinus total $= 1 = CB$; le ſinus de l'angle variable, formé par BC, avec $EC = y$; les conſtantes $Cc = dz$; la viteſſe conſtante du point $C = m$, la peſanteur $= g$, & p une autre conſtante. Le premier membre eſt l'expreſſion de l'angle formé par BC avec bc, ou des deux poſitions conſécutives de cette ligne. Si l'on fait $g = 0$, on trouve que ces angles ſont proportionnels aux parties Cc, & que par conſéquent cette courbe eſt une cycloïde. Si dans quelques cas il arrivoit que $\frac{dy}{\sqrt{1-yy}} = 0$, c'eſt-à-dire, que deux poſitions conſécutives de CB, cb fuſſent exactement paralleles, par exemple, lorſque $y = a$, on auroit la conſtante $p = -\frac{ga}{mm}$, & l'équation deviendroit $\frac{dy}{\sqrt{1-yy}} = \frac{dz}{m}\sqrt{2g(y-a)}$, ou $\frac{dy}{\sqrt{1-y.1+y.y-a}} = \frac{dz}{m}\sqrt{2g}$. Le ſinus a ne peut pas être $= 1$, ou ſinus total, ce qui rendroit le premier membre $= \frac{dy}{(1-y)\sqrt{-1-y}}$ imaginaire. Ainſi le point B ne peut pas décrire une ligne droite parallele à CE. L'angle $\frac{dy}{\sqrt{1-yy}}$ eſt proportionnel à $\sqrt{y-a}$. Donc y ne peut pas être $= 0$, & cet angle ne diſparoît que lorſque $y = a$; c'eſt le *minimum* de l'ordonnée y de cette courbe. C'eſt dans ce point ſeul que la vîteſſe horiſontale de B eſt égale à celle de C; & comme dans ce cas la ligne cb eſt

oblique à l'horifontale EC, la viteffe de B s'accélere par la pefanteur, & le finus y devient plus grand. Il faudroit donc arrêter promptement cette accélération, ou la diminuer, enforte qu'elle devint infenfible. C'eft ce que fait M. Hughens, par la grandeur du poids, & par le frottement de l'effieu.

Fig. VI. n° 2. On fixera donc l'Aftrolabe MO par fon centre, fur un effieu dont on ne voit qu'une partie AE, dans la Fig. VI n°. 2, & qui eft vû tout entier dans la Fig. VI n° 3. Le point de fufpenfion eft cependant en C, à la diftance requife du centre de gravité, à caufe des coudes E & R de l'effieu. Le plan de cet Aftrolabe eft perpendiculaire à l'effieu, ou parallele au côté DAP du chaffis qui le foûtient. Ce chaffis eft encore fufpendu par deux pivots F & G, en forte qu'il tourne librement fur le pied de fer ou de bois $FHKG$, lequel doit être fixé fur le plancher du navire, afin qu'il n'ait d'autre mouvement que celui du navire.

L'un des plus grands avantages de cette fufpenfion, eft que l'Aftrolabe ne peut avoir par ce moyen que deux mouvemens circulaires, l'un autour de l'axe AB, & l'autre autour de l'axe FG. Mais l'axe AB étant mobile autour de l'axe fixe FG, le mouvement circulaire, ou la main de l'Obfervateur, fait néceffairement une impreffion fur cet axe AB, & le force à tourner en très-peu de tems autour de l'axe FG. De-là vient que dans les bouffoles, où les pinnules font toûjours placées dans la direction de l'axe AB, on voit toûjours l'aftre à fort peu près dans le même azymuth, & c'eft même là le plus grand avantage de la fufpenfion des bouffoles. En effet, le mouvement autour de l'axe FG, quelque grand qu'il foit, n'empêche pas que les pinnules placées dans l'axe AB, ne foient toûjours dans le même azymuth, & que par conféquent l'obfervation

de l'azymuth, ou du rumb de vent ne ſoit exacte. Il eſt vrai que le Soleil étant à l'horiſon, lorſqu'on obſerve la variation de l'aiguille aimantée, le mouvement de la bouſſole autour de l'axe *AB*, ne peut pas faire un écart ſenſible; au lieu que dans les grandes hauteurs des aſtres, il faut être bien attentif à détruire tout le mouvement de la bouſſole autour de *AB*, pour ne pas ſe tromper dans le vrai azymuth.

On voit par expérience, que l'aſtrolabe roulant autour de l'axe *FG*, ne roule plus autour de l'axe *AB*, quoique ces deux mouvemens ne ſoient pas contraires, leurs directions étant perpendiculaires l'une à l'autre. Mais on doit attribuer cet effet principalement au poids de l'inſtrument, & aux frottements de l'eſſieu *AB*, qui détruiſent aſſez promptement les vibrations de cette eſpece de pendule.

Il eſt donc à propos d'augmenter autant qu'il eſt poſſible le frottement de l'eſſieu *AB*, pour faire ceſſer promptement ſes vibrations. Le meilleur moyen pour cela, eſt, ce me ſemble, de le ſuſpendre par une ou pluſieurs cordes, qui faſſent ſur cet eſſieu, un ou pluſieurs tours; & qui ſoient fixées aux deux côtés oppoſés *FD*, *GP* du chaſſis. La preſſion de ces cordes détruira à chaque inſtant une grande partie de la vibration de l'Aſtrolabe. Et M. Varignon ayant démontré dans les Mémoires de 1717, que les preſſions des cordes ſont en raiſon compoſée des raiſons directes des forces comprimantes, & des longueurs des arcs comprimés, & de la raiſon inverſe des diametres de ces arcs; il ſuit que plus le poids ſera grand, plus la preſſion ſera forte; & que le poids reſtant le même, le frottement ſera proportionnel au nombre des tours de la corde ſur le même eſſieu. On peut donc par ce moyen augmenter le frottement de l'eſſieu tant qu'on voudra,

& diminuer le nombre des vibrations du pendule.

M. Hughens, dans la description de son Niveau à plomb, a employé l'huile pour arrêter les vibrations du pendule. Il me paroît que la pression d'une corde aura plus de force que cette résistance. Si la corde vient à se secher, elle ne sera pas assez tendue pour arrêter le mouvement du pendule : le remede est facile ; on n'a qu'à la mouiller pour la roidir.

Si l'on vouloit éviter les inconvéniens qui peuvent résulter de la multiplicité des tours d'une corde autour de l'essieu, on pourroit fixer à cet essieu une roue assez épaisse, pour recevoir dans toute sa circonférence, une entaille large & profonde, garnie de pointes de fer courtes & fortes, toutes perpendiculaires à la circonférence. La corde embrasseroit cette entaille hérissée de pointes, & seroit fixée, comme auparavant, aux côtés *FD*, *GP* du chassis.

On voit bien que la pression du poids fera enfoncer les pointes de fer dans les parties inférieures de la corde, & que chaque pointe enfoncée diminuera le mouvement de vibration, en se dégageant difficilement. On pourroit même fortifier l'engrainement des pointes de fer dans la corde, de maniere que le poids ne pourroit pas vaincre le frottement : mais il n'est pas difficile d'éviter cet inconvénient. Cette idée est semblable à celle de M. Bernoulli, dans son Mémoire sur le Cabestan, & à celle de M. Hughens, dans son *Horolog. Oscillat. p.* 4, *Fig.* I, où l'on voit cette roulette représentée par les lettres *DD*.

Les Ouvriers, comme le remarque M. Bernoulli, voulant ménager les cordes, qui souffrent beaucoup par cet engrainement, ont abandonné cette roulette, & y ont substitué une entaille qui va en se rétrécissant vers le centre, afin que quand la corde y est une fois admise, elle y

ſoit comprimée, en ſorte qu'elle ne gliſſe pas aiſément ſur la circonférence inférieure. On peut même, pour augmenter le frottement, rendre les deux côtés de l'entaille raboteux, à peu près comme les ſurfaces des limes.

Pour trouver dans ce cas les rapports du frottement, ſoit *BH* le diametre du trou dans lequel l'eſſieu *BG* peut rouler, pour faire tourner la ligne inflexible *PBC*, à laquelle on ſuppoſe un poids *P* attaché. Cette ligne étant fixée à l'eſſieu, peut repréſenter l'Aſtrolabe. Soit *B* le point d'attouchement de l'eſſieu contre le cercle *BH*; tranſportons le poids *P* en *B* par cette analogie, $B : P :: PC : BC$, ou la force $B = \frac{P.PC}{BC}$, & menons la tangente *FBA*, le mouvement de cette tangente peut repréſenter celui de l'anneau *BH* autour de l'eſſieu. Suppoſons donc que le plan incliné *FBA* ſe meuve autour du point *B*; menons l'horiſontale *AD*, & la verticale *FD*, le poids *P* réuni en *B*, ne s'écartera pas du point *B*, tant que le frottement ſera ſupérieur à la preſſion en *B*, & à la force qui agit ſelon *BA*. Soit le ſinus total $FA = 1$, le ſinus *FD* de l'angle $FAD = s$, $PC = a$, $BC = r$, rayon de l'eſſieu. Prenons la verticale *EB* pour repréſenter le poids *B*, & abbaiſſons *EK* perpendiculaire à *BC*; nous aurons $EB : BK ::$ comme le poids *B* eſt à ſa preſſion, comme *FA*, 1 eſt à *DA*, $\sqrt{1-ss}$. Donc la preſſion en $B = B\sqrt{1-ss}$.

Fig. VI. n° 42.

Soit le rapport de la preſſion au frottement, comme 1 eſt à *f*, qui eſt, ſelon les expériences de M. Amontons, comme 3 eſt à 1. Nous aurons le frottement en $B = fB\sqrt{1-ss}$. L'effort du poids *B*, pour deſcendre le long du plan incliné *FA*, eſt au poids *B* comme *FD*, *s* eſt à *FA*, 1; cet effort eſt donc $= Bs$, ou $= \frac{aPs}{r}$, puiſque *B*

$= \frac{P.PC}{BC}$. Soit A la force qui agit ſelon la direction BA, en vertu de l'accélération acquiſe au point B ; cette force jointe à l'effort $\frac{aPs}{r}$, doit être égale au frottement $fB\sqrt{1-ss}$ dans l'état d'équilibre. Donc $A = fB\sqrt{1-ss} - \frac{aPs}{r} = \frac{aP}{r}\left(f\sqrt{1-ss} - s\right)$. Si l'on fait $s = \frac{f}{\sqrt{1+ff}}$, cette force diſparoît, & le poids B ou $\frac{aP}{r}$ ſe ſoûtient par ſon ſeul frottement.

Si le rapport de la preſſion au frottement étoit conſtant, comme l'a cru M. Amontons, ou comme 3 à 1, f feroit une quantité conſtante $= \frac{1}{3}$, & l'on auroit $s = \frac{1}{\sqrt{10}}$, ce qui ne peut convenir qu'à certains cas, où le poids P eſt fort petit. La quantité f n'eſt donc pas conſtante, & il eſt très-vraiſemblable que le frottement eſt en raiſon compoſée de la preſſion & de la ſurface preſſée, la quantité f renferme donc l'étendue de la ſurface preſſée. Soit x cette ſurface, & $f = nx$; le ſinus de l'angle d'équilibre ſera donc $s = \frac{nx}{\sqrt{1+nnxx}}$; & comme la ſurface B dans le cas préſent, n'eſt preſque qu'un point ou une ligne, en la prenant phyſiquement, il arrivera que le pendule ne fera qu'un angle très-petit avec la verticale dans le cas d'équilibre.

Si l'on veut connoître la force F, capable d'élever le poids B dans la direction BF, on trouvera qu'elle doit ſurmonter l'effort du poids B & ſon frottement. Donc $F = \frac{aP}{r}\left(f\sqrt{1-ss} + s\right)$, lorſqu'elle eſt ſur le point d'enlever le poids B. Le *maximum* de cette quantité donne $s = \frac{1}{\sqrt{1+ff}}$, ou $= \frac{1}{\sqrt{1+nnxx}}$, & $F = \frac{aP}{r}\sqrt{1+nnxx}$.

Lorſque $x = 0$, $s = 1$, & $F : P :: PC : BC$, c'eſt en

effet le cas où la tangente FA eſt verticale, & où il faut un très-grand effort pour ſoûtenir le pendule. Lorſque $s = 0$, la force F pour enlever le poids eſt $\frac{aPf}{r}$ plus petite que dans l'autre cas, f étant une fonction. Elle ſeroit nulle ſi le frottement étoit nul, ou ſi $nx = 0$.

De-là il ſuit que ſi la quantité f ou nx proportionnelle au frottement, étoit fort grande, il faudroit un très-grand effort F pour enlever le poids P, & qu'ainſi on doit augmenter le frottement autant qu'il eſt poſſible, pour empêcher les vibrations de l'Aſtrolabe. Les tours de corde, l'entaille, les pointes dont nous avons parlé, augmentent beaucoup nx.

Il ſemble que ſi $r = 0$, la force F ſeroit infinie ; mais alors on auroit auſſi $f = 0$, & ce cas eſt contraire à la ſuppoſition de la ligne FBA, tangente au cercle BG. Il eſt vrai que plus r eſt petit, plus F ſeroit grand, ſi f étoit conſtant ; mais on doit remarquer que r diminuant, f diminue ; au lieu que f ou nx peut diminuer ſans rien changer à r. Ainſi la difficulté F augmente en raiſon compoſée du poids P, de la longueur PC, & de $nx\sqrt{1-ss}+s$; ou en ſuppoſant $s = 0$, cette difficulté augmente, en raiſon compoſée du poids du levier PC, & du frottement nx.

Enfin, ſi l'on vient à bout de ſuſpendre l'Aſtrolabe, en ſorte qu'il ne puiſſe rouler que très-difficilement autour de l'axe BA, il ne roulera plus qu'autour de FG, par des vibrations qui le feront incliner vers la ligne FK ; & dans ce cas, l'erreur dans l'obſervation de la hauteur des aſtres ſera très-petite. On pourra même l'éviter, en choiſiſſant la plus petite hauteur de toutes celles que l'inſtrument pourra donner dans ſes différentes inclinaiſons, comme je l'ai démontré à la fin de l'article ſecond de la premiere Partie.

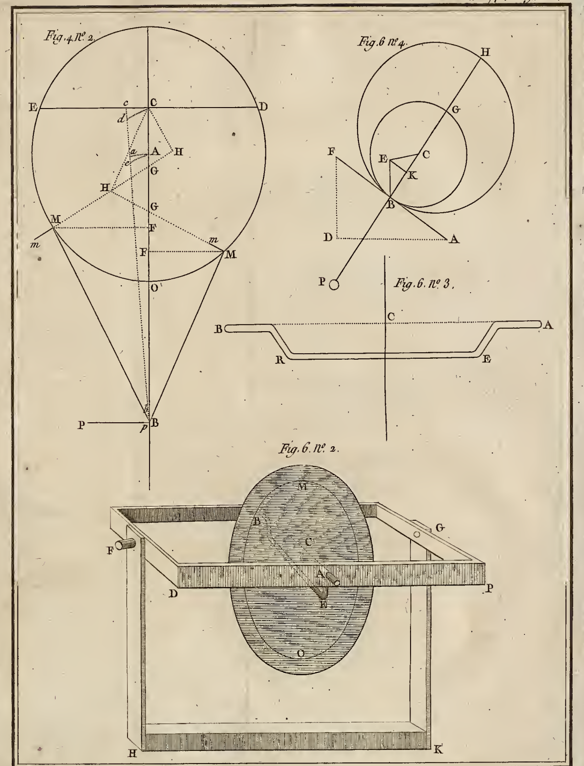
Les mêmes principes appliqués à l'Article III, servent à rectifier le Compas de variation, pour le rendre propre à observer l'azymuth des astres.

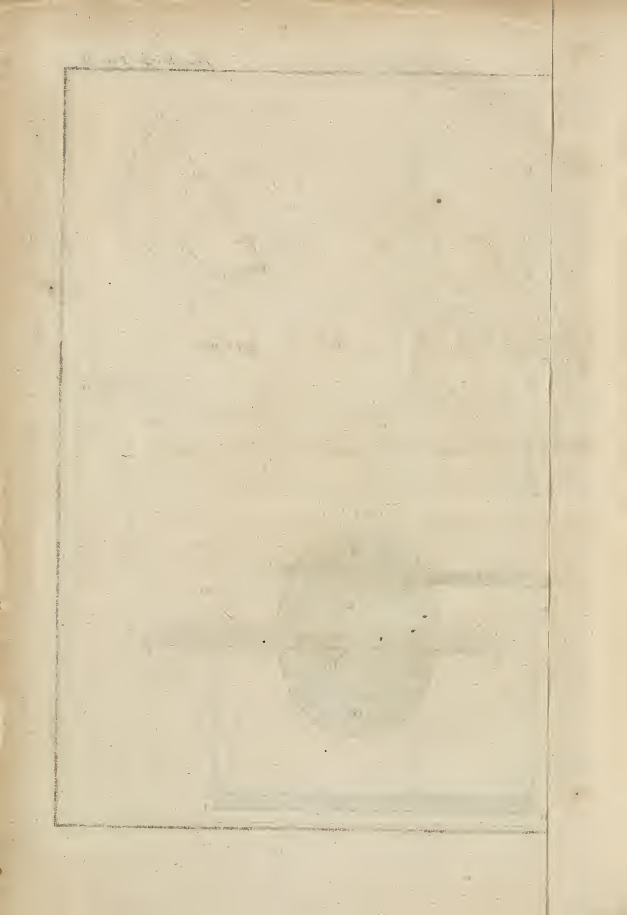
Je ne dois pas oublier une précaution que l'on doit prendre, pour fixer en tout tems les boussoles & autres instrumens à plomb : c'est d'avoir des poids de rechange beaucoup plus grands que les poids ordinaires, pour les accrocher à l'instrument dans un gros tems. Un bon Marin m'a assûré, que par ce moyen, il avoit toûjours fixé la boussole dans les tems les plus orageux, tandis que les autres boussoles du navire étoient dans des agitations continuelles.

Si la direction du sillage est perpendiculaire au plan de l'instrument, elle ne lui donne aucun mouvement autour de l'axe *BA*, mais seulement autour de *FG* ; & ce cas a été prévû ci-devant. Si elle est oblique, on peut la décomposer en deux, l'une parallele, & l'autre perpendiculaire au plan de l'instrument. Ce qui renferme tous les cas.



ESSAI

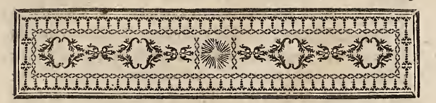

Fig. 4. Nº. 2.
E
c
C
D
d
a
A
H
e
G
H
G
M
F
m
m
F
M
O
P
p
B
Fig. 6 Nº. 4.
H
G
F
E
C
K
B
D
A
P
Fig. 6. Nº. 3.
C
B
A
R
E
Fig. 6. Nº. 2.
M
B
C
G
F
A
D
E
P
O
H
K



ESSAI
D'HOROLEPSE
NAUTIQUE.

Nautam ne pigeat cœli convexa tueri.

Terricola heu prorſus ſum inglorius ; ô ubi pontus
Et naves? O qui molis me in vertice ſiſtat,
Aëriæ cœlique vias & ſidera monſtret.?



ESSAI D'HOROLEPSE NAUTIQUE

Nautam ne pigeat cœli convexa tueri.

Terricola heu prorſus ſum inglorius ; O ubi pontus
E t naves ! O qui molis me in vertice ſiſtat
Aëriæ , cœlique vias & ſidera monſtret !



SI j'oſe eſſayer d'écrire quelques pages ſur le Problème propoſé par l'Académie Royale des Sciences, pour ſujet du Prix de l'année 1745, ce n'eſt pas que je me flate de pouvoir montrer *la meilleure maniere de trouver l'heure en mer par obſervation*, &c. en quoi conſiſte ce Problème, ni même d'être capable d'en approcher aſſez pour mériter quelque diſtinction à cette Piece. C'eſt aux perſonnes verſées dans la Marine & dans l'Aſtronomie, qu'il appartient ſeulement de traiter ce ſujet avec certaine confiance. Pour moi, qui loin d'avoir aucun uſage de

la navigation & des obſervations céleſtes, n'ai jamais vû ni Mer, ni Marins, ni Obſervatoire, ni Inſtrumens, ni Aſtronomes, je ſens parfaitement qu'il ne me convient point de donner des leçons, mais plutôt d'en recevoir ſur un tel ſujet. Auſſi n'a-ce été que par occaſion & pour m'exercer d'après l'ouvrage d'un fameux Maître, que j'ai penſé au Problème dont il s'agit; & je n'y ai penſé que fort tard, en ſorte que je ſuis reſſerré dans un eſpace de tems très-court, pour mettre au net ma tentative. C'eſt une déclaration dont je me crois obligé de prévenir l'Académie, en prenant la liberté de lui préſenter ces feuilles, afin que Meſſieurs les Commiſſaires qui verront celles-ci, puiſſent s'épargner la peine d'aller plus avant, s'ils le jugent à propos. Que s'ils veulent bien ſe la donner (ce qui eſt le principal ſouhait que j'oſe former, & ce que je demande comme une grace), j'eſpere que la déclaration que je viens de faire, pourra engager ces Meſſieurs à voir mon Eſſai avec l'indulgence dont je ſens qu'il a beſoin.

Une autre déclaration que j'ai à faire, c'eſt qu'étant très-peu fourni de livres d'Aſtronomie & d'Hydrographie, j'ignore ſi certaines choſes ont été dites, ou par qui elles l'ont été. Ainſi je pourrai tomber, mais malgré moi, dans le double inconvénient de m'arrêter, ſans citer perſonne, ſur des points qui auront peut-être été expliqués ailleurs, & mieux expliqués qu'ils ne ſeront ici. Si j'y tombe, j'eſpere que cet aveu de mon défaut d'érudition me ſervira d'excuſe. Au reſte, je ne manquerai point de citer dans l'occaſion, les Ouvrages que j'ai entre les mains, & dont j'emprunterai quelque choſe.

Je diviſe cet Eſſai en trois Parties. Dans la premiere, j'expoſerai divers moyens Aſtronomico-Algébriques, de trouver l'heure en prenant ce Problème en général, & abſtraction faite des circonſtances. Dans la deuxieme,

j'indiquerai quelques opérations graphiques ſubſidiaires, à l'uſage des Formules de la premiere Partie, & plus faciles : je marquerai auſſi des moyens de ſimplifier dans certains cas les calculs algébriques, &c. Enfin je me propoſe de parler dans la troiſieme Partie, du choix qu'il eſt à propos de faire entre les diverſes ſortes d'obſervations, & d'en parler tant en général, que relativement aux circonſtances particulieres énoncées dans le Programme de l'Académie. Je tâcherai auſſi de dire quelque choſe ſur les moyens de faire les obſervations requiſes.



PREMIERE PARTIE.

Moyens Aſtronomico-Algébriques de trouver l'heure, ou uſage de l'Algebre pour trouver l'heure, certaines obſervations étant ſuppoſées.

LE mouvement journalier de la terre autour de ſon axe, fait paroître le ciel & tous les aſtres, comme emportés circulairement en ſens contraire, parallelement à l'équateur, autour des points du ciel que l'axe de la terre prolongé rencontre ; & cette rotation de la terre, qui par par ſon uniformité eſt la meſure du tems, fait auſſi que les aſtres changent continuellement, tant d'Azymuth, que d'almicantarath. Or elle les en fait changer différemment, ſelon que l'un des poles eſt plus ou moins élevé ſur l'horiſon du lieu, & ſelon leur diverſe diſtance à ce point. Il y a donc de certaines relations entre l'élevation du pole, le moment d'une obſervation, la déclinaiſon d'un aſtre, ſa hauteur & ſon angle azymuthal. En effet, trois de ces choſes étant données, chacune des deux autres eſt déterminée, & peut être trouvée.

C'eſt à quoi l'on emploie communément la Trigonométrie ſphérique, mais l'algebre peut auſſi y être employé, & avec avantage. M. Bouguer nous a donné un exemple de l'application de cette ſcience générale aux queſtions Aſtronomiques, dans l'excellente Piece qui a remporté le prix de l'Académie de 1731, Piece qui a pour ſujet : *La Méthode d'obſerver en mer la déclinaiſon de la bouſſole* : & les formules de cette Piece ſont très-commodes : mais deſtinées à porter la lumiere ſur certains détails,

elles ne correſpondent pas à toutes les queſtions que j'ai indiquées. M. de Maupertuis s'étant propoſé un objet plus général, les a embraſſées algébriquement toutes ces queſtions, dans le livre élégant qu'il a publié depuis peu, ſous le titre d'Aſtronomie Nautique. Rien ne fait mieux ſentir les relations des cinq choſes dont il s'agit, que les cinq premiers problèmes de ce livre. Je vais les tranſcrire ici à titre de Lemme, en y joignant quelques Scholies, parce que les formules qui en réſultent, ſont le principal fondement de ce que j'ai à dire dans cette Partie. Les expreſſions des divers ſinus, employées par M. de Maupertuis, étant très-bien choiſies, je me fais un devoir de les conſerver. Je m'étendrai un peu plus & dans ce Lemme & dans la ſuite, que n'a fait cet illuſtre Académicien: mais ſi je m'écarte en cela de l'exemple qu'il nous a donné, ce n'eſt pas que je ne ſente combien grand eſt le mérite de la briéveté, & que je ne déſiraſſe de me rendre concis, ſi je le pouvois être ſans inconvénient; mais les circonſtances ne paroiſſent pas me le permettre. Qu'un Sçavant du premier rang ſoit extremement concis, qu'il ſupprime ou omette certains points dans un Ouvrage, il ſçait à quelles perſonnes & à quel uſage il le deſtine réellement; d'ailleurs on ne peut le ſoupçonner de n'avoir pas fait attention à ce qu'il omet, encore moins de l'ignorer; ſon Ouvrage, par de tels retranchemens, ne paroît que plus élégant & plus fort de choſes, que plus agréable par conſéquent à ceux qui ſont capables de l'entendre ſans peine. Mais ſi un foible Ecrivain ne diſoit pas tout ce que ſon ſujet comporte, ſans compter qu'il pourroit paſſer pour dépourvû de la connoiſſance de ce qu'il omettroit, ne s'expoſeroit-il point au danger de négliger imprudemment quelque choſe d'utile & même d'important? C'eſt pour mon propre beſoin que je ſuis entré dans

certains détails, en étudiant mon sujet. Je crois donc pouvoir les insérer ici, d'autant plus que si cet écrit devenoit public, il s'adresseroit à des personnes, qui, jusqu'à présent, n'ont pas été obligées de s'appliquer beaucoup à l'algebre, & qui sont chargées de plusieurs autres occupations pressantes. C'est aux seuls Navigateurs que je dois être censé parler. Peut-on trop faciliter les matieres aux personnes de cet ordre ? Ce sont des pratiques qu'il s'agit de proposer. Peut-on trop s'appliquer à prévenir les méprises qui pourroient s'y glisser ? Enfin, & cette derniere raison est forte, je ne serois presque que Copiste dans cette partie, si je me resserrois autant que l'Auteur original que je vais suivre.

LEMME PREMIER.

Touchant les relations entre la hauteur du Pole, la déclinaison d'un Astre, son Angle horaire, sa hauteur & son Angle azymuthal, ces choses étant prises quatre à quatre.

PREPARATION ET DE'NOMINATION *des principaux élémens de la Sphere.*

SOIENT (*Fig.* 1. 2. 3. & 4.) *Pp* l'axe de la sphere céleste ; *PZAHpzahP* le méridien, & *HMXh* l'horison du lieu ; *AeXa* l'équateur ; *DEd* le cercle que décrit l'astre ; *PEep* le méridien, ou cercle horaire qui passe au point *E*, où l'astre se trouve ; *ZEMz* son azymuth, & *LEl* son almicantarath.

Soit le rayon *CP* nommé *r*.

Le sinus *CB* de la déclinaison de l'astre nommé . . . *x* ; son cosinus *DB*, *y*.

Le sinus *PQ* de la hauteur du pole . . . . *s* ; son cosinus *CQ*, *c*.

Le

Le sinus CG de la hauteur de l'astre . . . . h, son cosinus GE, k.

Le sinus ef de l'angle horaire . . . . t, son cosinus fc, u.

Le sinus MN de l'angle azymuthal . . . . m; son cosinus NC, n.

On aura (à cause de la similitude des triangles PQC & CBO) $CO = \frac{rx}{s}$, & $BO = \frac{cx}{s}$. De plus (à cause des arcs correspondans des cercles DEd & $AeXa$, LEl & $HMXh$), on aura $BF = \frac{yu}{r}$, $GF = \frac{nk}{r}$, & $EF = \frac{yt}{r} = \frac{mk}{r}$, d'où résulte $yt = mk$, cinquieme formule de l'Astron. Nautique, où n'entre point la hauteur du pole.

§. I. *Relation entre la hauteur du Pole, la déclinaison d'un Astre, sa hauteur & son Angle horaire.*

GO (*Fig.* 1.) $= GC - CO = \frac{hs - rx}{s}$; & les triangles semblables PQC & FGO donnant $c : r :: \frac{hs - rx}{s} : OF = \frac{rhs - rrx}{cs}$, on a (à cause de $BO + OF = BF$) $\frac{ccx + rhs - rrx}{cs} = \frac{yu}{r}$, ou (à cause de $cc - rr = - ss$) $rrh - rsx = cyu$; premiere Formule.

SCHOLIE. dans la *Fig.* 2. $GO = CO - GC$, $BF = BO - OF$, & l'on trouve les mêmes signes pour cette formule : mais ils sont différens dans les deux autres cas. Dans celui de la *Fig.* 3. où l'astre est situé au-dessous du cercle de six heures, on a $GO = CO - GC = \frac{rx - hs}{s}$, donc $OF = \frac{rrx - rhs}{cs}$; $BF = OF - BO$, donc $\frac{yu}{r} = \frac{rrx - rhs - ccx}{cs}$, & parce que $rr - cc = ss$, on a enfin $rsx - rrh = cyu$. [C'est le cas indiqué dans la note qui est

au bas de la page 4 de de l'Aſtronomie Nautique.]

Dans le cas de la *Fig.* 4, où l'aſtre eſt ſitué au-deſſous de l'équateur, on a $GO = GC + CO = \frac{hs + rx}{s}$, donc $OF = \frac{rhs + rrx}{cs}$, on a encore $BF = OF - BO$, donc $\frac{yu}{r} = \frac{rhs + rrx - ccx}{cs}$, ou (à cauſe de $rr - cc = ss$) $rrh + rsx = cyu$.

§. II. *Relation entre la hauteur du Pole, la déclinaiſon d'un Aſtre, ſa hauteur & ſon Angle azimuthal.*

Les triangles ſemblables PQC, FGO, donnent $s : c :: \frac{nk}{r}$; $GO = \frac{nck}{rs}$. Donc (à cauſe de $CO + OG = CG$ Fig. 1.) $\frac{rrx + nck}{rs} = h$, ou $rrx + nck = rsh$, deuxieme formule.

SCHOLIE. Les ſignes de cette formule ſont différens dans les cas des trois autres Figures. Dans ceux des *Fig.* 2. & 3. ſçavoir lorſque l'aſtre eſt ſitué de la même part du premier vertical que le pole eſt élevé, ſoit au-deſſus, ſoit au-deſſous du cercle de ſix heures, on a $CO - OG = CG$; donc $rrx - nck = rsh$. [Le ſecond de ces cas eſt le ſeul qui ſoit indiqué dans la note qui vient d'être citée.]

Dans le cas de la *Fig* 4, qui eſt celui où l'aſtre eſt ſitué au-deſſous de l'équateur, on a $OG - CO = CG$; donc $nck - rrx = rsh$.

§. III. *Relation entre la hauteur du Pole, la déclinaiſon d'un Aſtre, ſon Angle horaire, & ſon Angle azimuthal.*

Les triangles ſemblables MNC, EFG, donnent, $m : n :: \frac{yt}{r} : FG = \frac{nyt}{mr}$; les triangles PQC, FGO, don-

nent $s : r :: \frac{nyt}{mr} : FO = \frac{nyt}{ms}$; donc (à cause de $FO + OB = FB$, Fig. 1.) $\frac{nyt + mcx}{ms} = \frac{yu}{r}$, ou $rnyt + rmcx = msyu$; troisieme formule.

SCHOLIE. Les signes de cette formule sont encore différens pour les cas des trois autres Figures. Dans la *Fig.* 2, on a $OB - FO = FB$, donc $rmcx - rnyt = msyu$.

Dans les cas des *Fig.* 3. & 4, sçavoir lorsque l'astre est au-dessous soit du cercle de six heures, soit de l'équateur, on a $FO - OB = FB$, donc $rnyt - rmcx = msyu$.

§. IV. *Relation entre la hauteur du Pole, la hauteur d'un Astre, son Angle horaire, & son Angle azimuthal.*

Les triangles semblables PQC, FGO, donnent $s : r :: \frac{nk}{r} : FO = \frac{nk}{s}$; $s : c :: \frac{nk}{r} : GO = \frac{nkc}{rs}$, & $CO (= CG - OG$ Fig. 1.) $= \frac{rsh - nkc}{rs}$. Les triangles PQC, CBO, donnent $r : c :: \frac{rsh - nkc}{rs} : OB = \frac{rsch - nkcc}{rrs}$; or (à cause des arcs correspondans des cercles DEd, $AIXa$), on a FB ($= FO + OB$, même Fig.); EF ou $\frac{nkrr + rsch - nkcc}{rrs} : \frac{mk}{r} :: u : t$; donc (à cause de $rr - cc = ss$) $rcht + nkst = rmku$; quatrieme formule.

SCHOLIE. Les signes de cette formule sont les mêmes dans le cas de la *Fig.* 4, où l'on a $CO = GO - GC$, & $FB = FO - OB$.

Dans le cas de la *Fig.* 2, on a $CO = CG + GO = \frac{rsh + nkc}{rs}$, & $OB = \frac{rsch + nkcc}{rrs}$; de plus, on a $FB = BO - OF = \frac{-nkrr + rsch + nkcc}{rrs}$; donc $-nkst + rcht = rmku$.

Enfin dans le cas de la *Fig.* 3, on a pareillement

$CO = CG + GO$, & $OB = \frac{rsch + nkcc}{rrs}$; mais on a d'ailleurs $FB = FO - OB = \frac{nkrr - rsch - nkcc}{rrs}$; donc $nkst - rcht = rmku$.

REMARQUE. On peut aiſément reconnoître que tous les cas les moins ſimples de la ſituation d'un aſtre, ſont exprimés dans les quatre Figures mentionnées ci-deſſus, [dont la premiere eſt la ſeule qu'on voie dans l'Aſtronomie Nautique.] Car où l'aſtre eſt du côté du premier vertical, oppoſé à celui où eſt le pole élevé, & alors ou il eſt au-deſſus de l'équateur *Fig* 1. ou au-deſſous *Fig*. 4. Et s'il eſt du côté du premier vertical, où eſt le pole élevé, il eſt ou au-deſſus du cercle de ſix heures, *Fig* 2, ou au-deſſous, *Fig*. 3. On peut encore reconnoître cela autrement, & remarquer en même tems quelques différences des quatre Figures; car les triangles ſemblables *BOC*, *FOG*, ſont ou oppoſés par la pointe, & c'eſt le cas de la *Fig*. 1, ou couchés l'un ſur l'autre; & alors ou bien le côté *BO* du premier eſt plus grand que l'hypothenuſe *FO* du ſecond (& à plus forte raiſon *CO*, hypoth. du premier, eſt plus grande auſſi que le côté *GO* du ſecond), c'eſt le cas de la *Fig*. 2; ou bien au contraire, l'hypoth. *CO* du premier eſt plus petite que le côté *GO* du ſecond (& à plus forte raiſon le côté *BO* du premier eſt auſſi plus petit que l'hypothenuſe du ſecond), & c'eſt le cas de la *Fig*. 4, ou enfin chacune des hypothenuſes ſurpaſſe le côté de l'autre triangle couché ſur elle, & c'eſt le cas de la *Fig*. 3.

On peut auſſi obſerver que chacune des quatre formules reçoit ſeulement trois combinaiſons de ſignes, & que dans un de ſes états, elle répond à deux Figures: & il eſt aiſé de voir, ſurtout à l'égard de trois formules, que cela doit être ainſi. Car dans la premiere, où on laiſſe à part

l'angle azymuthal, il eſt indifférent que le coſinus de cet angle puiſſe être pris poſitivement ou négativement. Cette formule doit avoir les mêmes ſignes, ſi les autres ſinus ou coſinus qui y entrent ſont placés du même côté; c'eſt-à-dire, qu'il n'importe que l'aſtre ſoit de part ou d'autre du premier vertical, lorſqu'il eſt entre l'équateur & le cercle de ſix heures, *Fig* 1. & 2; parce que dans l'une & l'autre Figure, le coſinus de l'angle horaire eſt de même part du cercle de ſix heures; & le ſinus de la déclinaiſon auſſi de même part de l'équateur. Dans la deuxieme formule, où on laiſſe à part l'angle horaire, il eſt indifférent quelle poſition ait le coſinus de cet angle; la même combinaiſon des ſignes doit ſe trouver dans cette formule, ſi les ſinus ou coſinus qu'elle renferme ont les mêmes poſitions. Ainſi il n'importe que l'aſtre ſoit de part ou d'autre du cercle de ſix heures, lorſqu'il eſt du côté du premier vertical où ſe trouve le pole élevé, *Fig*. 2. & 3, parce que dans l'une & l'autre ſituation de l'aſtre, le coſinus de l'angle azymuthal eſt placé du même côté du premier vertical, & le ſinus de la déclinaiſon, auſſi du même côté de l'équateur. Dans la quatrieme formule, où on laiſſe à part la déclinaiſon de l'aſtre, il n'importe qu'elle ſoit Septentrionale ou auſtrale; les termes de cette formule doivent être affectés des mêmes ſignes, lorſque l'aſtre eſt au-deſſus ou au-deſſous de l'équateur, *Fig* 1. & 4, parce que le coſinus de l'angle horaire tombe du même côté du cercle de ſix heures, & le coſinus de l'angle azymuthal du même côté du premier vertical, dans l'un & l'autre cas. Enfin dans la troiſieme formule (où on laiſſe à part la hauteur de l'aſtre), il eſt indifférent que l'aſtre ſoit au-deſſous du cercle de ſix heures, *Fig* 3, ou au-deſſous de l'équateur, *Fig*. 4 : il ſe fait pour ces cas une compenſation, parce que les trois ſinus

x, u, n, qui entrent dans la formule, ont dans l'un de ces cas une poſition toute contraire à celle qu'ils ont dans l'autre cas.

LEMME SECOND,

Touchant la relation du ſinus de la ſomme, ou de la différence de deux Angles ou de deux Arcs aux ſinus & coſinus de ces Angles ou Arcs.

1°. Le produit du ſinus de la différence de deux angles aigus par le rayon, eſt égal à la différence du produit du ſinus du plus grand de ces angles, par le coſinus du moindre, & du produit du ſinus de celui-ci, par le coſinus de celui-là. 2°. Le produit du ſinus de la ſomme de deux angles aigus par le rayon, eſt égal à la ſomme des produits du ſinus de chacuns d'eux, par le coſinus de l'autre.

Soient, par exemple, eCX, εCe, deux angles aigus, dont εCX ſoit ou la différence, *Fig.* 5. & 6, ou la ſomme, *Fig.* 7. & 8. * Du point C, pris pour centre, ſoit décrit le cercle quelconque $Ae\varepsilon Xa$, ou $A\varepsilon eXa$, &c. Des points e, ε, ſoient menées ſur XC, prolongée s'il le faut, les perpendiculaires eg, $\varepsilon\gamma$, & encore du point ε, εK, perpendiculaire ſur Ce; on aura eg, Cg pour ſinus & coſinus de l'angle eCX; εK, cK pour ſinus & coſinus de l'angle εCe, & $\varepsilon\gamma$ pour ſinus de l'angle εCX. Je dis donc que $\varepsilon\gamma \times Ce = \pm eg \times CK \mp \varepsilon K \times Cg$, *Fig.* 5. & 6, ou $+ eg \times CK + \varepsilon K \times Cg$, *Fig.* 7. & 8.

DÉMONSTRATION. Soit prolongée εK juſqu'à la

* Dans le cas de cette *Fig.* 8, où la ſomme εCX des angles eCX, εCe eſt un angle obtus, on peut conſidérer au lieu de cet angle, εCx qui en eſt le ſupplément à deux droits.

rencontre de CX en I, ce qui donne $\varepsilon I = \pm IK \mp \varepsilon K$, *Figures* 5 & 6, ou $+ IK + \varepsilon K$, *Figures* 7 & 8, on aura de plus, trois triangles rectangles semblables, $\varepsilon\gamma I$, CKI, Cge, puisque le premier a un angle aigu commun avec le second en I, & que le second a son autre angle aigu en C, commun avec le troisieme. On a donc (en comparant ceux-ci) $Cg : eg :: CK : IK = \frac{eg \times CK}{Cg}$; & (en comparant le premier triangle avec le troisieme).... $Cg : Ce :: \varepsilon\gamma : \varepsilon I = \frac{\varepsilon\gamma \times Ce}{Cg}$. Donc $\frac{\varepsilon\gamma \times Ce}{Cg} = \frac{\pm eg \times CK}{Cg}$ $\mp \varepsilon K$ ou bien enfin $\varepsilon\gamma \times Ce = \pm eg \times CK \mp \varepsilon K \times Cg$. Ce qu'il falloit démontrer.

3°. & 4°. Soient eCX, εCe, deux angles obtus, dont εCx soit ou la différence, *Fig.* 9 & 10, ou la somme ; ou, si l'on veut, le supplément à quatre droits, *Fig.* 11 & 12. La formule des cas précédens a encore lieu, parce que les angles obtus ont les mêmes sinus que les angles aigus, dont ils sont les supplémens à deux droits. Les termes de la formule sont affectés des mêmes signes, *Fig.* 9 & 10, que *Fig.* 5 & 6, & *Fig.* 11 & 12 que *Fig.* 7 & 8; il est visible en effet, à l'inspection des *Fig.* 9 & 10, qu'on y a $\varepsilon I = \pm IK \mp \varepsilon K$, &c. Ces derniers cas pourroient être exprimés autrement, en considérant l'angle εCX, qui est ou la somme, *Fig.* 9 & 10, ou la différence, *Fig.* 11 & 12 de deux angles eCX, εCe, l'un aigu & l'autre obtus.

COROLLAIRE, ou autre exemple. Soit ACa (mêmes Figures) perpendiculaire au diametre XCx ; Cg fera le sinus de l'angle eCA, ou eCa ; eg en sera le cosinus, & $C\gamma$ sera le sinus de l'angle εCA ou εCa, qui est la somme ou la différence de ce premier angle & de εCe. Pour abréger, soit le rayon Ce nommé r, comme ci-devant ; Cg ou bien ef, nommé pareillement t, & eg ou Cf, u. Soit

aussi $C\gamma$ nommé t'; $\varepsilon\gamma$, u'; $\varepsilon K, p$; CK, q; (d'où résulte $ru' = \pm qu \mp pt$, pour expression de l'exemple précédent) on aura $rt' = + qt + pu$, *Fig.* 5, 6, 9 & 10, parce que dans les deux premieres εCA est la somme de deux angles aigus eCA, εCe; & dans les deux autres εCa est la somme ou le supplément à quatre droits de deux angles obtus eCa, εCe. On aura encore $rt' = - qt + pu$, *Fig.* 7 & 11, ou $= + qt - pu$, *Fig.* 8 & 12, parce que εCA, *Fig.* 7 & 8, est la différence de deux angles aigus, & dans les deux autres, εCa est la différence de deux angles obtus, eCa, εCe.

Par les mêmes raisons on aura :

$$rp = \left\{\begin{matrix} + \\ + \\ - \end{matrix}\right\} \begin{matrix} t'u \\ \ldots \\ \ldots \end{matrix} \left\{\begin{matrix} - \\ + \\ + \end{matrix}\right\} \begin{matrix} tu' \\ \ldots \\ \ldots \end{matrix} \left\{\begin{matrix} \textit{Fig. } 5 \ \& \ 9. \\ \textit{Fig. } 6,\ 7,\ 10 \ \& \ 11. \\ \textit{Fig. } 8 \ \& \ 12, \ \&c. \end{matrix}\right.$$

[L'Auteur de l'Astronomie Nautique fait un grand usage de divers cas de ce Lemme, mais sans l'avoir énoncé, & sans avertir de l'espece du cas dont il se sert. Je me souviens d'avoir vû le même Lemme employé dans le Traité de la Manœuvre des Vaisseaux de M. Bernoulli.]

SCHOLIE. Il suffiroit de donner aux termes de chacune des formules précédentes une des trois combinaisons de signes que l'on vient de voir qu'elles peuvent recevoir, si on l'entendoit bien dans cet état, & que l'on eût attention à l'appliquer à propos. Soit proposée la formule du premier exemple ci-dessus, dans l'état $+ \varepsilon\gamma \times Ce = + eg \times CK - \varepsilon K \times Cg$, ou bien $+ ru' = + qu - pt$, qui est l'expression simple & naturelle du cas de la *Fig.* 5. Si l'on passe au cas des *Fig* 7 & 8, où le sinus EK (p) est situé relativement à Ce, dans un sens contraire de ce qu'il est *Fig.* 5, & où par conséquent ce sinus est négatif; si on

la

le regarde comme positif dans la *Fig.* 5, le signe — dont le terme pt du second membre de la formule proposée est affecté, se réduit à marquer l'addition de ce terme, parce que le retranchement d'un produit négatif équivaut à l'addition de ce même produit, pris positivement. Si l'on se trouve dans le cas de la *Fig.* 6, où le sinus εK est situé de la même part de Ce que dans la *Fig.* 5, mais où le sinus $\varepsilon \gamma$ (u') est situé d'autre part de CX que dans cette Figure, & où ce sinus est négatif; par conséquent, s'il est supposé positif, dans la *Fig.* 5, les signes du second membre de la formule conservent leur signification simple; mais le signe + dont est affecté le premier membre ru' de cette formule, indique réellement la négation de ce membre, parce que la position d'une quantité négative est la même chose que la négation de cette quantité, prise positivement; on a donc effectivement & simplement, *Fig.* 6, $-ru' = qu - pt$, expression qui équivaut à celle ($ru' = -qu + pt$) qui a été employée ci-dessus pour le cas de cette *Fig.* 6.

Quant aux cas des *Fig.* 9, 10, 11 & 12, il faut remarquer en général que le cosinus CK (q) de l'angle εCe y est situé en sens contraire de ce qu'il est dans les quatre Figures précédentes; différence de situation, qui provient, comme il est visible, de ce que l'angle εCe est aigu dans les cas de ces Figures-ci, & obtus dans les autres. Par conséquent le cosinus q est négatif dans les cas des *Fig.* 9, 10, 11 & 12, si on le suppose positif dans les cas précédens, & il rend négatif le produit où il entre en degré impair. * Or, la position d'une quantité négative équivaut à la négation de cette même quantité entendue positivement: donc le signe + qui affecte le terme qu du

* Cette remarque aura encore quelque usage dans la suite.

fecond membre de la formule, fe réduit à marquer le retranchement de ce terme.

Si donc on fe trouve dans le cas des *Fig.* 11 & 12; où le finus $_\varepsilon K\,(p)$ eft fitué du même côté de Ce que dans la *Fig.* 5; mais où le finus $_{\varepsilon\gamma}\,(u')$ eft d'autre part de CX que dans cette *Fig.* 5, & négatif par conféquent, le figne (—) du terme pt du fecond membre de la formule conferve fa fignification fimple, mais le figne du premier membre marque en effet une négation, de même que celui du terme qu du fecond membre. Ainfi on a effectivement & fimplement pour ce cas, $-ru' = -qu - pt$, expreffion qui équivaut à celle ($ru' = qu + pt$) qui a été employée ci-deffus pour ce cas. Dans le cas de la *Fig.* 10; où au contraire c'eft le finus $_\varepsilon K\,(p)$ qui eft autrement fitué que dans la *Fig.* 5 à l'égard de Ce, & où $_{\varepsilon\gamma}$ eft fitué de même part de CX que dans cette Figure. C'eft le figne du premier membre de la formule, qui retient fa fignification naturelle, & le figne (—) du terme pt du fecond membre de cette formule, étant expofé à un produit négatif, indique réellement l'addition de ce produit pris pofitivement. Donc en un mot, chaque figne du fecond membre de la formule propofée, marque le contraire de fa fignification naturelle. Enfin dans le cas de la *Fig.* 9, chacun des finus u' & p étant fitué en fens contraire de ce qu'il eft *Fig.* 5, les fignes des termes ru' & pt de la formule doivent être changés en leurs contraires; auffi-bien que celui du terme qu, ce qui donne $-ru' = -qu + pt$, ou bien aucun des trois fignes ne doit être changé; car l'une de ces manieres eft équivalente à l'autre.

J'expliquerai plus bas, ce que j'entens par l'application *jufte* d'une formule.

AVERTISSEMENT.

QUELQUES-UNES des Formules du premier Lemme, donnent le moyen de découvrir, non-seulement l'heure par l'observation d'une étoile, mais aussi la déclinaison de cette étoile avec la hauteur du pole. Cependant comme il ne s'agit ici que des besoins nautiques, je supposerai dans cette Partie, que la déclinaison des étoiles est connue, & que celle des planetes, quoique variable, l'est aussi. Car *on a par les catalogues d'étoiles, leur déclinaison avec plus de précision qu'il n'est nécessaire pour* les besoins du Navigateur; ainsi *dès qu'on connoît sur mer l'étoile qu'on observe*, il est inutile de chercher sa déclinaison; *& si l'on vouloit se servir d'une étoile qu'on ne connût pas, on seroit exposé à des méprises bien dangereuses*, suivant la remarque de M. de Maupertuis. D'ailleurs les méthodes de trouver l'heure concurremment avec la déclinaison d'une étoile, & la hauteur du pole, sont en petit nombre, compliquées, & supposent que l'Observateur est dans un lieu fixe, ou demandent que l'on fasse certaines corrections aux observations. A l'égard de la déclinaison des planetes, je crois qu'on peut l'avoir, ainsi que leur ascension droite, avec une précision suffisante, par les Ephémérides ou les Tables, & il faut bien sur mer se contenter de les connoître par cette voie.

Quant aux moyens de connoître l'heure, en supposant connue la déclinaison de l'astre ou des astres observés, ils sont en grand nombre, & on peut bien l'appercevoir par la relation qui se trouve entre la hauteur du pole & l'angle horaire d'un astre. Il y a en effet autant de moyens géométriquement bons de trouver l'heure, que de trouver la hauteur du pole. Car 1°. il y en a pour trouver ces deux choses conjointement, ou pour trouver celle qu'on

veut des deux ſans avoir l'autre ; & 2°. s'il y a des moyens ſpéciaux pour trouver la hauteur du pole, il y en a autant de même qualité pour découvrir l'heure. Ces moyens particuliers de trouver la latitude, ſont ceux où l'on ſuppoſe que l'heure eſt connue. En renverſant donc les ſuppoſitions & l'opération, c'eſt-à-dire, en ſuppoſant la latitude connue, on doit avoir des moyens particuliers de connoître l'heure. Mon deſſein eſt d'expoſer ces moyens divers ; il y en a de l'une & de l'autre eſpece, qui peuvent avoir leur utilité ſur mer, ſuivant les rencontres, ainſi que je l'expliquerai dans la ſuite. On voit par-là, que je ſerai obligé de parler de la recherche de la hauteur du pole, quoique ce ne ſoit pas mon objet direct : j'en parlerai même aſſez amplement, cet objet étant ſi fort lié avec celui que je dois avoir, qu'on ne peut éviter de les joindre juſqu'à un certain point, ſans préjudicier au ſujet dont il s'agit. Auſſi M. de Maupertuis, dont le principal but a été d'enſeigner à trouver la latitude, a beaucoup parlé incidemment de l'invention de l'heure, & je ne peux que le ſuivre, & tâcher de glaner derriere lui.

Pour obſerver quelque ordre, je partage cette Partie en trois Chapitres. Dans le premier, je rapporterai les moyens de trouver l'heure ſans avoir la hauteur du pole, ou conjointement avec cette hauteur, leſquels ſont fondés ſur les plus ſimples combinaiſons d'obſervations. (J'entens par ces plus ſimples combinaiſons, celles où il n'entre que deux élémens, outre la déclinaiſon de l'aſtre ou des deux aſtres obſervés, & non celles qui peuvent conduire aux calculs les plus ſimples.) Dans le ſecond Chapitre, j'indiquerai tous les moyens (que je ſçai) de trouver l'heure, la hauteur du pole étant ſuppoſée connue. Enfin dans le troiſieme, j'expoſerai le reſte des moyens de trouver l'heure concurremment avec la hauteur du pole.

PREMIERE PARTIE.

CHAPITRE PREMIER.

Des moyens de trouver l'heure sans avoir la hauteur du pole, ou avec cette hauteur.

PROBLEME PREMIER.

LA hauteur & l'Angle azimuthal d'un Astre étant donné, trouver l'heure.

La cinquieme Formule de l'Astronomie Nautique, rapportée au commencement du premier Lemme, donne $t = \frac{mk}{y}$, & la différence de l'ascension droite de cet astre & du Soleil, donne l'heure. L'opération que l'algébre vient de fournir, est la même que prescrit la Trigonométrie Sphérique.

SCHOLIE. A ce Probleme répond celui de trouver la hauteur du pole, les mêmes élémens étant donnés ; & la deuxieme formule du premier Lemme, fournit pour cela une équation du second degré.

REMARQUE. Telles sont les relations entre la hauteur du pole, la déclinaison d'un astre, sa hauteur, son angle azymuthal & son angle horaire, comme je l'ai déja observé ; que trois de ces élémens divers étant donnés, on peut trouver les deux autres, & on vient d'en donner un exemple. Mais l'on n'iroit pas loin si on n'avoit que cela. Telles sont les relations entre les élémens dont il

s'agit, & telle eſt l'utilité du ſecond Lemme, qu'une eſpece de ces élémens étant donnée double avec une autre d'entre eux, on peut trouver les trois reſtans. Il y a plus ; la ſituation reſpective des aſtres étant connue, il n'eſt pas néceſſaire que les élémens donnés outre la déclinaiſon, appartiennent au même aſtre, pour trouver ce qu'on demande : on y parvient en chaſſant de quelques-unes des formules du premier Lemme, où il entre deux élémens inconnus, un de ces deux élémens. Quant aux obſervations ſur leſquelles on ſe fonde, ou elles ſont faites en même moment, ou en des tems différens. Dans ce dernier cas, il faut connoître l'eſpace de tems écoulé entre les deux obſervations; mais cela ne rend pas le calcul plus difficile que quand les obſervations ſont contemporaines, & n'y apporte même aucun changement ; car il faut alors concevoir un aſtre idéal, qui ait la même déclinaiſon que l'aſtre réel obſervé dans un des momens, mais qui ſoit éloigné de lui en aſcenſion droite ſur la ſphere céleſte, de la quantité de degrés que vaut le tems écoulé entre les obſervations, & raiſonner comme ſi on eût obſervé cet aſtre idéal, & qu'on l'eût obſervé dans le moment de l'autre obſervation réelle.

Nous avons trois combinaiſons générales d'obſervations à employer, car l'on a ou deux hauteurs, ou deux angles azymuthaux, ou une hauteur, & un angle azymuthal.

PROBLEME II.

Les hauteurs de deux aſtres E, E' étant données, avec leur déclinaiſon & le tems écoulé entre les obſervations, trouver l'heure de l'une & de l'autre.

REMARQUE. Il eſt préalable pour la ſolution de ce probleme de trouver la hauteur du pole, parce qu'il eſt

beaucoup plus facile de chaſſer u que s de la formule dont on a beſoin.

Soient les ſinus de la déclinaiſon des deux aſtres, x, x', leurs coſinus, y, y', les ſinus des deux hauteurs, h, h', les coſinus des angles horaires qui leur répondent, u, u'. Soient nommés p & q le ſinus & le coſinus de la différence, ou de la ſomme de l'angle du tems écoulé entre les obſervations, & de celui qui eſt la différence des deux aſtres en aſcenſion droite. C'eſt la différence de ces angles qu'il faut prendre, ſi c'eſt le précédent des deux aſtres qui a été obſervé en premier lieu; c'eſt la ſomme de ces deux angles qu'il faut prendre, ſi c'eſt au contraire le ſuivant des deux aſtres qui a été obſervé en premier lieu. (Cette ſignification des lettres p, q, ſubſiſtera dans la ſuite.)

On a (par la remarque qui précéde ce probleme, & par le ſecond Lemme) $ru' = qu - pt$, ou $ru' - qu = -p\sqrt{(rr - uu)}$, en ſuppoſant que les deux points de l'équateur, auxquels répondent l'aſtre réel & l'aſtre idéal au moment de l'une des obſervations, ſont dans le cas de la *Fig.* 5, où ces points ſont déſignés par les lettres $e\ \epsilon$. Mettant dans la formule $ru' - qu = -p\sqrt{(rr - uu)}$ les valeurs de u & de u', priſes dans la premiere formule du premier Lemme, pour le cas où l'aſtre eſt obſervé tant au-deſſus de l'équateur, que du cercle de ſix heures, $u' = \frac{rrh' - rsx'}{cy'}$, & $u = \frac{rrh - rsx}{cy}$, quarrant chaque membre, afin de chaſſer l'incommenſurable, mettant pour cc, ſa valeur $rr - ss$, & ſubſtituant, pour abréger, rr au lieu de $xx + yy$, dans un des termes du coëfficient de ss, & rr au lieu de $pp + qq$, dans un des termes tous connus; il vient l'équation du ſecond degré,

$$\left.\begin{array}{l}(rx'y - qxy')^2 \\ + rrppy'y'\end{array}\right\} ss \left\{\begin{array}{l} -2r^3h'x'yy \\ +2r^2qh'xyy' \\ -2r^3hxy'y' \\ +2r^2qhx'yy'\end{array}\right\} s = \left\{\begin{array}{l} + rrppyyy'y' \\ +2r^3qhh'yy' \\ - r^4h'h'yy \\ - r^4hhy'y'.\end{array}\right.$$

Et prenant $A = (rx'y - qxy')^2 + rrppy'y'$, $B = r^2h'x'yy - rqh'xyy' + r^2hxy'y' - rqhx'yy'$, & $C = ppyyy'y' + 2rqhh'yy' - r^2h'h'yy - r^2hhy'y'$, on a pour le ſinus de la hauteur du pole,

$$s = \frac{rB}{A} \pm \frac{r}{A}\sqrt{(BB + AC.)}$$

Ayant la hauteur du pole, il eſt évident qu'on aura les angles horaires par les équations $u = \frac{rrh - rsx}{cy}$, ou $u' = \frac{rrh' - rsx'}{cy'}$, & l'heure des obſervations, par l'aſcenſion droite des aſtres.

SCHOLIES.

I. Le calcul précédent n'a été fait que ſur l'hypotheſe d'une certaine ſituation reſpective des deux aſtres, & il en eſt bien d'autres poſſibles; car non-ſeulement les deux aſtres peuvent encore être ſuppoſés tous deux au-deſſous de l'équateur, ou au-deſſous du cercle de ſix heures, mais encore l'un peut être au-deſſus de ces deux cercles, le ſecond étant au-deſſous de l'un des deux; un des aſtres peut être deſſous l'équateur, & l'autre deſſous le cercle de ſix heures; l'un peut être d'une part, & le ſecond d'autre part du Méridien: enfin l'angle $\cdot Ce$, dont p eſt le ſinus, peut être obtus auſſi-bien qu'aigu. Or il ſeroit long de calculer le probleme pour toutes les combinaiſons poſſibles d'hypotheſes, l'une après l'autre, mais on peut

peut éviter ce travail, pourvû que l'on entende bien la formule qui vient d'être trouvée, & qu'on y change, quand il s'agira de la mettre en pratique, les ſignes qui n'auront pas leur ſignification ſimple, en leurs contraires. Pour ne rien laiſſer au haſard, j'ai calculé le Probleme relativement à diverſes hypotheſes, d'entre celles que je viens d'indiquer, en obſervant de bien marier le ſecond Lemme avec le premier, & je ſuis toûjours parvenu à une formule compoſée des mêmes termes, & affectée dans quelques cas des mêmes ſignes, & qui en d'autres cas différoit ſeulement par quelques ſignes, de celle que je viens de donner. J'ai trouvé de plus, que la mutation des ſignes étoit réglée par des loix que je vais marquer; c'eſt pourquoi je me ſuis diſpenſé de continuer le calcul du probleme, pour le reſte des hypotheſes poſſibles.

Ce que j'appelle bien marier (pour le dire en paſſant) les formules des deux Lemmes, c'eſt les prendre dans leurs états correſpondans, ainſi que j'ai fait ci-deſſus, & que je vais le montrer plus en détail par un autre exemple.

Suppoſons que l'un des aſtres E, ait été obſervé au-deſſus tant de l'équateur, que du cercle de ſix heures, & que l'autre E', l'ait été au-deſſous de ce deuxieme cercle, il faut faire $u = \frac{rrh - rsx}{cy}$, & $u' = \frac{-rrh' + rsx'}{cy'}$: ſi de plus, les deux aſtres ont été obſervés du même côté du méridien, & que l'angle ϵCe, dont p eſt le ſinus, ſoit aigu, ce qui eſt le cas de la *Fig. 6*, (où A repréſente le point de l'équateur, que rencontre la portion ſupérieure du méridien, & a le point oppoſé). Il faut faire $ru' = -qu + pt$, ou $ru' + qu = pt$: mais ſi l'angle ϵCe eſt obtus, ce qui eſt le cas de la *Fig. 11*, il faut prendre $ru' = qu + pt$. Ainſi, appliquer à propos la formule du ſecond Lemme, priſe dans un état quelconque, entre les trois

dont elle est susceptible, c'est l'appliquer à quelqu'un des cas de la situation respective de deux ou plusieurs points du ciel auxquels elle peut convenir ; car on fera, par ce moyen, un bon calcul, & dont le résultat bien entendu, ne se bornera pas à la seule hypothese sur laquelle on aura travaillé ; au lieu que si on marioit au hasard la formule du second Lemme, avec une de celles du premier, prise dans un état quelconque, on s'exposeroit peut-être à faire un calcul vicieux, ou du moins on en feroit un qui seroit inutile, faute de pouvoir discerner ce à quoi il conviendroit.

Voici les loix des signes de notre Formule. Elle convient naturellement dans l'état où elle est, à tous les cas où les deux astres déclinent du côté du pole élevé, & où l'angle *Ce* est aigu : que si cet angle est obtus, il faut prendre négativement son cosinus q ; & si l'un des astres observés, ou tous les deux, déclinent du côté du pole abbaissé, il faut prendre négativement le sinus x ou x' de cette déclinaison. Cela posé, s'il n'y a dans un terme de la formule qu'une quantité qui doive être prise négativement, & qui soit linéaire, il faut changer le signe de ce terme en son contraire ; il en est de même s'il se trouvoit trois quantités négatives dans le même terme, ou si le quarré d'une quantité négative y étoit multiplié par une autre quantité négative linéaire : mais si deux quantités négatives sont multipliées l'une par l'autre dans un terme, ou si une quantité négative y est au second degré, il faut laisser le signe de ce terme.

On comprend apparemment assez sans que j'en avertisse, qu'après avoir mis la formule précédente de la hauteur du pole dans l'état convenable, & après s'en être servi pour trouver cette hauteur, il faut encore avoir soin, en revenant à la premiere formule du premier Lemme,

pour trouver l'un ou l'autre des angles horaires, de choisir l'état de cette formule qui convient à l'observation de l'astre dont on veut avoir l'angle horaire; il faut, dis-je, avoir le soin au moins de discerner le cas où cyu est égal à la somme des termes rrh & rsx (c'est celui où l'astre est sous l'équateur), d'avec ceux où cyu est égal à la différence de ces termes.

II. Nous avons une équation du second degré, pour trouver la hauteur du pole, & deux racines par conséquent, qui sont la valeur vraie ou apparente du sinus de cette hauteur. Il est donc à propos de voir ce que sont en effet ces racines; & cela convient d'autant plus, que l'Auteur de l'Astronomie Nautique, qui a donné un Probleme subordonné à celui-ci, s'est abstenu d'entrer dans aucune discussion sur ce point, qui est peut-être capable d'*embarrasser*, je ne dis pas un Astronome de profession, mais quelqu'un de l'ordre des Navigateurs. [C'est apparemment pour laisser une matiere d'exercice, que M. de Maupertuis a glissé sur le point dont il s'agit, car il a bien voulu s'arrêter d'ailleurs (Scholie du Probl. XV.) à rechercher la nature des deux racines de l'équation, que l'on a pour trouver le jour du plus court crépuscule, afin de prévenir le *qui pro quo* auquel on étoit exposé en certain cas, & il a même traité cette affaire d'*importante*.] Nous avons deux racines; mais pourquoi (peut-on demander d'abord) en avons-nous deux? Le voici. C'est qu'il y a un point du ciel autre que le pole, qui a même relation que le pole aux deux points donnés du ciel, qui sont à certaines distances de l'horison; il ne s'agit que de sçavoir laquelle des deux racines de notre équation est la vraie valeur de s.

J'observe par préalable, que si les deux astres observés déclinent du côté du pole abbaissé, la somme B est néces-

sairement négative : il y a donc une racine de l'équation qui est visiblement négative, mais l'autre racine doit être de la qualité contraire. Si les deux astres déclinent de différens côtés, il doit y avoir aussi une racine négative, & une racine positive : si enfin les deux astres déclinent du côté du pole élevé, une des racines peut encore être négative, & l'autre positive; mais il se peut aussi que les deux racines soient positives, & c'est ce qui arrive lorsque $B > \surd(BB+AC)$, c'est-à-dire, lorsque la somme C est négative. (Si C est zéro, une des racines est aussi zéro, & il faut joindre ce cas à celui où les deux racines sont positives).

Dans les cas où les deux racines sont de qualités contraires, on peut présumer que c'est la racine positive qui est la vraie valeur du sinus de la hauteur du pole, & cela est en effet. Aussi est-il constant, que lorsqu'on cherche une chose *directement* par l'algebre, ce n'est aucune des racines négatives qui peuvent être mêlées dans la solution, qui est la vraie valeur de ce qu'on cherche, c'est autre chose que donnent ces racines (& si l'on a la curiosité de faire une nouvelle opération, pour chercher *directement* la chose qu'a donnée une des racines négatives, provenues de la premiere opération, on ne manquera pas de retrouver la valeur de cette chose, affectée du signe positif.) Mais dans le cas où les deux racines sont positives, laquelle des deux est la valeur du sinus cherché? C'est ce cas qui peut *embarrasser*.

Pour lever la difficulté, je dis qu'il faut revenir sur les observations qui ont été faites, ou bien les deux astres ont été observés de différens côtés du méridien, ou du même côté. Dans le premier de ces cas subalternes, il faut remarquer le vertical où étoit un des astres, lorsqu'on a observé sa hauteur, & voir de quel côté de ce vertical a été observé l'autre astre. Si ç'a été du côté de ce vertical où

eſt le pole élevé, c'eſt la moindre des deux racines poſitives qui eſt le ſinus de la hauteur du pole ; ſi c'eſt du côté de ce vertical où n'eſt pas le pole élevé qu'ait été obſervé le ſecond aſtre, c'eſt la plus grande des deux racines qui donne la hauteur du pole. Que ſi les deux aſtres ont été obſervés de même part du méridien, il faut remarquer le vertical où étoit l'aſtre obſervé à la moindre hauteur, & voir pareillement de quel côté de ce vertical a été obſervé l'autre aſtre : ſi c'eſt du côté où ſe trouve le pole élevé, c'eſt encore la moindre des deux racines poſitives qui donne la hauteur du pole ; & c'eſt la plus grande de ces deux racines qui donne cette hauteur, ſi l'aſtre obſervé à la plus grande hauteur, l'a été du côté du vertical ſuſdit, où n'eſt pas le pole élevé. Ainſi l'une ou l'autre des racines poſitives de notre formule, peut être utile ſuivant les circonſtances, & comme ces circonſtances qui caractériſent la racine utile, n'entrent point dans le calcul du probleme, il falloit bien que l'algebre, pour fournir ce qu'on lui demandoit, nous donnât plus que nous ne demandions, c'eſt-à-dire, une équation du ſecond degré, où il y a une apparence de ſuperfluité. Dans les cas-mêmes où les deux racines ſont de qualité contraire, la racine négative n'eſt point abſolument ſuperflue, elle indique, étant priſe poſitivement, la hauteur du point du ciel qui ſeroit le pole, ſi les aſtres obſervés déclinoient de l'équateur, du côté oppoſé à celui où ils ſont, ou (pour exprimer la choſe autrement) qui ſeroit le pole à l'égard d'un Obſervateur ſitué de l'autre côté de l'équateur que celui qui a fait réellement les obſervations, & qui auroit vû les mêmes aſtres aux mêmes hauteurs.

Les deux racines contenues dans la formule, peuvent non-ſeulement être toutes deux poſitives, mais encore égales, & c'eſt ce qui arrive lorſque $BB + AC = 0$,

c'eſt-à-dire, lorſque la ſomme C eſt négative, & que B eſt moyenne proportionnelle entre la ſomme A & cette ſomme C priſe poſitivement; & c'eſt ce qui doit ſe rencontrer lorſque les deux aſtres ont été obſervés dans le même azymuth. Ce n'eſt auſſi que dans ce cas que l'égalité des racines doit avoir lieu, ſi on ſuppoſe que les hauteurs aient été priſes dans l'exactitude géométrique; mais ſi l'on y a commis quelque erreur, les deux racines peuvent encore être égales, lorſque les aſtres ont été obſervés dans des azymuths réellement différens, mais peu éloignés.

Pour ne rien omettre, diſons que les deux racines contenues dans notre formule peuvent ſe trouver imaginaires. C'eſt ce qui n'arriveroit jamais, à la vérité, ſi les hauteurs données étoient géométriquement exactes, mais qui eſt poſſible, à cauſe des erreurs auxquelles les obſervations ſont ſujettes. On ſera expoſé à cette eſpece d'inconvénient, lorſque l'on obſervera les deux aſtres dans le même vertical, ou dans des verticaux voiſins [c'eſt-à-dire, qui font un petit angle]. Je dis que de rencontrer des racines imaginaires, eſt ſeulement une eſpece d'inconvénient, parce qu'en ajoûtant aux hauteurs obſervées, ou en retranchant quelques minutes, on retrouvera les racines réelles que l'on avoit manquées. C'eſt à la plus ſuſpecte des deux obſervations, s'il y en a une de telle, qu'il faut ſans doute faire toute la correction, ou la principale correction; mais en cas d'égalité, la correction doit être partagée entre les deux obſervations; & voici, par exemple, ce qui doit être fait dans ce cas. Si les deux aſtres ont été obſervés de part & d'autre du méridien, il faut augmenter chacune des hauteurs obſervées. Si au contraire, les deux aſtres ont été obſervés de même part du méridien, il faut augmenter la plus grande

des hauteurs obſervées, & diminuer la moindre. On connoît aſſez que la correction des hauteurs ne doit aller que juſqu'à faire $BB + AC = 0$. (On verra dans la ſeconde Partie, le fondement de ce que j'ai dit dans cette Scholie).

III. Notre Probleme a quelque étendue, & il comprend ſous lui pluſieurs cas particuliers, deux deſquels ſont traités ſéparément dans l'Aſtronomie Nautique, & doivent par conſéquent paſſer pour intéreſſans. On peut, en conſidérant ces cas d'une certaine façon, arriver à leurs ſolutions, par des opérations plus ſimples que celles de notre probleme. Mais ſi on veut avoir ces cas réſolus avec une entiere exactitude, il faut faire certaines corrections à quelques-uns des élémens employés dans les formules trouvées par ces opérations particulieres, ou bien il faut ſe ſervir de celle qui eſt ci-deſſus. Cette formule a donc la propriété d'être plus exacte par elle-même, & plus générale qu'aucune autre : & ſi c'eſt un *avantage* * *d'avoir pluſieurs Problemes réſolus par une même méthode & un même calcul*, la voie que j'ai priſe n'eſt point à mépriſer, quoique d'autres puiſſent lui être préférables, ſoit à raiſon du plus de ſimplicité des opérations, ſoit à raiſon du génie que ſuppoſe l'invention des corrections qui ſont néceſſaires, quand on prend ces voies. Au reſte, celle que j'ai ſuivie peut fournir les mêmes formules auxquelles on parvient par ces autres voies, ainſi qu'on va voir dans les Corollaires ſuivans.

COROLLAIRE I. On peut employer deux hauteurs du même aſtre, au lieu des hauteurs de deux aſtres. Dans ce cas (qui eſt celui du Probl. XXII. de l'Aſtron. Naut.), ſi l'aſtre obſervé eſt une étoile, les quantités exprimées par x' & y' dans la formule du probleme precédent, ſont préciſément les mêmes que x, y. Et ſi c'eſt le Soleil, ou

* Voyez la Préface de l'Aſtron. Nautique; p. XXXIX.

une planete qui ait été observée, supposons pour un moment, que x' & y' sont aussi les mêmes que x, y, en faisant abstraction du changement de l'astre en déclinaison. Tous les termes de la formule donnée ci-dessus, se trouvent donc multipliés par yy; ainsi on doit supprimer ce facteur commun. D'ailleurs on a lieu d'abréger la formule, en substituant o à l'expression $r-q$, ou $r+q$ du sinus verse de l'angle Ce : ainsi dans la formule $s=\frac{rB}{A}\pm\frac{r}{A}\sqrt{(BB+AC)}$, A est $=ooxx+rrpp$, $B=\pm ox(rh+rh')$, & $C=ppyy+2rohh'-(rh+rh')^2$ (ou $=ppyy\mp 2rqhh'-rrhh-rrh'h'$). Ces valeurs de s & de A, B, C, reviennent à celles que donne l'Auteur de l'Astronomie Nautique, dans la solution du Probleme cité, solution dont j'ai emprunté ci-dessus jusqu'au discours.

SCHOLIE. Lorsque c'est le Soleil ou une planete, dont on a observé les hauteurs, si on veut avoir égard au changement de déclinaison que l'astre a pû souffrir dans l'intervalle des observations, il n'y a que deux ou trois partis à prendre. L'un est de revenir à la formule générale donnée ci-dessus; un autre est de substituer à l'un des élémens employés dans les formules particulieres qu'on vient de voir pour A, B, C, celui qui auroit eu lieu à peu près, si l'astre n'eût point changé en déclinaison, tout le reste étant le même. C'est ce second parti qu'a pris M. de Maupertuis. *Il faut*, dit-il, *mettre pour* h' *le sinus de hauteur à laquelle on auroit observé l'astre, si la déclinaison étoit demeurée la même, &c.* Et pour trouver le sinus de cette hauteur idéale, il cherche sa différence d'avec h', c'est-à-dire, la variation dh' qui répond à la variation dx du sinus de la déclinaison, ou à celle dy de son cosinus. La valeur de dh' etant ajoûtée à h', ou en étant retranchée, on a la

à la quantité qui doit être ſubſtituée à h' dans les ſommes particulieres B, C. Or, pour avoir la valeur de dh', M. de Maupettuis remonte à l'équation $u' = \frac{rrh' - rsx}{cy}$, où il fait varier h', x & y, pendant que c, s & u' demeurent conſtantes. On a donc $du = 0$, de même que le numérateur de la fraction $\frac{rrydh' - rrh'dy - rsydx + rsxdy}{cyy}$, qui eſt $= à\, du'$, d'où on tire : $dh' = \frac{rh'dy - sxdy + sydx}{ry}$, ou en ſubſtituant $-\frac{ydy}{x}$ à dx ; parce que x croiſſant, y diminue, on a $dh' = \frac{rh'x - sxx - syy}{ryx} dy$, ou $= \frac{hx - rs}{yx} dy$, ou encore en ſubſtituant $-\frac{xdx}{y}$ à dy ; $dh' = \frac{rs - hx}{yy} dx$, parce que $xx + yy = rr$.

Le ſinus de la hauteur du pole ſe trouvant enveloppé dans l'expreſſion de la quantité qui doit être ajoûtée à h', ou en être retranchée, pour avoir le ſinus de la hauteur où eût été l'aſtre dans le moment d'une des obſervations, s'il n'eût point changé de déclinaiſon ; il eſt viſible qu'en prenant le parti qui vient d'être expoſé, on ſeroit dans la néceſſité de faire deux calculs ſur la formule du Coroll. précédent, pour avoir la hauteur du pole avec l'exactitude déſirée ; car il faudroit faire un premier calcul ſur cette formule, pour avoir un ſinus approchant de celui de la hauteur du pole ; ce ſinus ſerviroit à trouver la valeur de dh', puis ayant pris la différence, ou la ſomme de h & de dh', & ayant ſubſtitué cette différence ou cette ſomme au lieu de h', dans la formule du Corollaire, il faudroit réitérer le calcul ſur cette formule, pour avoir un ſinus plus approchant de celui de la hauteur du pole que le premier : ce ſeroit un circuit, & un circuit peu court.

Si l'on n'adopte pas le premier parti, il vaudroit mieux, j'oſe le dire, prendre un troiſieme parti, que celui qu'on

vient de voir. Il consiste, ce troisieme parti, à corriger le sinus trouvé par le premier calcul, fait sur la formule du Corollaire, lequel sinus n'est pas exactement celui de la hauteur du pole : je veux dire qu'il faudroit chercher l'erreur, que la négligence du changement de déclinaison fait commettre sur le sinus de la hauteur du pole : l'expression algébrique de cette erreur, n'est ni difficile à avoir, ni fort compliquée.

Pour l'avoir, je fais varier dans la formule $u' = \frac{\pm rrh' \mp rsx}{cy}$ les quantités s, c, x, y, pendant que h' & u' demeurent constantes, & j'ai

$$du' = 0 = \frac{-rrh'cdy - rrh'ydc + rscxdy + rsxydc - rscydx - rcxyds}{ccyy};$$

ubstituant $-\frac{sds}{c}$ à dc dans le numérateur de cette fraction égale à zéro, parce que c croissant, s diminue; substituant encore $-\frac{ydy}{x}$ à dx, puis rr tant à $ss + cc$ qu'à $xx + yy$, & multipliant tous les termes par $\frac{cx}{rr}$, j'ai $(rxxy - h'sxy)\,ds = (rscc - h'xcc)\,dy$; & $ds = \frac{h'x - rs}{h's - rx} \times \frac{cc}{xy}\,dy$. Telle est la valeur de l'erreur que la négligence d'un petit changement de déclinaison, indiqué par dy (qui est la différence des cosinus des deux déclinaisons données) apporte au sinus de la hauteur du pole. Retranchant donc cette valeur de la quantité erronée s trouvée en nombres, par la formule du Coroll. précédent, ou l'y ajoûtant, on aura le sinus corrigé de la hauteur du pole. On voit sans doute que dy est positive, si la déclinaison de l'astre est moindre lorsqu'il est observé à la hauteur dont h' est sinus, que lorsqu'il l'est à la hauteur marquée par h, & que dy est négative dans le cas opposé. On doit encore comprendre, que lorsque l'astre déclinera du côté du pole

abbaissé ; ce qui donne $cyu' = rrh' + rsx$, il faut avoir égard à la différence des signes de ce cas, d'avec ceux de l'hypothese faite ci-dessus. On a dans celui-ci, $ds = \frac{h'x + rs}{h's + rx} \times \frac{cc}{xy} dy$. Au reste, si la valeur de ds se trouve positive, cela marque que le sinus peu exact s, peche par excès ; ainsi il faut en retrancher ds, pour avoir le sinus corrigé de la hauteur du pole. Si au contraire, la valeur de ds est négative, le sinus erroné s peche par défaut, & pour le corriger, il faut lui ajoûter ds prise positivement.

Au lieu de corriger le sinus non exact de la hauteur du pole, on peut corriger la hauteur même, à laquelle appartient ce sinus. Soit dD le petit arc qui est la différence des deux déclinaisons, & dL le petit arc du méridien, qui est l'erreur commise sur la hauteur du pole, en négligeant le changement de déclinaison, on a $dy = \frac{x\,dD}{r}$ & $ds = \frac{c\,dL}{r}$: substituant ces valeurs de dy & ds, dans la formule précédente, on a en général $dL = \frac{h'x \mp rs}{h's \mp rx} \times \frac{c}{y} dD$; cette formule-ci est un peu plus simple que celle-là, & plus avantageuse par conséquent, au moins pour ceux qui chercheront seulement la hauteur du pole, & non l'heure.

Quand on ne mettroit pas en pratique l'une ou l'autre correction que je viens de proposer, leurs formules ne laisseront pas d'avoir quelque utilité. Elles nous feront connoître de quelle conséquence peut être la négligence d'un petit changement de déclinaison (la formule donnée par M. de Maupertuis pour dh', peut servir au même usage). Je remarque d'abord que quand l'astre décline du côté du pole abaissé, l'erreur sur la déclinaison en cause toûjours une réelle sur la hauteur du pole, parce que le numérateur $hxc + rsc$ de la fraction qui entre dans la valeur de dL, ne peut être que réel : mais lorsque l'astre

décline du côté du pole élevé, l'erreur sur la hauteur du pole peut être nulle, parce que l'on a alors $h'xc - rsc$ pour numérateur de ladite fraction, & que $h'x$ peut quelquefois être $= rs$. C'est ce qui arrivera, si le sinus h' de la hauteur à laquelle l'astre a été observé dans le moment pour lequel on lui attribue une fausse déclinaison, est à celui de la hauteur du pole, comme le rayon est au sinus de la déclinaison, ou bien si $h' : r :: s : x$. Or, comme h' ne sçauroit surpasser r, & qu'au contraire elle est supposée moindre que r par la qualité du Probleme (puisque si on avoit $h' = r$, cette seule observation donneroit $s = x$, & $u' = r$) : on voit déja que la hauteur du pole doit être moindre que la déclinaison de l'astre, pour avoir $ds = 0$; c'est-à-dire que l'astre doit être un de ceux qui passent entre le zénith & le pole, dans la partie supérieure de leur cours, astres dont on sçait que l'angle azymuthal ne peut croître que jusqu'à un certain point, après quoi il décroît. L'algebre feroit bien capable de nous faire voir dans quel point de son cours un de ces astres arrive à la hauteur qui a pour sinus $h' = \frac{rs}{x}$; mais une legere connoissance de la doctrine de la sphere, ou l'inspection seule d'une sphere, suffisent pour discerner ce dont il s'agit.

Soit ici *MhR* une partie de l'horison, *P* le pole, *Ph* le méridien, *EM* le vertical de l'astre, *EPR* une portion de son cercle horaire, nous avons (à cause de l'angle *R* commun aux deux triangles sphériques, *PhR*, *EMR*, & de leurs angles droits, *h*, *M*) cette analogie. *Sin. EM*(h') : *sin. Ph*(s) : : *sin. ER* : *sin. PR*, qui devient $h' : s :: r : x$, si *ER* est un arc de 90 degrés, car *PR* sera égal à l'arc de la déclinaison, dont *PE* est le complément. Or dans ce cas, l'angle *PEM* est droit, ainsi le cours de l'astre (cours perpendiculaire au cercle horaire) est dirigé suivant *EM*, Fig. 39.

lorſque $h'x = rs$. C'eſt donc lorſque le vertical d'un aſtre eſt perpendiculaire à ſon cercle horaire, ou bien lorſque le cours d'un aſtre eſt perpendiculaire à l'horiſon (tems où on ſçait que ſon angle azymuthal eſt le plus grand), que la petite erreur commiſe ſur ſa déclinaiſon, n'en cauſe point ſur la hauteur du pole. Et cela eſt aſſez viſible par la Figure citée, ou ſur la ſphere, indépendamment du calcul différentiel, qui fournit pour ce cas $hx = rs$. Car ER étant ſuppoſé perpendiculaire à EM, ce qui le fait valoir 90 degrés, ſi $E\epsilon$ eſt un très-petit arc, le ſinus de l'arc ϵR ſera très-peu différent du ſinus de ER, ou du ſinus total, & doit même lui être réputé égal, ſi on traite $E\epsilon$ comme un infiniment petit. Or, les ſinus des hauteurs EM, $\epsilon\mu$, ſont en même rapport que les ſinus de ER & de ϵR. On a donc pour $\epsilon\mu$, le même ſinus que pour EM; ainſi on peut négliger ſans conſéquence, la petite différence de déclinaiſon $E\epsilon$, c'eſt-à-dire, ſuppoſer l'aſtre en ϵ, au lieu qu'il eſt en E, lorſqu'il eſt queſtion d'employer le ſinus de la hauteur de cet aſtre, puiſque celui de la vraie hauteur EM ne differe point de celui de la hauteur du point ϵ, où on le ſuppoſe.

L'analogie $h' : s :: r : x$, fait voir que la hauteur où il faut qu'un aſtre ait été obſervé pour négliger quelque choſe ſur ſa déclinaiſon, ſans tirer à conſéquence pour la hauteur du pole, doit être plus grande que cette hauteur & d'autant plus grande, que la déclinaiſon eſt plus petite. Ainſi les grandes hauteurs n'étant pas aiſées à obſerver avec exactitude, la plus grande déclinaiſon du Soleil & des planetes, ne paſſant pas 29 degrés, & la hauteur du pole devant d'ailleurs être moindre que la déclinaiſon de l'aſtre, ce ne peut être que dans les pays où le pole eſt fort bas, que l'on ait l'avantage d'avoir $h'x = rs$; à l'égard du Soleil, ou d'une planete.

Puiſqu'une petite erreur dans la déclinaiſon, n'en cauſe point ſur la hauteur du pole, dans le cas où l'aſtre eſt obſervé lorſqu'il monte ou deſcend perpendiculairement à l'horiſon, ou bien lorſque le vertical de l'aſtre eſt perpendiculaire à ſon cercle horaire, il en faut conclurre que l'erreur ſur la hauteur du pole eſt au contraire la plus grande, dans le cas où l'aſtre eſt obſervé lorſque ſa direction eſt parallele à l'horiſon, ou bien lorſque ſon vertical ſe confond avec ſon cercle horaire, c'eſt-à-dire, lorſqu'il eſt au méridien. Or dans ce cas, l'erreur ſur la hauteur du pole eſt préciſément de même quantité que celle ſur la déclinaiſon; car le numérateur $h'xc \mp rsc$ de la fraction qui multiplie dD dans la valeur de dL, eſt alors égal au dénominateur $h'sy \mp rxy$ de cette fraction: c'eſt ce qu'il eſt aiſé de reconnoître, en conſidérant que lorſqu'un aſtre eſt au méridien, ſa hauteur eſt alors la ſomme, ou la différence de ſa déclinaiſon, & de la hauteur de l'équateur (qui eſt complément de celle du pole); on a donc par le Lemme ſecond $rh' = cy - xs$, pour le cas où l'aſtre décline du côté du pole abbaiſſé, &c.

Il naît de ce qu'on vient de remarquer touchant l'erreur commiſe ſur la hauteur du pole, une conſéquence pour la pratique; ſçavoir que ſi l'on ne veut pas porter l'exactitude juſqu'à corriger la hauteur du pole, trouvée par la formule du Corollaire précédent, les ſinus & coſinus x, y, qu'il faut employer dans le calcul, ſont ceux de la déclinaiſon qui convient au moment de l'obſervation où l'aſtre eſt le plus près du méridien; parce que le cours de l'aſtre étant moins oblique à l'horiſon dans l'autre moment, l'erreur qu'on commettra en lui attribuant une fauſſe déclinaiſon pour ce moment, ſera de moindre conſéquence ſur la hauteur du pole. C'eſt le parti qu'on pourra prendre, ſi les deux hauteurs ſont fort différentes,

& furtout fi elles ont été prifes de même part du méridien ; mais fi les hauteurs ont été prifes de part & d'autre du méridien, & furtout fi elles font peu différentes, on doit faire autrement. Il faut attribuer à l'aftre, une déclinaifon moyenne entre celles qui lui appartiennent, aux momens des deux obfervations ; car fi les deux hauteurs étoient égales, les erreurs que les attributions d'une fauffe déclinaifon à l'aftre pour chacune des obfervations, cauferoient féparément fur la hauteur du pole, feroient égales, & d'ailleurs en fens contraires. Il s'opere donc une compenfation de ces erreurs, en faifant conjointement les deux attributions d'une déclinaifon moyenne à l'aftre.

COROLLAIRE II. Si l'aftre dont on a obfervé les hauteurs, eft dans l'équateur (c'eft le cas du Probl. 24 de l'Aftron. Nautique), on a $x = 0$, & $y = r$; & la formule du probleme fe réduit à $ppss = r^2pp \pm 2rqhh' - r^2hh = r^2h'h'$, d'où on tire $s = \frac{1}{p}\sqrt{(rrpp \pm 2rqhh' - r^2hh - r^2h'h')}$. Il fera encore plus commode de fubftituer $rr - cc$ à ss, car on en déduira $ppcc = \pm 2rqhh' + r^2hh + r^2h'h'$, & $c = \frac{1}{p}\sqrt{(\mp 2rqhh' + rrhh + rrh'h')}$. A l'égard de l'heure, on a pour ce cas-ci, $u = \frac{rrh}{c} = \frac{rhp}{\sqrt{(\mp 2rqhh' + rr(hh + h'h'))}}$.

COROLLAIRE III. Si l'on a le tems écoulé entre l'obfervation de la hauteur d'un aftre, & le moment de fon coucher, ou de fon lever (ce qui eft le cas du Probl. 23. de l'Aftron. Nautique), on peut encore trouver la hauteur du pole, & l'heure des obfervations, par la formule du Probleme précédent, ou par celle du Corollaire I, pourvû que l'on fçache combien la réfraction moins la parallaxe, éleve les aftres qui paroiffent à l'horifon ; car il n'y aura qu'à prendre le finus de cette élévation

pour h'; mais il faut auſſi prendre garde aux ſignes qu'on donnera à la valeur de u', tirée de la premiere formule du premier Lemme. Lorſqu'un aſtre paroît à l'horiſon, il eſt réellement abbaiſſé ſous ce cercle à l'égard de l'Obſervateur, & élevé au-deſſus de ce cercle à l'égard de l'antipode de l'Obſervateur. Or cet antipode verroit ſous le cercle de ſix heures l'aſtre qui décline du côté du pole abbaiſſé pour l'Obſervateur; & au contraire ſous l'équateur, l'aſtre qui décline du côté du pole élevé pour l'Obſervateur: il faut donc faire $cyu' = rrh' + rsx$, ſi l'aſtre qui paroît à l'horiſon décline du côté du pole élevé, ou $= - rrh' + rsx$, s'il décline du côté du pole abbaiſſé.

SCHOLIE. M. de Maupertuis propoſe pour ce cas, de faire $= 0$ le ſinus de la hauteur de l'aſtre, au moment de ſon coucher ou de ſon lever; & négligeant encore le changement de déclinaiſon que l'aſtre peut avoir ſouffert, il trouve $\left.\begin{matrix} ooxx \\ rrpp \end{matrix}\right\} ss - 2r^2ohxs = \left\{\begin{matrix} rrppyy \\ -r^4hh \end{matrix}\right.$; puis il avertit que la réfraction horiſontale faiſant paroître l'aſtre ſur l'horiſon plus long tems qu'il n'y eſt réellement, cette formule ne donneroit la hauteur du pole que peu exactement, à moins qu'on ne changeât quelqu'un des élémens qui y entrent. Au reſte, il renvoie à ſon Probleme 34., pour trouver le moyen de faire cette eſpece de correction, qui conſiſte à retrancher du tems écoulé entre les deux obſervations, ce que la réfraction apporte de retardement au coucher de l'aſtre, ou d'avancement à ſon lever. Pour cela, M. de Maupertuis cherche la variation du', qui répond à dh', le reſte étant conſtant; puis il met pour dh' l'arc dH du vertical, dont dh eſt ſinus, & ſubſtitue à du' ſa valeur en arc dE de l'équateur (on a $du' = \frac{tdE}{r}$). Mais les ſinus & coſinus de l'angle horaire, ſe trouvent enveloppés

enveloppés dans la formule qui provient de ces opérations (& quand on voudroit les en chasser, ce ne seroit qu'en y faisant rentrer les sinus & cosinus de la hauteur du pole). Or si ces quantités t', u', peuvent être supposées connues dans le cas propre de ce problème 34 *, ou dans les cas approchans, indépendamment de la hauteur du pole : il n'en est pas de même dans le cas où nous sommes, nous ne pouvons avoir t' & u' qu'après avoir trouvé la hauteur du pole, au moins grossierement. Ainsi à suivre la proposition de M. de Maupertuis, il faudroit, pour avoir la hauteur du pole avec l'exactitude désirable, faire un circuit comme celui dont j'ai parlé Coroll. I.

On évitera ce circuit, si l'on cherche ce qu'une erreur commise sur la hauteur d'un astre, en cause sur la hauteur du pole; c'est-à-dire, si l'on cherche la valeur de la variation ds, qui répond à la variation dh', le reste étant constant. Prenant donc la formule $u' = \frac{\pm rrh' \mp rsx}{cy}$, qui sert au cas où l'astre décline du côté du pole élevé (il n'est pas nécessaire ici de pratiquer l'observation faite au Coroll. précédent) ; on a $du = \frac{rrh'dc - rrcdh' + rcxds - rsxdc}{ccy} = 0$. Substituant $\frac{-sds}{c}$ à dc, & rr à $ss + cc$, il vient $ds = \frac{cc}{rx - h's} dh'$. Dans le cas où l'astre décline du côté du pole abbaissé, cyu' étant $= rrh' + rsx$, on a $ds = \frac{cc}{-rx - h's} dh'$. Or, la réfraction élevant l'astre à l'égard de l'Observateur, dh est une quantité positive, si on la prend pour la différence de sinus de la hauteur vraie & de la hauteur apparente ; ainsi l'erreur commise sur le sinus de la hauteur du pole, en négligeant l'effet de la réfraction, est négative, si l'astre décline du côté du pole abbaissé ; elle peut être

* On y suppose que la durée du jour solstitial est donnée.

positive, si l'astre décline du côté du pole élevé, & elle est en effet positive, lorsque h est petite. Pour appliquer la formule générale qu'on vient de voir, au cas particulier de ce Corollaire, j'observe que si x est fort grand & s petit, on pourroit supposer $h' = 0$, & supprimer le terme sh dans cette formule, ce qui la feroit devenir $ds = \frac{cc}{\pm rx} dh'$: mais comme l'effet de la réfraction horisontale est assez considérable, il sera plus sûr de laisser ce terme, & on mettra pour h' ainsi que pour dh', le sinus de la quantité, dont la réfraction, moins la parallaxe, éleve un astre qui paroît à l'horison.

Au lieu de chercher l'erreur du sinus de la hauteur du pole, grossierement déterminé, on peut chercher l'erreur de cette hauteur même, & la formule en sera plus simple. Mettant dH pour dh', & $\frac{cdL}{r}$ pour ds, on a $dL = \frac{rc}{\pm rx - sh'} dH$.

Il est visible que par le moyen de l'une ou de l'autre de ces formules, & de l'une de celles de la scholie du Coroll. premier, on pourra corriger conjointement les deux erreurs commises sur la hauteur du pole, par la supposition que $h' = 0$ lorsque l'astre paroît à l'horison, & par la négligence du changement de déclinaison qu'il a pû souffrir pendant le tems écoulé entre les deux observations. C'est peut-être là un mérite pour ces formules.

Au reste, il est bon d'avertir que ces formules proposées pour corriger la hauteur du pole, ne conviennent point au cas où l'astre est dans l'équateur, ou passe par l'équateur dans l'intervalle des observations, & qu'elles sont même peu justes lorsque la variation dh, qui est l'effet de la réfraction, ou qui répond à la variation du sinus de la déclinaison, n'est pas dans un petit rapport à ce

ſinus, ſurtout ſi h eſt peu conſidérable & s auſſi : mais ce défaut des formules ne vient point du calcul, il naît en premier lieu, de ce que l'une des ſuppoſitions ſur leſquelles eſt fondé le calcul, ne peut pas être vraie lorſque l'aſtre eſt dans l'équateur ; car dans ce cas, la premiere formule du premier Lemme, devient $cu' = rh'$: ainſi en regardant c comme donné, on a $cdu' = rdh'$; la variation du' eſt donc réelle, ſi dh' eſt réelle ; on ne peut donc pas ſuppoſer $du = 0$ pour le cas où l'aſtre eſt à l'équateur, ſi h' eſt ſujette à une variation réelle, telle qu'eſt celle que cauſe la réfraction, ou une erreur ſur la déclinaiſon. Quant au cas où l'aſtre eſt fort voiſin de l'équateur, on peut à la vérité y ſuppoſer $du' = 0$, quoique dh' ſoit réelle : mais alors la variation ds ou dL, qui répond à dh' eſt fort grande par rapport à elle, & d'autant plus grande que h' eſt plus petit, & que c eſt plus grand (les formules mêmes le font voir) : ainſi ds ou dL eſt dans un grand rapport à x ; on n'a donc pas droit de traiter ces variations comme étant d'un ordre de grandeur très-inférieur à x, ainſi que les principes du calcul différentiel requerroient qu'elles fuſſent.

Lors donc que la déclinaiſon de l'aſtre ſera nulle ou petite, il ne ſera pas à propos, je l'avoue, d'entreprendre de corriger la hauteur du pole groſſierement déterminée, ou ſon ſinus, de corriger, dis-je, ces quantités par les moyens que j'ai propoſés ; il faudra, ſi l'on veut employer les formules du Coroll. I. ou du Coroll. précédent, revenir au genre de moyen indiqué par M. de Maupertuis (Prob. XXIII.), parce que ce moyen tend non à découvrir l'erreur ds, ou la variation dh', mais à empêcher que s ne ſoit erroné, quoiqu'on prenne un faux h' ou un faux x pour le moment de l'une des obſervations ; je veux dire qu'il faut changer le tems écoulé entre les deux obſerva-

tions, en celui qui auroit lieu si l'astre ne changeoit point de déclinaison dans leur intervalle, ou si la réfraction n'augmentoit pas la durée de son apparition (la deuxieme Partie fournira une maniere d'éviter sinon le circuit, du moins la longueur du circuit, à quoi ce genre de moyen engage).

1°. Pour le cas où l'on veut attribuer à l'astre une déclinaison un peu différente de celle qu'il a en certain moment, prenant la variation des quantités u', x', y' dans la premiere formule du premier Lemme, $cyu' = rrh' - rsx'$, ou = &c. en faisant h, s, c constans, l'on a $cydu' = -rsdx' - cu'dy'$; & substituant à du' sa valeur en arc dE de l'équateur, $\left(du' = \frac{t'dE}{r}\right)$, à dx sa valeur $\frac{ydD}{r}$, à $-dy'$ sa valeur $\frac{x'dD}{r}$; l'on a enfin $dE = \frac{cu'x - rsy}{cyt'} dD$, ou, &c. L'arc dE étant réduit en tems, ce tems est ce qu'il faut ajoûter à celui qui s'est écoulé entre les deux observations, ou qu'il faut en retrancher, pour avoir le tems qui se seroit écoulé entre ces observations, si l'astre n'eût point changé de déclinaison. C'est du Probleme 37 de l'Astronomie Nautique que je tire cette formule pour dE; j'y laisse les sinus s & t, ainsi que leurs cosinus, parce que ces quantités peuvent être déterminées concurremment par l'opération grossiere qui doit précéder la recherche du vrai sinus s.

2°. Pour le cas où l'on veut attribuer à l'astre une hauteur un peu différente de celle qu'il a en certain moment, prenant la variation des quantités u', h' dans la même formule du premier Lemme, $cyu' = rsx - rrh'$, ou, &c. en faisant s & x constans, l'on a (observant que dans le cas supposé, qui est celui où l'astre est vû au dessous du cercle de six heures, u' diminue, lorsque h' croît) $cydu' = rrdh'$,

Subſtituant à du' ſa valeur $\frac{t'dE}{r}$, & pour dh' mettant $\frac{kdH}{r}$, on a enfin $dE = \frac{rrk}{cyt'} dH$. Cette formule eſt tirée du Probleme 34 de l'Aſtron. Nautique : la précédente ſe combinera aiſément avec celle-ci, pour le cas où l'on voudra attribuer tout-à-la-fois à l'aſtre, une déclinaiſon & une hauteur un peu différentes des ſiennes.

COROLLAIRE IV. Si l'on connoît le tems écoulé entre le lever ou le coucher de deux aſtres (ce qui eſt le cas du Probl. 39 de l'Aſtron. Nautique), on aura encore la hauteur du pole & l'heure des obſervations, par la formule du Probleme précédent, en mettant pour h ainſi que pour h' les ſinus des quantités dont la différence de la réfraction & de la parallaxe horiſontale, élevent l'un & l'autre de ces aſtres, & obſervant la précaution marquée au Coroll. III.

Si l'on veut faire h & $h' = 0$, on le peut, en ſubſtituant au tems écoulé entre les deux obſervations, celui qui auroit eu lieu, ceſſant la réfraction & la parallaxe, ou en ſe réſervant de corriger l'erreur que ces ſuppoſitions de h & $h' = 0$ cauſent ſur la hauteur du pole, lorſqu'on fait ſervir dans le calcul le vrai tems écoulé entre les deux obſervations. Il ne s'agit plus que de voir à quoi ſe réduit la formule du Probleme. Lorſqu'on fait h & $h' = 0$, elle devient :

$ss = \frac{rr\,pp\,yy\,y'y'}{rr\,pp\,y'y' + rr\,x'x'\,yy - 2rq\,xx'\,yy' + qq\,xx\,y'y'}$. Et nommant X & X' les tangentes des déclinaiſons des deux aſtres, nous pouvons rendre cette formule plus ſimple, en mettant pour x & x' leurs valeurs $\frac{Xy}{r}$, $\frac{X'y'}{r}$; car tous les termes de la fraction ſe trouveront multipliés par $y'y'$, on aura donc $ss = \frac{r^4 + pp\,yy}{r^4 pp + rr\,X'X'yy - 2rq\,XX'\,yy + qq\,XXyy}$; mettant dans

le terme r^4pp, $xx+yy$ pour rr, ce qui fera $pprrxx + rrppyy$, puis ſubſtituant à $rrxx$, ſa valeur $XXyy$, tous les termes de la valeur de ss ſe trouveront multipliés par yy; mettant enfin $rrXX$ pour $ppXX+qqXX$, on aura $ss = \frac{r^4pp}{rrpp+rrXX+rrX'X'-2rqXX'}$. Et ſi l'on veut ſubſtituer $rr-cc$ à ss, on aura:

$$cc = \frac{rr(rrXX+rrX'X'-2rqXX')}{rrpp+rrXX+rrX'X'-2rqXX'}.$$

Nous pouvons déduire de ces valeurs de ss & cc, qui ont un même dénominateur, $\frac{rrss}{cc} = \frac{r^4pp}{rrXX+rrX'X'-2rqXX'}$, ou bien $\frac{rs}{c} = \frac{rrp}{\sqrt{(rrXX+rrX'X'-2rqXX')}}$. Or, $\frac{rs}{c}$ eſt la tangente de la hauteur du pole. (La valeur que nous venons d'en trouver eſt la même que celle qu'en donne M. de Maupertuis, dans le Probl. cité).

Quant à l'heure, nous avons (puiſque h eſt ſuppoſé $=0$) $rsx = cyu$, ou $\frac{rs}{c} = \frac{yu}{x} = \frac{ru}{X}$ (parce que $y:x::r:X$) donc $u = \frac{rpX}{\sqrt{(rrXX+rrX'X'-2rqXX')}}$. Cette valeur de u ſera exacte, ſi on retranche du tems écoulé entre les obſervations, la différence des retardemens que la réfraction apporte au coucher de chaque aſtre, ou des avancemens qu'elle apporte à leur lever; ou bien ſi l'on retranche de ce tems, ou ſi on lui ajoûte la ſomme de l'avancement & du retardement, lorſqu'on aura obſervé le lever d'un des aſtres & le coucher de l'autre, ſinon il faudra chercher pour u la correction dont il aura beſoin. La formule de cette correction eſt $du = \frac{rr}{cy} dh$.

Cette formule étant fort simple, on pourra s'en servir dans le cas du Coroll. précédent, après avoir déterminé grossierement l'heure sur le sinus peu exact de la hauteur du pole, supposé qu'on ne se soucie pas d'avoir ce sinus même corrigé.

SCHOLIE. I. Au lieu d'observer les astres au moment de leur lever ou de leur coucher, c'est-à-dire, dans un tems où ils sont au-dessous de l'horison rationel, il seroit plus à propos, par deux raisons, de les observer, s'il est possible, lorsqu'ils sont dans cet horison. La premiere est visible, on éviteroit par-là le besoin de correction.

Je tire la deuxieme de la Piece déja citée de M. Bouguer. Cet habile homme y a fait un paragraphe exprès (c'est le troisieme de la deuxieme Partie), pour montrer *qu'il vaut mieux tâcher d'observer les astres lorsqu'ils sont exactement dans l'horison rationel*, que de les observer à l'horison sensible; & il fonde ce conseil, sur ce que la réfraction horisontale est sujette à des irrégularités deux fois plus grandes environ, que celles de la réfraction qu'éprouve l'astre, lorsqu'il est dans l'horison rationel. Dans ce même paragraphe, M. Bouguer propose un expédient à l'égard du Soleil, pour l'observer à peu près dans l'horison, c'est *de l'observer lorsque le bord inférieur de son disque paroît élevé au-dessus de l'horison, à la vûe simple, d'environ la moitié de son diametre apparent*, parce que le diametre est à peu près égal à la quantité dont la réfraction l'éleve alors. L'Auteur de l'Astron. Nautique propose, *pag.* 88, une pratique qui revient à l'expédient de M. Bouguer.

II. Il y a un cas approchant de celui du Corollaire précédent, mais où il ne doit pas être question de chercher l'heure, parce qu'on la suppose connue exactement, ou à peu près, sans calcul, & avant d'avoir la hauteur

du pole. C'est à l'invention de cette hauteur seulement, que se dirige la considération de ces cas. On suppose que la durée de l'apparition d'un astre au-dessus de l'horison, ou de son occultation sous ce cercle, est connue, ou pour parler autrement, que le tems écoulé entre le lever & le coucher d'un astre, ou entre son coucher & son lever est connu (si l'astre décline du côté du pole abbaissé, c'est la durée de son apparition, & s'il décline du côté du pole élevé, c'est la durée de son occultation, que l'on a dû tâcher d'observer, afin que l'observation se ressente moins de l'imperfection de l'instrument employé pour mesurer le tems). En parlant ici d'un astre, j'entends le Soleil, ou une des planetes les plus lumineuses, parce que les étoiles ne sont pas visibles à l'horison; ainsi l'astre a pû souffrir, dans le cas dont il s'agit, un changement de déclinaison auquel il faut avoir égard. Or, un moyen sûr pour cela, c'est de se servir de la formule du Coroll. précédent $\frac{rs}{c} = \frac{rrp}{\sqrt{(rrXX + rrX'X' + 2rqXX')}}$ (je mets ici le signe $+$ devant le terme où entre q, parce que la durée de l'apparition ou de l'occultation d'un astre situé dans le zodiaque, est ordinairement plus grande que six heures, & moindre que dix-huit), on obtiendra, dis-je, la hauteur du pole avec une grande précision, par cette formule: mais notre cas ne requiert pas absolument qu'on prenne la peine de s'en servir. Lorsque la déclinaison de l'astre ne sera pas fort petite, il suffira de lui en attribuer une moyenne entre celles de son lever & de son coucher, & l'on pourra employer un autre calcul, dont j'emprunte la formule du Probl. 32 de l'Astron. Nautique. Soit $'X$ la tangente de la déclinaison moyenne entre celles X, X', du lever & du coucher de l'astre, & $'Y$ sa cotangente; h étant supposée $= 0$, nous avons $\frac{rs}{c}$

$=$

$= \frac{'yu}{'x} \left(= \frac{ru}{'X}\right) = \frac{'Yu}{r}$, parce que $'y : 'x :: 'Y : r$. (C'eſt la derniere valeur de $\frac{rs}{c}$, dont il faut faire uſage dans la pratique, parce qu'elle indique un calcul plus facile que celle $\frac{ru}{'X}$, qui la précede. On va voir pourquoi j'ai préſenté celle-ci).

M. de Maupertuis attribue à l'aſtre, pour le cas où nous ſommes, une des deux déclinaiſons qu'il a aux momens de ſon coucher & de ſon lever, & propoſe de retrancher ou d'ajoûter au tems écoulé entre ces momens, ce que le changement de déclinaiſon apporte de retardement ou d'avancement à l'un de ces momens : mais je m'imagine que le calcul de la hauteur du pole, fait ſelon l'idée que j'ai propoſée, équivaut bien dans tous les cas, à la double opération preſcrite par M. de Maupertuis; c'eſt-à-dire, qu'il donne un réſultat auſſi exact [& je m'étonne même que cet habile homme n'y ait pas penſé]. On peut ſe rappeller ce que j'ai dit ci-deſſus (à la Schol. du Coroll. I.), pour établir la bonté de l'expédient dont il s'agit, & je pourrois m'en tenir à cela ; cependant je vais encore montrer la choſe par une autre voie, afin de lever tout ſcrupule.

Deux quantités, dont la différence eſt petite en comparaiſon de ces quantités, étant élevées chacune au quarré, il eſt aiſé d'appercevoir que la ſomme de ces deux quarrés ne ſurpaſſe que de bien peu le double du produit de ces deux quantités. Soient a, & $a+d$ ces quantités, le double de leur produit eſt $2aa+2ad$, & la ſomme de leurs quarrés eſt $2aa+2ad+dd$, qui ne ſurpaſſe la premiere ſomme que du quarré dd, qui eſt bien peu de choſe, & que l'on peut négliger. Nous pouvons donc mettre $2XX'$ au lieu de $XX+X'X'$, dans la formule

rigoureuse $\frac{rs'}{c} = \frac{rrp}{\sqrt{(rrXX + rrX'X' + 2rqXX')}}$, & faisant $'X = \sqrt{XX'}$, nous aurons $\frac{rs}{c} = \frac{rrp}{'X\sqrt{(2rr + 2rq)}}$. Or, je dis que cette valeur de $\frac{rs}{c}$ est précisément la même que celle $\frac{ru}{'X}$, que j'ai proposée ci-dessus : car on a par le Lemme second, & par l'hypothese du cas où nous sommes, $rp = 2ut$, & $pp = \frac{4uutt}{rr} = \frac{4uutt}{tt+uu}$, & $qq = rr - pp = \frac{(tt+uu)^2 - 4uutt}{rr} = \frac{(tt-uu)^2}{rr}$; donc $q = \frac{tt+uu}{r}$, & $rq = tt - uu$. Substituant donc dans la derniere égalité, $2ut$ à rp, $tt - uu$ à rq, & tt à $rr - uu$, nous aurons enfin $\frac{rs}{c} = \frac{2rut}{'X\sqrt{4tt}} =$ &c.

J'ai pris ici $'X$ moyenne géométrique, entre les deux déclinaisons X & X' du lever & du coucher de l'astre : mais il ne sera pas nécessaire dans la pratique de chercher un $'X$ qui soit tel précisément, il faudra prendre la déclinaison qui convient à peu près au tems du passage de l'astre par le méridien ; ce qui ne coutera pas plus pour ce tems, que pour un autre quelconque.

Si on supposoit que les observations du lever & du coucher de l'astre se fissent en des lieux différens en latitude, mais de peu différens, la formule $\frac{rs}{c} = \frac{'Yu}{r}$ donneroit assez exactement la latitude moyenne entre celles de ces lieux ; & si leur différence en latitude est connue à peu près, on aura aisément la latitude de l'un ou de l'autre, après avoir trouvé la moyenne (la justesse de cette pratique est sensible, par ce que l'on vient de voir à l'égard de la déclinaison). Mais M. de Maupertuis propose un autre procédé pour ce cas ; c'est de retrancher ou d'ajoûter à la durée de l'apparition (ou de

l'occultation) de l'aſtre, ce que le changement de l'Obſervateur en latitude a apporté pour lui d'augmentation ou de diminution à cette durée, après quoi l'on cherchera la hauteur du pole, pour l'un ou l'autre des lieux où le lever & le coucher de l'aſtre ont été obſervés. Or, ce n'eſt qu'à l'aide du calcul différentiel, que M. de Maupertuis trouve la formule $dE = \frac{r^3x}{ccyt} dL$, pour l'altération cauſée à la durée dont il s'agit, par le changement dL de l'Obſervateur en latitude. Le réſultat du procédé expoſé par ce Sçavant, ne peut donc être plus juſte que celui de l'opération que je viens d'indiquer, & celui-là le ſeroit même un peu moins que celui-ci, parce que M. de Maupertuis fait entrer dans la valeur de dE, le coſinus de la hauteur du pole groſſierement déterminée.

(Si les deux lieux où le lever & le coucher de l'aſtre ont été obſervés différoient notablement en latitude, on n'auroit qu'imparfaitement leur latitude moyenne, par la formule $\frac{sr}{c} = \frac{Yu}{r}$, & par conſéquent on n'auroit auſſi qu'imparfaitement leurs latitudes propres. Mais ſi l'on étoit fort curieux d'avoir l'une ou l'autre de ces latitudes avec une grande préciſion, j'avertis en paſſant, qu'on y parviendroit par une équation du quatriéme dégré, pour la tangente de la hauteur du pole de l'un des lieux. Voici les fondemens de cette équation. Soient s & s' les hauteurs du pole pour les deux lieux, c, c' leurs coſinus; δ le ſinus de la différence donnée de ces lieux en latitude, β ſon coſinus; t, t' les ſinus des angles horaires au lever de l'aſtre pour l'un des lieux, & à ſon coucher pour l'autre; u, u' leurs coſinus : on a $u' = \frac{s'X}{c'}$, $u = \frac{sX}{c}$, $t = \frac{1}{c} \sqrt{(rrcc - ssXX)}$; il faut ſubſtituer ces va-

leurs de u', u, t dans l'équation $ru = -qu + pt$; puis obfervant que $rs' = c\delta + s\beta$, & que $rc' = s\delta \mp c\beta$, dans le cas où les deux lieux font de même part de l'équateur, il faut chaffer s' & c', par le moyen de ces équations, &c.)

Moins la différence de latitude des deux lieux où le lever & le coucher de l'aftre auront été obfervés fera petite, & moins parfaite fera l'invention de la latitude moyenne entre les leurs. Or, c'eft fur mer que l'hypothefe du changement de lieu en latitude peut devenir réelle; & plus l'intervalle entre les momens du lever & du coucher de l'aftre fera long, plus la différence des lieux où l'on obfervera ces momens pourra être grande: d'ailleurs cette différence fera connue avec d'autant moins d'exactitude, puifqu'elle ne peut l'être que par eftime. Voilà deux nouvelles raifons pourquoi le Navigateur doit obferver la durée de l'occultation de l'aftre, par préférence à celle de fon apparition, lorfque l'aftre décline du côté du pole élevé. Et comme le Navigateur peut auffi changer de lieu en longitude (ce qui allonge ou diminue la durée, foit de l'apparition, foit de l'occultation de l'aftre, & oblige de la corriger par la fouftraction ou l'addition du tems qui répond à la différence des longitudes), il naît encore de-là une raifon pour obferver la moindre de ces durées, plutôt que la plus grande. Ces mêmes confidérations font voir qu'il eft à fouhaiter que la déclinaifon de l'aftre foit confidérable, fur-tout fi la hauteur du pole eft petite. Il eft vrai que moins la déclinaifon de l'aftre & la hauteur du pole feront grandes, & moins les irrégularités de la réfraction horifontale en apporteront fur la durée de l'apparition ou de l'occultation de l'aftre, & moins par conféquent elles cauferont d'erreur par elles-mêmes dans la recherche de la hauteur du

pole ; mais d'un autre côté, un même dégré d'erreur dans l'obſervation de cette durée, en produit une d'autant plus grande dans le calcul de la hauteur du pole, que la déclinaiſon de l'aſtre & que cette hauteur ſont petites. Ne commît-on donc d'erreur ſur la durée de l'apparition ou de l'occultation d'un aſtre, qu'en conſéquence de l'irrégularité de la réfraction horiſontale, il n'y a pas d'avantage (ou il y en a peu) à ce que la déclinaiſon de l'aſtre ſoit petite. Au reſte, voici le rapport d'une erreur dans la durée dont il s'agit, erreur meſurée par le petit arc dE de l'équateur, à celle dL qui en dérive ſur la hauteur du pole.

Nous avons, par l'hypotheſe, $rsx = cyu$. Faiſant varier u, s, c, pendant que x eſt conſtant, nous aurons $rxds = cydu + uydc$; mettant pour ds & dc leurs valeurs $\frac{cdL}{r}$ & $-\frac{sdL}{r}$, & pour du ſa valeur $\frac{tdE}{r}$, puis ſubſtituant à yu ſa valeur $\frac{rsx}{c}$, à cyt ſa valeur, $r\surd(ccyy - ssxx)$ ou $rr\surd(cc - xx)$, multipliant tout par c, & mettant rr pour $cc + ss$, nous aurons enfin $rxdL = c\surd(cc - xx)\,dE$. Prenons maintenant un exemple ou deux, afin de voir ſenſiblement le rapport des deux erreurs dL, dE. Soient r, c, x, dans la raiſon des nombres 8, 5, 3, ce qui ſuppoſe que la hauteur du pole eſt de 51° 19′ & la déclinaiſon de l'aſtre de 22° 2′, & d'où il ſuit que ſon angle horaire au moment de ſon lever ou de ſon coucher, eſt de 30° 21′, en ſorte que la durée de ſon apparition ſur l'horiſon eſt de plus de 16 heures, & celle de ſon occultation de moins de 8 heures. Poſé qu'il décline du côté du pole élevé, nous aurons $8 \times 3\, dL = 5\surd(16)\, dE$, ou bien $dL = \frac{5}{6} dE$; mais ſi nous mettons r, c, x, dans la raiſon des nombres $\frac{410}{9}$, 41, & 9, ce qui ſuppoſe que la hauteur du pole eſt

de 25° 51′, la déclinaiſon de l'aſtre, de 11° 24′, & d'où il ſuit que ſon angle horaire, au moment où il eſt à l'horiſon rationel, eſt ſeulement de 5° 36′, en ſorte que la durée de ſon ſéjour d'un côté de l'horiſon, eſt de 12 heures trois quarts, ou de 11 heures un quart, nous aurons $410\, dL = 41 \times 40\, dE$, ou $dL = 4\, dE$. Et ſi nous ſuppoſons maintenant que l'erreur commiſe ſur le tems écoulé entre les deux paſſages de l'aſtre à l'horiſon rationel, eſt d'une minute d'heure, qui en vaut 15 de l'équateur, l'erreur ſur la hauteur du pole ſera en ce cas d'un dégré.

On peut voir, par ces exemples, juſqu'où on peut compter ſur la propoſition de trouver la hauteur du pole, par l'obſervation de la durée du jour, c'eſt-à-dire, du ſéjour du Soleil au-deſſus de l'horiſon, faite dans l'Aſtron. Nautique [Problème dont on aſſûre qu'*il n'y a que deux jours dans l'année, ſçavoir ceux de l'équinoxe, où l'on ne puiſſe pas le pratiquer*. Préf. *pag*. xxvij]. Au reſte, je dois dire que ma remarque peut bien faire ſentir que cette propoſition doit être limitée, mais que je ne m'ingere point pour cela de prétendre qu'on doive abſolument la rejetter; j'y applaudis au contraire, & c'eſt pour en faciliter la pratique, que je me ſuis engagé dans cette longue digreſſion. En effet, ſi l'on tâche d'obſerver le Soleil au moment du paſſage de ſon centre par l'horiſon rationel, il ne reſtera aucune difficulté qui puiſſe dégoûter de faire uſage de ce Problème, auquel M. de Maupertuis *s'eſt tant appliqué* [pour me ſervir de ſes termes, *pag*. 73], & au ſujet duquel il a donné pluſieurs belles choſes, mais qui, pris d'une certaine façon, eſt moins difficile par ſes circonſtances, qu'il n'a paru d'une premiere vûe à cet habile Aſtronome.

PROBLEME III.

La hauteur d'un aſtre, & l'angle azymuthal d'un autre étant donnés, avec leurs déclinaiſons & le tems écoulé entre les obſervations, trouver l'heure de l'obſervation du premier aſtre.

Il eſt encore préalable de trouver la hauteur du pole.

On a, par la premiere formule du premier Lemme, $u = \frac{rrh - rsx}{cy}$; par conſéquent $uu = \frac{r^2(rrhh - 2rshx + ssxx)}{ccyy}$, & $tt = rr - uu = \frac{rr(ccyy - rrhh + 2rshx - ssxx)}{ccyy}$ $= \frac{rr(rryy - rrhh + 2rshx - rrss)}{ccyy}$, & $t = \frac{r}{cy}\sqrt{(rryy - rrhh + 2rshx - rrss)}$. Par le ſecond Lemme on a, dans le cas de la *Fig.* 5, $ru' = qu - pt$, $rt' = qt + pu$; ſubſtituant dans ces deux équations les valeurs qu'on vient de voir pour u & t, on a $u' = \frac{qrh - qsx - p\sqrt{(rryy - rrhh + 2rshx - rrss)}}{cy}$, & $t' = \frac{prh - psx + q\sqrt{(rryy - rrhh + 2rshx - rrss)}}{cy}$.

D'un autre côté, on a par la troiſieme formule du premier Lemme, $rny't' + rmcx' = msy'u'$, ou, en nommant $N = \frac{rn}{m}$ la cotangente de l'angle azymuthal, & $X' = \frac{rx'}{y'}$ la tangente de la déclinaiſon, $Nt' + cX' = su'$. Subſtituant dans cette égalité les valeurs de t' & u', multipliant tous les termes par cy, & ſubſtituant $rr - ss$ à cc, on a:

$$\left.\begin{matrix}+X'y \\ -qx\end{matrix}\right\} ss \left.\begin{matrix}+Npx \\ +rqh\end{matrix}\right\} s \begin{matrix}-rrX'y \\ -rNph\end{matrix} = \left.\begin{matrix}ps \\ Nq\end{matrix}\right\} \sqrt{(rryy - rrhh + 2rhxs - rrss)}:$$

& les deux membres de cette égalité étant élevés au quarré, on aura pour s une équation du quatriéme dégré,

ſur laquelle je ne m'arreterai pas, parce qu'un Problème dont le calcul eſt ſi compliqué, ne peut être d'uſage. *Il eſt de théorie plutôt que de pratique*, & c'eſt pour ne rien laiſſer ſans diſcuſſion de ce qui peut appartenir à mon ſujet, que je le préſente ainſi que le ſuivant.

PROBLEME IV.

Les angles azymuthaux de deux aſtres étant donnés, avec leur déclinaiſon, & l'intervalle des obſervations, trouver l'heure, ou la hauteur du pole.

On a, par la troiſieme formule du premier Lemme: $Nt + cX = su$, & $N't' + cX' = su'$. Subſtituant dans la deuxieme de ces égalités les valeurs de t' & u', fournies par le ſecond Lemme, & mettant $\sqrt{(rr - ss)}$ pour c; & $\sqrt{(rr - uu)}$ pour t, il ne reſtera que deux inconnues, s & u, dont on pourra chaſſer celle qu'on voudra, puiſqu'on a pour elles deux équations; mais l'équation qui en réſulteroit pour le Problème, ſeroit d'un dégré très-élevé, & il eſt inutile que je m'y arrête.



CHAPITRE

CHAPITRE II.

Moyens de trouver l'heure, la hauteur du Pole étant connue.

PROBLEME V.

LA hauteur du pole, la déclinaison & la hauteur d'un astre étant donnés, trouver l'heure de l'observation.

La premiere formule du premier Lemme, donne $u = \frac{rrh + rsx}{cy}$ pour le cas où l'astre décline du côté du pole abbaissé, $u = \frac{rrh - rsx}{cy}$ pour le cas où il décline du côté du pole élevé, & est au-dessus du cercle de six heures, &c.

PROBLEME VI.

La hauteur du pole, la déclinaison & l'angle azymuthal d'un astre étant donnés, trouver l'heure de l'observation.

La troisieme formule du premier Lemme, donne $rnyt = \pm msyu \mp rmcx$ pour les cas où l'astre est au-dessus de l'équateur & du cercle de six heures; ou bien $Nt = \pm su \mp cX$. Elevant les deux membres de cette égalité au quarré, & substituant $rr - uu$ à tt, on a

$$\left.\begin{matrix} ss \\ NN \end{matrix}\right\} uu - 2scXu = \left\{\begin{matrix} +rrNN \\ -ccXX \end{matrix}\right., \quad \& \; u = + \frac{scX}{ss + NN} \pm \frac{N}{ss + NN} \sqrt{(rrNN + rrss - ccXX)}.$$

Ces deux valeurs de u ſont poſitives, & la moindre eſt pour le cas où l'aſtre eſt ſitué du côté du premier vertical, qui regarde le pole élevé; la plus grande eſt pour le cas où l'aſtre eſt de l'autre côté de ce vertical.

Lorſque l'aſtre eſt au-deſſous de l'équateur, ou du cercle de ſix heures, on a $Nt = su + cX$, & $u = -\frac{scX}{ss+NN} + \frac{N}{ss+NN}\sqrt{(rrNN + rrss - ccXX)}$.

PROBLEME VII.

La hauteur du pole étant connue, & deux aſtres E, E', dont les déclinaiſons & les aſcenſions droites ſont données, étant vûs dans un même vertical, trouver l'heure de l'obſervation.

Soient X, X' les tangentes des déclinaiſons des deux aſtres, t, t' les ſinus de leurs angles horaires, u, u' leurs coſinus; & ſoit a le ſinus de leur différence d'aſcenſion droite, & b ſon coſinus.

La troiſieme formule du premier Lemme donne, pour le cas où les deux aſtres ſont au-deſſus de l'équateur, & du côté du premier vertical, où n'eſt pas le pole élevé, $\frac{su - cX}{t} = \frac{rn}{m} = \frac{su' - cX'}{t'}$, ou (en ſuppoſant que E' eſt le ſupérieur des deux aſtres) $stu' - st'u = cX't - cXt'$. Or par le Lemme ſecond, *Fig.* 8. (où ε e eſt l'arc dont le ſinus vient d'être nommé a), $-t'u + tu' = ra$, & $t' = \frac{bt - au}{r} = \frac{bt - a}{r}\sqrt{(rr - tt)}$, on a donc $rrras - rcX't + bcXt = acX\sqrt{(rr - tt)}$, & après avoir quarré chaque membre,

$$\left.\begin{array}{l} + rrccXX \\ - 2rbccXX' \\ + rrccX'X' \end{array}\right\} tt \left.\begin{array}{l} - 2r^3 acsX' \\ + 2r^2 bacsX \end{array}\right\} t = \begin{array}{l} + rraaccXX \\ - r^4 aass. \end{array}$$

Et prenant $A = rrccXX - 2rbccXX' + rrccX'X'$, $B = + rracsX' - rbacsX$, & $C = aaccXX - rraass$, on a, pour le ſinus de l'angle horaire de l'aſtre inférieur E,

$$t = \frac{r}{A} B \pm \frac{r}{A} \sqrt{(BB + AC)}.$$

SCHOLIE I. Ce Problème, pour le cas qu'on vient de voir, eſt le XXVIe de l'Aſtron. Nautique : mais il y a cinq autres cas * que M. de Maupertuis n'a pas touchés, & dont il n'eſt peut-être pas hors de propos d'en dire un mot. Les deux aſtres peuvent être du côté du premier vertical, où eſt le pole élevé, ſoit tous deux au-deſſus du cercle de ſix heures, ſoit tous deux au-deſſous, ſoit l'un au-deſſus & l'autre au-deſſous de ce cercle ; & dans chacun de ces trois cas on trouve les termes de l'équation pour t, affectés des mêmes ſignes que ci-deſſus (par exemple, E'' étant au-deſſus du cercle de ſix heures, & E au-deſſous, on a $\frac{su + cX}{t} = - \frac{su' + cX'}{t'}$, & $stu' + st'u = cX't - cXt'$; or dans ce cas, $tu' + t'u = ra$, & $t' = bt + a\sqrt{(rr - tt)}$, poſé que la différence d'aſcenſion droite des deux aſtres ſoit au-deſſous de 90 deg. ce qui eſt le cas de la *Fig.* 6, on a donc $rras - rcX''t + bcXt = - acX\sqrt{(rr - tt)}$, ce qui revient au même que ci-deſſus). En effet, les ſignes doivent être les mêmes dans l'équation pour t, tant que ceux des quantités XX'' ſont les mêmes. Si donc l'une de ces quantités, ou toutes deux, ſont poſées en ſens contraire à celui de ces premiers cas, on doit avoir d'autres ſignes dans l'équation dont il s'agit. Soit, par exemple, E'' au-deſſus de l'équateur, & E au-deſſous, on a $\frac{su + cX}{t} = \frac{su'' - cX''}{t''}$,

* Je ne compte ici que les cas où les deux aſtres ont été vûs de même part du zénith, cas dans leſquels la différence de ces aſtres en aſcenſion droite, eſt moindre que 90 dégrés, pour l'ordinaire.

& $stu'' - st''u = cX''t + cXt''$. Or, $tu'' - t''u = ra$, & t'' $= bt - a\sqrt{(rr - tt)}$, donc $rras - rcX''t - bcXt = - acX\sqrt{(rr - tt)}$, &

$$\left.\begin{array}{l} + rrccXX \\ + 2brccXX'' \\ + rrccX''X'' \end{array}\right\} tt \left.\begin{array}{l} - 2r^3 acsX'' \\ - 2br^2 acsX \end{array}\right\} t = \begin{array}{l} rraaccXX \\ - r^4 aass \end{array}.$$

Si les deux aftres font au-deffous de l'équateur, les termes du coefficient de tt ont les mêmes fignes que dans les premiers cas; mais l'on a $+ 2r^3acsX'' - 2br^2acsX$, pour coefficient de t.

II. Nous avons deux valeurs pour le finus de l'angle horaire de l'aftre inférieur; il s'agit de voir s'il n'y auroit point lieu de fe méprendre dans le choix qu'il faut faire entre ces valeurs, & fe prémunir contre ce danger. Je remarque donc que les aftres qui peuvent fe trouver dans un même vertical, pour les endroits qui ont une certaine latitude, ne fe rencontrent pas ainfi une feule fois dans leur révolution journaliere, mais deux fois. Pour dire la chofe autrement, fi le grand cercle de la fphere fur lequel font deux aftres, peut paffer par le zénith de quelque endroit, il y paffe deux fois en 24 heures. Il eft vrai que deux aftres qui étoient dans certaine pofition à l'égard du zénith & de l'horifon, lorfqu'ils fe font rencontrés une fois à un même vertical, peuvent n'être pas dans la même pofition, lorfque le grand cercle fur lequel ils font, paffera une deuxieme fois par le zénith. Si c'eft par le fens de la vûe, & à l'aide d'un fil à plomb, que l'on fçait que deux aftres ont été dans le même vertical en certain moment, il faut qu'ils aient été alors au-deffus de l'horifon, & de même part du zénith; & il peut fe faire que dans leur feconde rencontre, à un même vertical, ils foient de part & d'autre du zénith, ou bien que celui qui étoit fupérieur à l'autre dans la

premiere rencontre, lui soit inférieur dans la seconde, &c. mais il est possible aussi que dans l'une & l'autre, le même astre soit supérieur, &c.

Si l'astre dont on cherche l'angle horaire, n'est pas de même part du méridien dans ses deux rencontres à un même vertical avec l'autre astre, les racines de notre équation pour t doivent être de qualités contraires, & c'est la positive qui convient au cas observé : la négative est pour le cas de l'autre rencontre, & on l'eût trouvée positive, si on eût fait le calcul directement pour ce cas.

Mais si l'astre dont on cherche l'angle horaire, est du même côté du méridien dans l'une & l'autre rencontre, les deux racines de notre équation doivent être positives, & il faut sçavoir choisir entre elles. Je remarque sur cela que dans ce cas, c'est de différens côtés du premier vertical, qu'est situé l'astre dont on demande l'angle horaire, en ses deux rencontres avec l'autre astre à un même vertical. Il faut donc considérer de quel côté du premier vertical a été observé l'astre dont on cherche l'angle horaire. Si ç'a été du côté où est le pole élevé, c'est la plus grande des deux racines qui est la vraie valeur de t: si c'est de l'autre côté du premier vertical, & au-dessus de l'équateur, qu'a été observé l'astre, c'est la moindre des deux racines qui est la vraie valeur de t. Enfin, si c'est au-dessous de l'équateur que l'astre a été observé, c'est la plus grande racine qui se retrouve vraie valeur du sinus demandé. Je remarque au reste, que les deux racines positives, peuvent être utiles à l'égard de certains astres, entre ceux qui déclinent du côté du pole élevé, parce que ces astres peuvent se trouver au-dessus de l'horison, dans leur double rencontre dont il s'agit ; mais que d'autres étant plongés sous l'horison dans l'une de ces rencontres, une seule des racines positives sera utile à leur

égard. Il n'y a pareillement qu'une ſeule des racines poſitives qui puiſſe être d'uſage, à l'égard des aſtres qui déclinent du côté du pole abbaiſſé. Or, ce n'eſt pas un défaut au calcul, de fournir dans le cas en queſtion deux valeurs poſitives pour le ſinus de l'angle horaire de ces aſtres. Le calcul roule ſur la ſuppoſition que deux aſtres ſont dans un même vertical, on laiſſe à l'écart la conſidération de leur hauteur. Il n'importe donc pour la juſteſſe du réſultat du calcul, que la hauteur de l'aſtre dont on cherche l'angle horaire, ſoit poſitive ou négative, c'eſt-à-dire, qu'il ſoit au-deſſus ou au-deſſous de l'horiſon : il ſuffit, pour avoir deux valeurs poſitives de l'angle horaire d'un aſtre, qu'il ſoit de même part du méridien au moment de ſes deux rencontres avec un autre aſtre à un même vertical. C'eſt ſeulement par la nature des obſervations que le ſervice de la formule qui contient cette double valeur poſitive eſt limité.

Au lieu de former une équation pour le ſinus de l'angle horaire de l'un des aſtres, on pourroit en faire une pour le coſinus de cet angle, & l'on ſeroit pareillement obligé d'entrer dans de certaines diſcuſſions, pour faire un bon choix entre les deux valeurs qu'on trouveroit pour ce coſinus.

III. L'équation pour t ne ſe borne pas aux cas où les deux aſtres ſont de même part du zénith (cas qui ſont les ſeuls qui puiſſent être obſervés à l'aide d'un ſimple fil à plomb), elle embraſſe ceux-mêmes où les deux aſtres ſont de différens côtés de ce point. C'eſt pourquoi je propoſerai dans la ſuite un moyen d'obſerver des aſtres ainſi diſpoſés à leur rencontre à un même vertical. Si ce moyen (ou quelqu'autre de même fin) eſt mis en uſage, il faudra prendre garde que la différence des deux aſtres en aſcenſion droite, pourra alors être plus grande que 90 degrés,

& que le cosinus b de cette différence, deviendra dans ce cas une quantité négative, ce qui obligera à changer les signes des termes où elle se trouvera linéaire.

IV. Le Probleme dont il s'agit, étant un des plus utiles par la qualité de l'observation qu'il suppose; mais conduisant, par la solution algébrique & directe qu'on vient d'en voir, à un calcul fort compliqué pour la pratique, je donnerai dans la suite un moyen indirect de le résoudre, qui sera assez simple, certaines Tables, qui auront plus d'un usage, étant une fois faites.

V. Il n'est pas nécessaire pour le Probleme proposé, que les deux astres aient été vûs dans un même vertical au même moment; c'est la même solution, si ces astres ont passé par certain vertical en momens différens, pourvû qu'on connoisse le tems écoulé entre ces passages. Alors a dans la formule, ne marquera pas simplement le sinus de la différence d'ascension droite des deux astres, mais il marquera le sinus de la somme ou de la différence de l'angle du tems écoulé entre les deux observations, & de celui qui répond à la différence d'ascension droite des deux astres. (J'ai spécifié au Probleme second, en quel cas il faut prendre la somme de ces angles, & en quel cas il faut prendre leur différence. C'est une regle générale pour toutes les observations qui ne sont pas contemporaines.)

COROLLAIRE I. On peut observer le tems écoulé entre les deux passages d'un même astre par le même vertical; & nommant $o = r \mp b$, le sinus verse de l'angle de ce tems, on aura:

$$2orccXXtt - 2orracsXt = rraaccXX - r^4aass,$$

$$\& \ t = \frac{ras \pm ra}{2cX} \sqrt{\left(ss + \frac{2ccXX - rrss}{or} \right)}.$$

COROLLAIRE II. Si (E), l'un des deux astres E, E',

vûs dans un même vertical, est dans l'équateur, on aura $t = \frac{ras}{cX'}$, ou (en prenant $S = \frac{rs}{c}$ pour la tangente de la hauteur du pole), $t = \frac{aS}{X'}$.

COROLLAIRE III. Si la différence d'ascension droite des deux astres vûs dans un même vertical, est nulle, ou de 180 dégrés, ce qui rend $a = 0$, on a aussi $t = 0$; c'est-à-dire, que les deux astres sont au méridien. Ce cas est celui du Probleme XXVII de l'Astronomie Nautique.

PROBLEME VIII.

La hauteur du pole étant connue, & le tems écoulé entre les passages de deux astres au même almicantarath étant aussi connu, ainsi que les déclinaisons & les ascensions droites de ces astres, trouver l'heure des observations.

(Ce Probleme est l'inverse du XXIXe de l'Astronomie Nautique, qui consiste à trouver la hauteur du pole, connoissant l'heure à laquelle on voit dans un même almicantarath, deux astres, &c.)

Soient, comme ci-dessus, a & b le sinus & le cosinus de la somme, ou de la différence de l'angle du tems écoulé entre les observations, & de celui auquel répond la différence d'ascension droite des deux astres. La premiere formule du premier Lemme, donne pour le cas où les astres sont au-dessus de l'équateur, & du cercle de six heures, $rsx + cyu = rrh = rsx' + cy'u'$; on a donc $rsx - rsx' + cyu = cy'u'$, en supposant que x' est moindre que x. Soit donc que les deux astres soient de même part du méridien, ce qui est le cas de la *Fig.* 8, soit qu'ils soient de différens côtés de ce cercle, & dans le cas de la *Fig.* 7, on a, par le second Lemme, $u' = bu + a\sqrt{(rr - uu)}$, donc

rrs

$rrs(x-x')+rcyu-bcy'u=acy'\sqrt{(rr-uu)}$: quarrant chaque membre, & fubftituant rr à $aa+bb$ on a,

$$\left.\begin{matrix} +rrccyy \\ -2brccyy' \\ +rrccy'y' \end{matrix}\right\} uu \left.\begin{matrix} +2r^3scy(x-x') \\ -2br^2scy'(x-x') \end{matrix}\right\} u = \left\{\begin{matrix} +rraaccy'y' \\ -r^4ss(x-x')^2. \end{matrix}\right.$$

Prenant $A=rcc(ryy-2byy'+ry'y')$, $B=rsc(-ry+by')(x-x')$, & $C=aaccyy-rrss(x-x')^2$, on aura,

$$u=\frac{rB}{A}\pm\frac{r}{A}\sqrt{(BB+AC)}.$$

SCHOLIE. On comprend fans doute, que fi quelqu'une ou plufieurs des quantités b, x, x' font de qualité contraire à celle qui a été fuppofée dans le calcul précédent, il faut changer les fignes des termes où elles fe rencontrent, ainfi qu'il a été expliqué fous le Probleme fecond.

Nous avons deux valeurs pour u, & cela fait voir que fi deux aftres paffent à un même almicantarath en même moment, ou avec certain tems d'intervalle, il y a quelqu'autre almicantarath où ces aftres fe rencontreront en même moment, ou pafferont avec le même tems d'intervalle. Or, les deux valeurs de u peuvent non-feulement être l'une pofitive, & l'autre négative, mais auffi toutes deux pofitives; & dans ce cas, il y a un choix à faire, lequel exige certaines attentions. Je fuppofe, pour être plus court, que les deux aftres ont paffé au même almicantarath au même inftant. Soient ici PE, PE' les complémens des déclinaifons des deux aftres E, E'; foit EQE' l'arc de grand cercle de la fphere qui joint ces deux aftres, & PQ un autre arc de grand cercle, qui paffe par le pole, & par le milieu de EQE'. Si PQ eft plus grand que le complément de la hauteur du pole, le point Q, mitoyen entre les deux aftres, fe trouvera de même part du méridien Fig. 40.

aux deux rencontres des deux astres à un même almicantarath, mais il sera de différens côtés du premier vertical. Si ce point a été, au moment de l'observation, du côté du premier vertical où est le pole élevé, & que les deux racines de l'équation soient positives, c'est la moindre de ces racines qui est la vraie valeur de *u*. Si au contraire le point *Q* a été de l'autre côté du premier vertical au tems de l'observation, c'est la plus grande des deux racines qui convient à ce tems.

Si *PQ* est moindre que le complément de la hauteur du pole, le point *Q*, mitoyen entre les deux astres, sera du côté du premier vertical où est le pole élevé, & de différens côtés du méridien, aux deux rencontres des astres à un même almicantarath. Dans ce cas, il faut considérer lequel des deux astres est le plus près du méridien au tems de l'observation. Si c'est le plus voisin du pole qui soit aussi le plus proche du méridien, & que l'on ait deux racines positives, c'est la plus grande de ces racines qui est la vraie valeur de *u* pour ce tems (quel que soit celui des deux astres auquel appartienne *u*) : que si c'est l'astre le plus éloigné du pole qui est le moins éloigné du méridien au moment de l'observation, c'est la moindre des racines qui est valeur de *u* à ce moment.

On trouvera dans la suite, un moyen de faire un calcul plus simple pour ce Probleme, dans le cas où les deux astres passent en même moment au même almicantarath, & de discerner plus facilement la quantité qui fait connoître l'heure de l'observation.

Remarque. On trouve l'heure dans les deux Probl. précédens, par la supposition que la différence de hauteur de deux astres est zéro, soit en même tems, soit en des momens dont l'intervalle est connu, ou par la supposition que l'angle des azymuths de deux astres est pareille-

ment zéro, ſoit en même tems, ſoit en des momens dont l'intervalle eſt connu. On peut donc juger que la différence de hauteur de deux aſtres, ou bien l'angle de leurs azymuths, ſont des élémens propres (au moins ſpéculativement) à faire découvrir l'heure par leur combinaiſon avec quelqu'autre élément. C'eſt ce qui eſt vrai en effet, & j'en vais donner un exemple dans les deux Problemes ſuivans, qui ſont plutôt de théorie que de pratique.

PROBLEME IX.

La hauteur du pole étant connue, & l'angle des azymuths où ſont deux aſtres, en des momens dont l'intervalle eſt connu, étant donné, ainſi que les déclinaiſons & les aſcenſions droites de ces aſtres, trouver l'heure de l'une des obſervations.

Soit g le ſinus de l'angle des azymuths des deux aſtres, γ ſon coſinus, a le ſinus de la ſomme, ou de la différence de l'angle du tems écoulé entre les obſervations, & de celui qui répond à la différence des deux aſtres en aſcenſion droite; b le coſinus de cette ſomme ou de cette différence; X, X' les tangentes des déclinaiſons des deux aſtres; m, m' les ſinus de leurs angles azymuthaux, &c.

La troiſieme formule du premier Lemme donne, $n = \frac{m}{rt}(su - cX)$, & $nn = rr - mm = \frac{mm}{rrtt}(su - cX)^2$ $= \frac{(rr - nn)}{rrtt}(su - cX)^2$; donc $n = \frac{r(su - cX)}{\sqrt{(rrtt + (su - cX)^2)}}$, & $m = \frac{r^2 t}{\sqrt{(rrtt + (su - cX)^2)}}$. Par la même raiſon, m' $= \frac{r^2 t'}{\sqrt{(rrt't' + (su' - cX')^2)}}$. Or par le ſecond Lemme, on a $rm' = ym + gn$; ſubſtituant dans cette égalité, les valeurs qu'on vient de voir, de m', m, n, on en aura une

où il ne reftera d'inconnues que t', u', t, u. On pourra chaffer les deux premieres, en prenant leurs valeurs dans les égalités $rt' = bt - au$, $ru' = bu + at$, &c.

PROBLEME X.

La hauteur du pole étant connue, & la différence des hauteurs où font deux aftres en des momens dont l'intervalle eft connu, étant donnée, &c. trouver l'heure de l'une des obfervations.

Soit f le finus de la différence des deux hauteurs h, h'; l fon cofinus, &c. On a, par la premiere formule, $h' = \frac{cy'u' + rsx'}{rr}$, $h = \frac{cyu + rsx}{rr}$, $k = \sqrt{(rr - hh)} = \frac{1}{rr} \sqrt{(r^6 - (cyu + rsx)^2)}$. Subftituant ces valeurs de h', h, k, dans l'égalité $rh' = lh - fk$, que fournit le fecond Lemme, on aura $rcy'u' + rrsx' - lcyu - rlsx = f\sqrt{(r^6 - (cyu + rsx)^2)}$, où il faut fubftituer la valeur de ru', que fournit encore le fecond Lemme, &c.



CHAPITRE III.

Suite des moyens de trouver l'heure, concuremment avec la hauteur du Pole.

L'UNE des especes d'élémens employées dans les Problemes VII & VIII, peut être prise deux fois, ou être combinée, soit avec l'autre, soit avec un des élémens employés dans les Problemes IX & X, &c. & cela donne autant de moyens de trouver l'heure, concurremment avec la hauteur du pole. Il nous reste donc quantité de Problemes pour ce Chapitre : mais il suffira de résoudre les plus avantageux, & d'indiquer les autres.

PROBLEME. XI.

Connoissant les déclinaisons & les ascensions droites de quatre astres E, E′, ε, ε′, *& l'intervalle de tems entre les momens où* E *se trouve dans un même vertical avec* E′, *& où* ε *se trouve dans un même vertical avec* ε′, *trouver l'heure de l'une des observations (& la hauteur du pole.)*

(Ce Probleme est une extension du XXX[e] de l'Astronomie Nautique, où l'on ne suppose que trois astres, mais il ne demande pas un autre calcul.)

Soient les tangentes des déclinaisons des quatre astres X, X', ξ, ξ'; les sinus & cosinus des angles horaires du premier & du second, t, t', u, u'; les sinus & cosinus des angles horaires du troisieme & du quatrieme θ, θ', v, v'; p & q, les sinus & les cosinus de la somme, ou de la différence de l'angle du tems écoulé entre les observations

des aſtres E, $^{\epsilon}$, & de l'angle qui répond à leur différence d'aſcenſion droite ; a & b le ſinus & le coſinus de la différence d'aſcenſion droite, des aſtres E, E' ; a', b', le ſinus & le coſinus de la différence d'aſcenſion droite des deux autres aſtres. (Si E & E' ne ſe trouvent pas au même inſtant au même vertical, a & b doivent être les ſinus & coſinus de la ſomme ou de la différence de l'angle du tems écoulé entre leurs paſſages, & de celui qui répond à leur différence d'aſcenſion droite. Il faut entendre le même pour a' & b', ſi, &c.)

Je ſuppoſe que les quatre aſtres déclinent tous du côté du pole élevé, que les angles dont p, a, a' ſont les ſinus, ſont tous aigus, &c. On aura, par la troiſieme formule du premier Lemme $\frac{su - cX}{t} = \frac{rn}{m} = \frac{su' - cX'}{t'}$, $\frac{sv - c\xi}{\theta} = \frac{rn'}{m'} = \frac{sv' - c\xi'}{\theta'}$, & par conſéquent $su't - sut' = cX't - cXt'$, $sv'\theta - sv\theta' = c\xi'\theta - c\xi\theta'$, ou $\frac{X't - Xt'}{u't - ut'} = \frac{s}{c} = \frac{\xi'\theta - \xi\theta'}{v'\theta - v\theta'}$, ou (parce que $ra = u't - ut'$, & $ra' = v'\theta - v\theta'$ par le ſecond Lemme) $\frac{X't - Xt'}{a} = \frac{\xi'\theta - \xi\theta'}{a'}$, ou $a'X't - a'Xt' = a\xi'\theta - a\xi\theta'$, ou (à cauſe de $rt' = bt - au$, & de $r\theta' = b'\theta - a'v$), $a'bXt - a'aXu - ra'X't = ab'\xi\theta - aa'\xi v - ra\xi'\theta$. Mais l'angle horaire, dont θ eſt le ſinus, étant ſuppoſé moindre que celui auquel appartient t; & v étant par conſéquent $> u$, on a, par le ſecond Lemme, & par la ſuppoſition que p appartient à un angle aigu, cas de la *Fig.* 8 ; $r\theta = qt - pu$, $rv = qu + pt$; & mettant les valeurs de θ & de v dans l'équation précédente, on trouve pour la cotangente de l'angle horaire du premier aſtre,

$$\frac{ru}{t} = r\left(\frac{ra'bX - rra'X' - ab'q\xi + a'ap\xi + raq\xi'}{ra'aX - a'aq\xi - ab'p\xi + rap\xi'}\right).$$

Mais si l'on suppose que $\theta > t$, & que $v < u$, par conséquent, ce qui est le cas de la *Fig.* 5, on aura $r\theta = qt + pu$, $rv = qu - pt$, & on trouvera pour cotangente de l'angle désiré :

$$\frac{ru}{t} = r\left(\frac{ra'bX - rra'X' - ab'q\xi - a'ap\xi + raq\xi'}{ra'aX - a'aq\xi + ab'p\xi - rap\xi'}\right).$$

Et si l'on suppose qu'on soit dans le cas de la *Fig.* 7, on aura $r\theta = -qt + pu$, $rv = qu + pt$, & on trouvera,

$$\frac{ru}{t} = r\left(\frac{ra'bX - rra'X' + ab'q\xi + a'ap\xi - raq\xi'}{ra'aX - a'aq\xi + ab'p\xi - rap\xi'}\right).$$

(Ayant trouvé l'angle horaire du premier astre, on a aussi l'angle horaire du second, par l'équation $rt' = bt - au$, supposée ci-dessus, & la hauteur du pole, en substituant les valeurs de t & de t', dans l'équation $\frac{s}{c} = \frac{X't - Xt'}{ar}$).

SCHOLIE I. *Ce Probleme*, au témoignage de M. de Maupertuis, *peut être d'une grande utilité sur terre & sur mer, parce qu'il n'y a point d'observation plus facile ni plus sûre, que celle du passage des astres par un vertical, & qu'on évite ici entierement l'effet de la réfraction, qui apporte tant de troubles aux autres observations* : mais on doit reconnoître aussi, qu'il exige une grande attention aux circonstances des observations, quand on y procede algébriquement, pour donner les signes convenables à chacun des neuf termes dont est composée la fraction qui est la valeur de la cotangente de l'angle horaire désiré. J'ai supposé que tous les astres étoient, non-seulement au-dessus de l'équateur, mais aussi au-dessus du cercle de six heures ; que t outre cela étoit plus grand que t', & θ plus grand que θ' ; enfin, que p appartenoit à un angle aigu : & après tout cela, il reste encore lieu à trois différences

de circonſtances [dont la premiere eſt la ſeule à laquelle on ait eu égard dans l'Aſtronomie Nautique]. J'ai eu quelque envie de parcourir tous les cas poſſibles, & de les réduire ſous autant de chefs, qu'il peut y avoir d'états différens pour la formule précédente, en ſuppoſant que tous les aſtres déclinent du côté du pole élevé, en ſorte qu'il n'y eût à changer dans ces formules particulieres, que les ſignes de l'une ou de pluſieurs des tangentes X, X', ξ, ξ', au cas qu'un ou pluſieurs des aſtres obſervés, déclinaſſent du côté du pole abbaiſſé ; mais j'ai craint que ce détail ne fût trop long (je le donnerai pourtant, ſi on le ſouhaite), & j'ai penſé qu'un Navigateur, avec une médiocre teinture d'algebre, pourroit bien conſtruire, ſur le modele des formules précédentes, celles dont il aura beſoin dans l'occaſion. Son opération n'en ſera que plus ſûre, & je ne ſçai ſi on devroit compter ſur celle que feroit un autre Navigateur d'après une formule choiſie entre pluſieurs qu'il trouveroit toutes conſtruites dans un livre. Il n'eſt pas particulier à la Trigonométrie, avouons-le avec franchiſe (& j'ai quelque droit de le dire, après les remarques faites ſur les Problemes II, VII & VIII ci-deſſus), il n'eſt pas particulier, dis-je, à la Trigonométrie, de donner *des regles dont l'origine peut n'être gueres préſente à l'eſprit d'une partie de ceux qui s'ingerent de les pratiquer, & dont l'application eſt ſouvent ambigue pour certains génies.* Il y a des écueils en plus d'une plage, & un homme pourroit

Incidere in Scyllam cupiens vitare Charibdim.

Heureux le genre humain, s'il y avoit des arts dont les préceptes puſſent être *contenus dans quelques lignes*, & ne laiſſaſſent lieu à aucune mépriſe dans leur application.

II.

II. Outre l'embarras du choix des fignes qui doivent être employés dans la formule ci-deffus, ou dans les égalités fur lefquelles on en conftruiroit d'autres, il eft à remarquer qu'elle conduit à un calcul affez compliqué, & peu commode, par conféquent, en pratique. C'eft pourquoi j'indiquerai dans la fuire une autre folution pour ce Probleme, folution qui fera plus fimple, & moins fujette à embarras.

III. On pourroit (comme a fait M. de Maupertuis) ne fuppofer que trois aftres, en prenant E & ε pour le même, ce qui rendroit ξ la même chofe que X; mais il faut dans ce cas, qu'il y ait certain intervalle de tems entre les paffages de cet aftre aux deux verticaux, où il doit fe rencontrer avec chacun des deux autres aftres. Or, cela eft à la vérité indifférent fur terre, mais il n'en eft pas de même fur mer; il eft à fouhaiter que toutes les obfervations que requiert une recherche Nautique, foient contemporaines, ou faites en des momens peu éloignés. Or, en prenant quatre aftres, les deux paffages de ces deux paires d'aftres à deux verticaux, peuvent fe rencontrer au même inftant, ou en des inftans fi voifins, que le déplacement du vaiffeau dans leur intervalle foit de très-petite conféquence. On peut encore fur terre ne prendre que deux aftres pour le Probleme dont il s'agit.

IV. (Ceci regarde la recherche de la hauteur du pole. Si $a = o$, c'eft-à-dire, fi le vertical où deux aftres ont été obfervés, eft le méridien, on a $t = o$, & $\theta = p$, & $v = q$. Mettant ces valeurs de θ & v dans l'égalité que fournit le fecond Lemme pour θ', puis fubftituant les valeurs de θ & θ' dans l'équation $\frac{s}{c} = \frac{\xi'\theta - \xi\theta'}{a'}$, on aura ainfi la tangente de la hauteur du pole, que l'autre équation pour $\frac{s}{c}$ ne peut donner, parce que tous les termes y font zéro.)

PROBLEME XII.

Connoiſſant les déclinaiſons & les aſcenſions droites de quatre aſtres E, E′, ε, ε', *& le tems écoulé entre les momens où* E *ſe trouve dans un même almicantarath avec* E′, *& où* ε *ſe trouve dans un même almicantarath avec* ε', *trouver l'heure de l'une des obſervations*, (*& la hauteur du pole.*).

Soient z, z', i, i' les ſinus & coſinus des déclinaiſons des aſtres ε, ε', & le reſte comme ci-deſſus, on a en certains cas, par la premiere formule du premier Lemme, $rsx + cyu = rrh = rsx' + cy'u'$; & $rsz + civ, = rrh' = rsz' + ci'v'$, par conſéquent $\frac{y'u' - yu}{x - x'} = \frac{rs}{c} = \frac{i'v' - iv}{z - z'}$, ou (mettant pour abréger z pour $x - x'$, ζ pour $z - z'$) $\zeta y'u' - \zeta yu = zi'v' - ziv$; or en certains cas, on a $ru' = bu - at$, & $rv' = b'v - a'\theta$. Mettant les valeurs de u' & de v', tirées de ces deux égalités, dans la précédente on a

$$\zeta y'bu - \zeta yat - r\zeta yu = b'zi'v - a'zi'\theta - rziv.$$

Or en certain cas, on a $r\theta = qt - pu$, & $rv = qu + pt$; mettant donc les valeurs de θ & v dans l'équation précédente, on trouve pour la tangente de l'angle horaire du premier aſtre,

$$\frac{rt}{u} = \left(r \left(\frac{rr\zeta y - rb\zeta y' - rqzi - a'pzi' + b'qzi'}{- ra\zeta y + rpzi + a'qzi' - b'pzi'} \right) \right).$$

(Ayant trouvé l'angle horaire du premier aſtre, on a auſſi l'angle horaire du ſecond, par l'équation $ru' = qu - pt$, ou telle autre qui conviendra, & la hauteur du pole en ſubſtituant les valeurs de u & de u', dans l'équation $\frac{rs}{c} = \frac{y'u' - yu}{x - x'}$).

SCHOLIE. La plûpart des remarques faites ſur le Probleme précédent, conviennent à celui-ci.

PROBLEME XIII.

Connoiſſant les déclinaiſons & les aſcenſions droites de quatre aſtres E, E′, ε, ε', *& le tems écoulé entre les momens où* E *ſe trouve dans un même vertical avec* E′, *& où* ε *ſe trouve dans un même almicantarath avec* ε', *trouver l'heure de l'une des obſervations, (& la hauteur du pole.)*

On a en certains cas, par la premiere formule du premier Lemme,

$$rsx + civ = rrh' = rsx' + ci'v', \text{ donc } \frac{rs}{c} = \frac{i'v' - iv}{\zeta}.$$

Et par la troiſieme formule du même Lemme,

$$\frac{su - cX}{t} = \frac{rn}{m} = \frac{su' - cX'}{t'}, \text{ donc } \frac{rs}{c} = r\left(\frac{X't - Xt'}{u't - ut'}\right) = \frac{X't - Xt'}{a},$$

donc $ai'v' - aiv = \zeta X't - \zeta Xt'$. Or, on a en certains cas, par le ſecond Lemme, $rv' = b'v - a'\theta$, & $rt' = b't - a'u$. Mettant les valeurs de v' & de t', tirées de ces égalités dans la précédente, on a

$$ab'i'v - aa'i'\theta - raiv = r\zeta X't - b\zeta Xt + a\zeta Xu;$$

& ſubſtituant dans cette équation les valeurs de θ & v, que fournit le ſecond Lemme en certain cas ($r\theta = qt - pu$, $rv = qu + pt$), on trouve pour la cotangente de l'angle horaire du premier aſtre,

$$\frac{ru}{t} = r\left(\frac{rb\zeta X - rr\zeta X' - rapi - aa'qi' + ab'pi'}{ra\zeta X + raqi - aa'pi' - ab'qi'}\right).$$

(Ayant trouvé l'angle horaire du premier aſtre, on a auſſi celui du ſecond, & l'on en déduit la hauteur du pole, comme dans le Probl. XI.)

SCHOLIE. Ce Probleme peut être d'une utilité

presque aussi grande que le XIe, au moins sur terre, parce qu'on évite entierement l'effet de la réfraction dans l'une des observations, & que dans l'autre on n'est exposé qu'à la petite irrégularité qui peut provenir, dans la réfraction, de la diversité de constitution de l'atmosphere en différens verticaux. D'un autre côté, ce Probleme a quelque avantage sur l'onzieme, même pour les besoins nautiques, parce que trois astres peuvent absolument y suffire, celui que l'on observe dans un même vertical avec un second, pouvant se rencontrer dans un même almicantarath avec un troisieme au même instant, ou dans un tems peu éloigné. Pareil avantage se trouve dans le Probleme précédent : trois astres vûs ensemble au même almicantarath, ou vûs, le premier avec le second, & le premier avec le troisieme dans des almicantaraths fort voisins, y suffisent parfaitement, si ces astres sont à certaines distances, & deux paires d'astres y conviendroient moins, si elles étoient l'une au-dessus de l'autre, ou à peu près. On verra dans la Partie suivante, le fondement de ces remarques : le reste de celles qui ont été faites sur le Probl. XI, convient encore à celui-ci.

PROBLEME XIV.

Connoissant les déclinaisons & les ascensions droites de trois astres, E, E′, ε, & le tems écoulé entre le moment où les deux premiers se trouvent dans un même vertical, & celui où l'on a observé la hauteur du troisieme, trouver l'heure de l'une des observations (& la hauteur du pole).

Je cherche en premier lieu la hauteur du pole. Outre les dénominations employées ci-dessus, soient p' & q' le sinus & le cosinus de la somme ou de la différence de l'angle du tems écoulé entre les observations des astres E', ε, &

de la différence de ces aftres en afcenfion droite.

On a en certains cas, par la troifieme formule du premier Lemme $su't - sut' = cX't - cXt'$, ou $ras = cX't - cXt'$, ou 1° (à caufe de $rt' = bt - au$), $rras = rcX't - bcXt + acXu$. 2°. On a d'ailleurs par le fecond Lemme $rv = q'u' - p't'$, ou $\frac{rv + p't'}{q'} = u' = \frac{bu - at}{r}$, donc $rp't' = bq'u - aq't - rrv$, & $t' = \frac{bq'u - aq't - rrv}{rp'}$. Subftituant cette deuxieme valeur de t' dans l'égalité $ras = cX't - cXt'$, on a $rrp'as = rp'cX't + aq'cXt + rrcXv - bq'cXu$. Or, on a encore par le fecond Lemme, $rv = qu - pt$, ou $\frac{rv + pt}{q} = u$. Subftituant cette valeur de u dans les deux égalités où entre ce cofinus, on a $rrqas - racXv = ct(rqX' - bqX + apX)$, & $rrp'qas - rrqcXv + rq'bcXv = ct(rp'qX' + aqq'X - bpq'X)$, ou

$$\frac{rp'qas - rqcXv + q'bcXv}{rp'qX' + aqq'X - bpq'X} = \frac{ct}{r} = \frac{rrqas - racXv}{rrqX' - rbqX + rapX};$$

ou en mettant, afin d'abréger, A au lieu du dénominateur de la premiere fraction, & B au lieu de celui de la deuxieme,

$Brp'qas - BrqcXv + Bq'bcXv = Arrqas - AracXv$, ou $(AraX + Bq'bX - BrqX)\,cv = (Araq - Bp'aq)\,rs$, ou, en mettant C pour la quantité qui multiplie cv, & D pour celle qui multiplie rs, $\frac{Drs}{C} = cv = \frac{rrh - rsx}{i}$, par la formule premiere du premier Lemme, donc $iDs + xCs = rhC$, & $s = \frac{rhC}{iD + xC}$.

Ayant trouvé la hauteur du pole, on aura l'angle horaire de l'aftre s, par l'équation $v = \frac{rrh - rsx}{ci}$.

SCHOLIES. I. On doit voir que la formule de ce Probleme est susceptible de divers signes, de même que celles des Problemes précédens.

II. La méthode de ce Probleme est aisée à appliquer à celui où l'on auroit l'observation de deux astres à un même almicantarath, combinée avec l'observation de la hauteur d'un troisieme astre.

III. La solution que je viens de donner, conduiroit à un calcul compliqué & pénible pour la pratique : c'est pourquoi j'en proposerai une autre dans la Partie suivante.

PROBLEME XV.

Connoissant les déclinaisons & les ascensions droites de trois astres, E, E', ε, *& l'angle compris entre le vertical, où les deux premiers se trouvent en certain moment, & le vertical du troisieme astre, trouver l'heure, (& la hauteur du pole.)*

REMARQUE. Au défaut de l'une des observations nécessaires, au XI ou au XIIIe Probl. celui-ci peut, si je ne me trompe, être utile sur mer, parce que l'on évite l'effet de la réfraction dans les observations qu'il suppose, & que ces observations n'exigent pas que l'horison soit découvert, ou ne l'exigent pas plus qu'aucune autre espece d'observation. Celle de l'angle compris entre deux azymuths, est sans doute la plus difficile, ou bien la moins sûre des deux dont il s'agit : mais elle est peut-être susceptible d'une exactitude suffisante, surtout si l'astre solitaire dans son azymuth, est fort bas, & l'un des deux autres aussi ; d'ailleurs je ne la propose que pour servir au défaut de toute autre qu'on jugera plus sûre. De plus, cette espece d'observation n'est pas une chose nouvelle & inusitée sur mer ; on y cherche la déclinaison de la boussole, & il faut, pour la trouver, observer l'angle de l'azymuth

de quelque aſtre, & de l'un des azymuths de la bouſſole, &c. Au reſte, la ſolution de ce Probleme, par la méthode genérale ſuivie juſqu'ici, ſeroit trop compliquée pour être miſe en pratique : ainſi je la laiſſe, & me réſerve d'en donner une plus commode dans la ſuite. Je laiſſe pareillement ici ſans ſolution, le Probleme ſuivant.

PROBLEME XVI.

Connoiſſant les déclinaiſons & les aſcenſions droites de deux aſtres, E, E', & l'angle compris entre leurs azymuths au moment où ils ſont dans un même almicantarath; trouver l'heure, (& la hauteur du pole).

REMARQUE. Il reſte quelques autres combinaiſons d'hypotheſes, dans leſquelles l'heure & la hauteur du pole ſe trouvent déterminées, combinaiſons que j'ai déja indiquées en général, & qu'il n'eſt pas difficile d'imaginer, après celles qu'on a vûes : mais je m'abſtiens d'en faire le détail, ſoit parce qu'elles ſont moins avantageuſes que les précédentes, ſoit parce qu'il ne ſera pas difficile à ceux qui pourroient le ſouhaiter, de réſoudre quelques-uns de ces cas, par les voies qui ſeront employées dans la Partie ſuivante. Je finis celle-ci par la ſolution d'un Probleme qui peut avoir ſon utilité, au défaut des précédens, en ce que l'on y évite une partie des mauvais effets de la réfraction en certains cas.



PROBLEME XVII.

La hauteur d'un astre E, *& l'angle de son azymuth avec celui d'un autre astre* E′ *étant donnés, ainsi que le tems écoulé entre les deux observations, &c. trouver l'heure, (& la hauteur du pole).*

REMARQUE. Si on vouloit résoudre ce Probleme directement, on tomberoit dans une équation du quatrieme degré pour le moins : mais l'on peut y procéder indirectement, & l'opération en sera plus simple, quoiqu'elle renferme un circuit. Ce procedé consiste à chercher d'abord la hauteur du second astre : cette hauteur étant découverte, on est dans le cas du Probleme II. J'ai dit que celui-ci peut être utile en certain cas, & cela est aisé à montrer maintenant. Car si (E') l'un des deux astres qui se présentent à un Observateur, est fort bas, il sera peu sûr d'observer sa hauteur, à cause de l'irrégularité de la réfraction que souffrent les rayons très-inclinés à l'horison : ainsi il vaudra mieux prendre seulement la hauteur de l'astre (E) le plus élevé des deux, & conclurre la hauteur de l'autre, de l'observation de l'angle de son azymuth, & de l'azymuth de l'astre plus élevé (je suppose que cette espece d'observation soit par elle-même aussi juste que celle de la hauteur) : car la hauteur conclue ne se ressentira du côté de la réfraction, que du même degré d'erreur que cette cause peut jetter sur la hauteur observée.

Voici la maniere de trouver la hauteur du second astre. Je suppose que la distance des deux astres est connue, & je nomme δ le cosinus de cette distance : cela posé, j'observe que l'on est dans le même cas pour découvrir la hauteur de l'astre E', que celui où l'on est pour découvrir la

hauteur

hauteur du pole Ph, *Fig.* 40, lorſque la déclinaiſon d'un aſtre a (dont le complément eſt Pa), ſa hauteur am, & mZh ſon angle azymuthal ſont donnés : car nous avons de même, *Fig.* 41, EE' diſtance des deux aſtres; EM hauteur de l'un d'eux; MZM' angle des deux verticaux; ZEM, $ZE'M'$ où ils ſont ſitués, & nous cherchons $E'M'$ (dont je nomme le ſinus h', & le coſinus k').

Je prends donc la deuxieme formule du premier Lemme dans l'état $rrx + nck = rsh$ (ou dans tel autre qui conviendra à la queſtion), & j'y ſubſtitue δ, coſinus de EE', au lieu de x, coſinus de aP; h' & k', ſinus & coſinus de $E'M'$, au lieu de s & c, ſinus & coſinus de Ph; γ, coſinus de l'angle MZM' au lieu de n, coſinus de l'angle mZh; & j'y laiſſe h, k, qui ſont ſinus & coſinus de am, pour ſinus & coſinus de EM. J'ai donc $rr\delta - \gamma k'k = rh'h$; ou bien $rr\delta - rh'h = \gamma k'k$; & après avoir élevé chaque membre au quarré, & ſubſtitué $rr - h'h'$ à $k'k'$, je trouve l'équation

$$\left.\begin{matrix} rrhh \\ \gamma\gamma kk \end{matrix}\right\} h'h' - 2r^3\delta hh' = rr\gamma\gamma kk - r^4\delta\delta.$$

Prenant $A = rrhh + \gamma\gamma kk$, $B = rr\delta h$, $C = \gamma\gamma kk - rr\delta\delta$, on a,

$$h' = \frac{r.B}{A} \pm \frac{r}{A}\sqrt{(BB + AC.)}$$

Et c'eſt la moindre de ces racines qui eſt valeur du ſinus de $E'M'$, dans la ſuppoſition que $E'M'$ eſt plus petite que EM.

J'ai ſuppoſé que la diſtance des deux aſtres étoit connue. Voici une maniere de la déduire de leurs déclinaiſons, & leur différence d'aſcenſion droite : nous ſommes en même ſituation pour découvrir cette diſtance, que celle où l'on eſt pour découvrir la déclinaiſon d'un aſtre a (de laquelle Pa eſt complément), *Fig.* 43, lorſque la

hauteur du pole Ph, la hauteur am de cet astre, & son angle azymuthal mZh sont donnés : car P étant le pole dans la *Fig.* 44, toute semblable à la 43, & $e\,e'$ l'équateur, nous y avons pareillement EE' & Ee distances des astres à l'équateur, & ePe', angle des méridiens où ils sont situés, & nous cherchons EE', qui répond à aP dans la *Fig.* 43.

Je prends donc encore la deuxieme formule du premier Lemme $rrx = rsh - nck$, & j'y substitue encore δ, cosinus de EE', au lieu de x cosinus de aP; x & y, sinus & cosinus de Ee, au lieu de h & k, sinus & cosinus de am; x' & y', sinus & cosinus de $E'e'$, au lieu de s & c, sinus & cosinus de Ph; enfin, q cosinus de ePe', au lieu de n, cosinus de mZh, & j'ai $rr\delta = rxx' - qyy'$, ou bien, $\delta = \frac{rxx' - qyy'}{rr}$.



REMARQUES POUR LE PROBLEME XIV. *de l'Essai d'Horolepse Nautique, I. Partie.*

IL y a un changement à faire à cet article : la solution que j'y ai donnée est défectueuse. Son défaut consiste en ce que deux quantités fractionnaires, qui semblent composées d'élémens différens, mais qui se réduisent en effet à une même expression, y sont employées pour faire évanoüir une des inconnues, en sorte que tout se détruit par cette opération, & il ne reste que zéro divisé par zéro, pour valeur de l'inconnue qui paroît conservée. Voici quel a été le mauvais emploi. Après avoir formé l'égalité $rrqas - raXcv = (rqX' - bqX + apX)\,ct$, d'où j'ai déduit $\frac{rqas - aXcv}{rqX' - bqX + apX} = \frac{ct}{r}$, j'ai voulu avoir une autre valeur de $\frac{ct}{r}$, & j'ai cru l'obtenir, en formant une égalité où les élémens $p'q'$ se trouvassent. J'ai donc fait $rrp'qas + rXcv\,(bq' - rq) = (rp'qX' - bpq'X - aqq'X)$ ct; mais cette deuxieme égalité n'est autre chose que la premiere multipliée par p' dans tous ses termes : car on a, par le second Lemme, $rq = bq' + ap'$, ou bien, $bq' - rq = - ap'$; donc le terme $+ rXcv\,(bq' - rq)$ du premier membre de la deuxieme égalité, se réduit à $- rp'aXcv$, & l'on voit déja que tout ce membre ne differe du premier de la premiere égalité, qu'en ce qu'il est multiplié par p'. Il en est de même du second, car on a encore, par le second Lemme, $rp = bp' - aq'$, & (multipliant tout par q) $rqp = bp'q - aqq'$, puis (en substituant à rq sa valeur $bq' + ap'$), $bpq' + app' = bp'q$

$-aqq'$, ou enfin, $-bpq'X - aqq'X = bpqX - appX$.
Donc la partie $(-bpq'X - aqq'X)$ ct du second membre de la deuxieme égalité, se réduit à $(-bp'qX + ap'pX)$ ct, qui est la même chose que les termes $(-bqX + apX)$ ct de la premiere égalité multipliés par p', &c.

Ce vice foncier de ma solution, n'est pas le seul qui l'infecte, il en a entraîné un autre dans la forme, & celui-ci consiste en ce que l'inconnue s n'est que linéaire dans le résultat du calcul, au lieu qu'elle doit monter au second degré, comme on le verra dans la suite.

Dès le tems que je rédigeai ce mauvais calcul, j'en soupçonnai le défaut radical: mais je n'avois pas alors (à la fin d'Août) assez de tems pour le vérifier, & d'ailleurs je n'avois plus d'espérance d'en trouver un meilleur, lequel fût construit d'après les formules de l'Astronomie nautique. Ainsi je passai par-dessus mon scrupule, tant par l'espece de contrainte où j'étois, que parce que je me réservois, comme il est marqué dans la troisieme Scholie, de proposer une autre solution pour la pratique, & que je n'en voulois donner qui fût fondée sur ces Formules de M. de Maupertuis, que par forme de suite de la méthode employée jusques-là, & pour répondre au titre de ma premiere Partie.

Je n'espérois plus, dis-je, de parvenir à un meilleur calcul, fondé sur les formules de M. de Maup. cependant j'en ai construit un de cette qualité peu après, & je vais le rapporter. Voici la cause de ma méprise. Après une premiere tentative, qui n'étoit pas bonne, j'avois pris, vers le tems du commencement de mon travail, une autre voie dont je fus content, & qui est la même à laquelle je suis revenu; mais ne faisant mes préparatifs que sur des feuilles volantes, je me bornai à poser les fondemens du bon calcul. Quand il fut question, quelques semaines après,

d'achever cet article, je ne m'en rappellai pas assez distinctement les idées : je m'imaginai, je ne sçai comment, que ces opérations dont j'avois été satisfait, conduisoient à une équation du quatrieme dégré : je voyois d'ailleurs très-clairement, que l'inconnue de cette équation ne pouvoit avoir que deux valeurs ; je regardai donc ce procedé comme trop compliqué, & ne méritant gueres plus que ma premiere tentative, d'être suivi. Je m'en défiai tant que je l'abandonnai, sans le mettre à une épreuve complette, comme je l'aurois dû ; mais en évitant cette voie, & me fatiguant beaucoup pour en ouvrir une autre, je ne pûs que m'égarer, & affoiblir mon discernement.

Substitution à faire au Probleme XIV. de l'Essai, &c.

[Je conserve les mêmes dénominations employées dans cet article]. On a, comme au Probleme VII, $su't - sut' = cX't - cXt'$, ou (à cause de $ra = u't - ut'$), $ras = cX't - cXt'$. Or, en supposant que l'astre θ est observé au-dessus du cercle de six heures, & à une plus grande distance du méridien que chacun des deux autres, on a $rt = q\theta - pv$, $rt' = q'\theta - p'v$. Substituant donc les valeurs de t & t' dans l'égalité précédente, elle se change en $rras = qX'c\theta - pX'cv - q'Xc\theta + p'Xcv$, ou bien $rras + cv(pX' - p'X) = c\theta(qX' - q'X)$: quarrant chaque membre, on a $r^4aass + 2rrascv(pX' - p'X) + ccvv(pX' - p'X)^2 = cc\theta\theta(qX' - q'X)^2$. Or, par le §. I. du premier Lemme, $cv = \frac{rrh'' - rsz}{i}$, donc $ccvv = \frac{rr}{ii}(rh'' - sz)^2$, & ($\theta\theta$ étant $= rr - vv$, ou bien, $cc\theta\theta = rrcc - ccvv = r^4 - rrss - ccvv$), $cc\theta\theta = \frac{rr}{i}(rrii$

$-iiss=[rh-sz]^2$). Subſtituant donc les valeurs de cv, $ccvv$, & $cc^{\theta\theta}$ dans la derniere égalité, multipliant tout par ii, & diviſant par rr, on a d'abord:

$$\left.\begin{array}{l} rraaii \\ \mp 2raiz(pX'-p'X) \\ \pm zz\left\{\begin{array}{l} ppX'X' \\ -2pp'XX' \\ +p'p'XX \end{array}\right. \\ \pm zz\left\{\begin{array}{l} qqX'X' \\ -2qq'XX' \\ +q'q'XX \end{array}\right. \\ \pm ii(qX'-q'X)^2 \end{array}\right\} ss \left.\begin{array}{l} +2rrah''i(pX'-p'X) \\ -2rh''z\left\{\begin{array}{l} ppX'X' \\ -2pp'XX' \\ +p'p'XX \end{array}\right. \\ \\ -2rh''z\left\{\begin{array}{l} qqX'X' \\ -2qq'XX' \\ +q'q'XX \end{array}\right. \end{array}\right\} s \left.\begin{array}{l} +rrh''h''\left\{\begin{array}{l} ppX'X' \\ -2pp'XX' \\ +p'p'XX \end{array}\right. \\ \\ +rrh''h''\left\{\begin{array}{l} qqX'X' \\ -2qq'XX' \\ +q'q'XX \end{array}\right. \\ -rrii(qX'-q'X)^2 \end{array}\right\} = 0;$$

Et comme $pp-qq=rr$, ainſi que $p'p'+q'q'$, & que d'ailleurs, par le ſecond Lemme, $pp'+qq'=rb$, cette équation ſe réduit à

$$\left.\begin{array}{l} rraaii \\ \mp 2raiz(pX'-p'X) \\ \pm rzz(rXX-2bXX'+rX'X') \\ \pm ii(qX'-q'X)^2 \end{array}\right\} ss \left.\begin{array}{l} \pm 2rrah''i(pX'-p'X) \\ -2rrh''z(rXX-2bXX'+rX'X') \end{array}\right\} s$$

$$\left.\begin{array}{l} +r^3h''h''(rXX-2bXX'+rX'X') \\ \mp rrii(qX'-q'X)^2 \end{array}\right\} = 0.$$

SCHOLIE *pour le Probleme XVII. de la premiere Partie de l'Eſſai d'Horolepſe Nautique.*

LES deux opérations où je viens d'employer l'algebre, ſont de vraies réſolutions de triangles ſphériques obliquangles [nous avons en dernier lieu, les déclinaiſons & la différence d'aſcenſion droite de deux aſtres, c'eſt-à-dire, deux côtés d'un triangle ſphérique avec l'angle EPE', compris entre ces côtés, & nous cherchons la diſtance de ces aſtres, qui eſt le troiſieme côté

du triangle. Dans le cas précédent, nous avons la hauteur d'un aſtre E, ſa diſtance d'un autre aſtre E', & l'angle des azymuths de ces aſtres, c'eſt-à-dire, deux côtés d'un triangle ſphérique avec l'angle EZE', oppoſé à l'un de ces côtés, & nous cherchons la hauteur de l'aſtre E', qui eſt le complément du troiſiéme côté du triangle]; mais ces deux ſolutions ne ſont point ſemblables pour la commodité. La derniere eſt une équation linéaire, qui conduit à un calcul numérique aſſez facile; la précédente eſt une équation du ſecond dégré, qui, exigeant une extraction de racine, indique un calcul numérique pénible. Je ne peux diſſimuler que ce calcul eſt bien plus long & plus difficile que celui que preſcrit la regle de Trigonométrie Sphérique, qui convient au cas dont il s'agit; c'eſt pourquoi il ſeroit préférable dans la pratique, de faire uſage de cette regle commune.

La ſolution algébrique eſt, dis-je, moins avantageuſe que la regle commune pour le cas dont il s'agit, & il en eſt de même pour quelques autres cas, où l'on tomberoit auſſi en des équations du ſecond dégré. Le déſavantage de l'algebre pour ces cas, conſiſte en ce que ſaiſiſſant d'abord ſon objet d'un ſeul coup, elle parvient à une formule compliquée, qui indique pluſieurs opérations arithmétiques, dont quelques-unes ne peuvent être exécutées directement par logarithmes, au lieu que la Trigonométrie, dans les mêmes cas, diviſe l'objet propoſé en deux Parties, qu'elle fait chercher l'une après l'autre, enſorte qu'elle n'a beſoin pour chacune, que d'une regle de trois ſimple & pratiquable par logarithmes.

[Si c'eſt ſeulement par *art*, que les Auteurs de cette ſcience, qu'on répute *ſecondaire*, ont ainſi diviſé leurs ſolutions, j'avoüe bien volontiers que leur art eſt *admirable*, & je l'admire en ce qu'il a fait appercevoir des voies

particulieres, *indirectes*, si l'on veut, mais plus abrégées pourtant que celles que fournit l'algebre, par son procedé général & *immédiat*. Quoi qu'il en soit de l'*art* de ces Géometres, qui nous ont donné la Trigonométrie Sphérique, il me paroît heureux qu'ils aient tourné leur vûe ainsi qu'ils ont fait pour certains cas. Au reste, je ne suis point fort surpris que l'algebre conduise en ces rencontres à des pratiques arithmétiques peu commodes; car cela doit arriver quelquefois, parce que cette science étant assujettie sous des loix rigoureuses en ce qu'elle a de propre, elle ne donne, par sa méchanique, que ce qui résulte nécessairement, de la maniere dont on a entamé la recherche. C'est le calcul algébrique que j'entends ici par algebre propre : elle est, à la vérité, un moyen merveilleux pour faire des découvertes, & peut, jusqu'à un certain point, suppléer l'office du génie : mais je ne la regarde pourtant que comme un instrument, & je la distingue de l'analyse qui y est souvent jointe. C'est l'analyse prise en général, qui est le premier & le principal des Arts, & qui constitue l'*esprit Géometrique*; Art de génie, qui a peu de regles, & qui est, pour ainsi dire, au-dessus des regles, parce qu'il en est l'inventeur, & qu'il sçait diversifier sa marche, ou même s'en faire une nouvelle dans le besoin; Art enfin, dont les effets immédiats peuvent exister ailleurs que dans l'algebre.]

Si l'on veut considérer de près, & conférer les résolutions que fournissent l'algebre & la Trigonométrie Sphérique pour ces cas, dont on a un exemple ci-dessus, dans la recherche de la hauteur de l'astre E' : en voici le caractere. Elles se ressemblent d'un côté, en ce que dans l'une & dans l'autre on a deux quantités, dont il faut prèndre tantôt la somme, tantôt la différence : c'est pourquoi, soit qu'on suive l'une ou l'autre route, on est également

obligé

obligé de pénétrer dans la nature de la question, ou du moins d'en connoître l'état : je veux dire qu'il faut également voir quelle est la forme du triangle qu'on veut résoudre. Ainsi l'application de l'une de ces méthodes n'est gueres moins sujette à *ambiguité* que l'application de l'autre ; & si c'est un avantage pour une opération, que d'obliger celui qui la fait d'*ouvrir les yeux* sur les circonstances de la question, les deux procedés dont il s'agit, sont doués assez également de cette espece d'avantage.

Ces procedés different d'ailleurs. Dans celui qu'enseigne la Trigonométrie ; les deux quantités dont il faut prendre la somme ou la différence, sont des angles ou des arcs ; & l'une de ces quantités ayant été trouvée par certaine droite correspondante, c'est-à-dire, par son sinus ou sa tangente, &c. sert ensuite à l'invention de la deuxieme quantité, mais c'est une autre correspondante de la premiere quantité qu'on emploie dans l'analogie qui donne la seconde. Si, par exemple, on a trouvé la premiere quantité par sa tangente, on se sert de son cosinus dans la deuxieme analogie, &c. C'est en cela que consiste le fin de cette résolution, & sa simplicité vient en partie de ce que l'on profite des divers calculs faits d'avance dans les Tables. Quant à la solution algébrique, elle donne directement le sinus de l'arc, ou de l'angle désiré ; c'est ce sinus qui est la somme ou la différence des deux termes compris dans la formule, & ces termes sont compliqués, parce que le cosinus étant enveloppé dans la préparation, il faut chasser une de ces inconnues, en y substituant sa valeur algébrique, en sorte qu'on est privé du bénéfice que la Trigonométrie commune trouve dans les Tables, &c.

Au reste, il y a plusieurs cas où les résolutions algébriques des triangles sphériques obliquangles n'étant que

des équations linéaires, indiquent des opérations arithmétiques à peu près égales en commodité, à celles que prescrit la Trigonométrie: & les regles de la premiere espece ont par-dessus celles de la deuxieme, le mérite d'être conçûes en moins de termes, d'être moins nombreuses (parce que la même formule comprend deux cas), & d'être plus faciles à découvrir, ou bien à rappeller à l'esprit de leur origine. Il est peut-être à propos de spécifier ici tous les cas possibles, afin d'assigner ceux où l'algebre prévaut, & ceux où elle me paroît moins utile. Ce que je vais dire auroit pû être mis à la tête de cet Essai, je l'y placerois s'il avoit à paroître au jour, & je refondrois en même tems le premier Lemme.

Il y a douze cas à résoudre dans les triangles sphériques obliquangles. Or, ces cas peuvent être rangés en quatre classes, & être réglés par trois ou quatre formules.

La premiere classe comprend trois cas, qui sont ceux où les quatre élémens du triangle qui font la matiere de l'opération, sont les trois côtés & un des angles : car cet angle étant opposé à un des côtés, 1° ou cet angle, 2° ou ce côté seront cherchés ; 3° ou bien ce sera un des côtés qui comprennent cet angle.

La deuxieme classe est réciproque de la précédente : elle réünit les cas où les quatre élémens employés dans l'opération sont les trois angles, & un des côtés du triangle. Car ce côté étant opposé à un des angles, 4° ou on cherchera ce côté, 5° ou bien cet angle, 6° ou l'un des angles adjacents à ce côté.

La troisieme & la quatrieme classe comprennent les cas où les quatre élémens sphériques qui font la matiere de l'opération sont deux côtés, & deux des angles du triangle. Je place dans la troisieme classe, les cas où chacun des angles employés est opposé à l'un des deux côtés

auſſi employés. Or, y ayant même relation des côtés aux angles dans cette hypotheſe, il ne s'y trouve que deux cas, 7° ou c'eſt un des angles, 8° ou bien un des côtés qui eſt déſiré.

La quatrieme & derniere claſſe embraſſe quatre cas, dans leſquels il y a ſeulement un angle & un côté oppoſé employés, l'autre angle & l'autre côté employés n'étant pas oppoſés, mais adjacents. Car 9° ou c'eſt l'angle de la premiere condition, 10° ou le côté oppoſé que l'on cherche, 11° ou bien c'eſt l'angle de la deuxieme condition, 12° ou bien enfin, c'eſt le côté qui y eſt adjacent.

Les deux cas de la troiſieme claſſe ſont les plus ſimples de tous; une ſeule analogie ſuffit pour les réſoudre : auſſi la regle algébrique de leur ſolution n'eſt-elle pas différente de celle que fournit la Trigonométrie. On a un exemple de cette regle, dans la formule cottée 5ᵉ au premier Lemme.

Les 1, 2, 4, 5, 9 & 10ᵉ cas, approchent en ſimplicité, de ceux dont on vient de parler : dans les formules que fournit l'algebre pour leur réſolution, l'inconnue eſt ſeulement linéaire, mais ſa valeur eſt néceſſairement compoſée de deux termes. Tous ces cas conviennent, en ce que l'un des élémens donnés eſt oppoſé à l'élément cherché, & que les deux autres élémens employés dans l'opération, ne ſont pas de la même condition reſpective. C'eſt par cette deuxieme circonſtance, que les ſix cas mentionnés different des deux de la troiſieme claſſe, & ſont moins ſimples.

Enfin, les 3, 6, 11 & 12ᵉ cas, ſont compliqués, & l'algebre ne peut les réſoudre directement, que par une équation du ſecond dégré. Tous ces cas ont cela de commun entre eux, & de différent d'avec les huit autres, que

l'élément opposé à celui qui est cherché, n'est point compris entre les trois qui sont donnés. Ainsi ces quatre cas sont faciles à discerner.

Voyons maintenant les formules algébriques qui répondent à nos classes. Nous avons deux exemples de l'hypothese qui constitue la premiere de ces classes, dans les deux premiers §§ du premier Lemme ci-dessus [il est visible par les titres de ces §§, que les trois côtés, ou les complémens de ces côtés, & un des angles du triangle *PEZ*, sont les quatre élémens dont la relation y est demandée]. Ainsi nous avons deux exemples de la regle algébrique, qui convient aux cas de la premiere classe; dans la premiere & la deuxieme formule de ce Lemme. Ces deux formules $rrh \pm cyu = rsx$; $rrx \pm cnk = rsh$; n'étant donc que des applications de la même regle, il eût suffi d'en démontrer une, d'autant plus que je n'avois pas grand usage à faire de la deuxieme dans cet Essai.

J'ai insinué qu'une seule regle algébrique s'étendoit aux trois cas de la premiere classe, nonobstant leur différence: mais aussi c'est d'une maniere différente qu'elle y sert. En effet, pour trouver h, ou u, qui sont les cosinus du côté *EZ*, & de l'angle opposé *EPZ*, la formule $rrh \pm cyu = rsx$ est parfaite: mais elle n'est que préparatoire pour obtenir l'un ou l'autre côté, *EP*, ou *PZ*, du même triangle *EPZ*, parce qu'il y reste dans ce cas, une inconnue à chasser, &c.

Quant à l'invention, ou démonstration de la regle dont il s'agit, j'observe qu'on y peut parvenir en plusieurs manieres, dont deux également simples & aisées à retenir, le sont plus que toute autre, à raison de l'ordre qu'on y garde. M. de Maupertuis, que j'ai copié ci-dessus au Lemme premier, a pris l'un de ces procedés simples dans l'exemple du §. II: mais il n'a employé ni l'un ni l'autre

dans l'exemple du §. I, où l'on a la formule $rrh \pm cyu = rsx$, ou bien, $rrh - rsx = \pm cyu$ à établir. Le procedé qu'il y a suivi, a été de chercher les valeurs des deux quantités BO, OF, dont la somme ou bien la différence est BF, c'est-à-dire, $\frac{yu}{r}$, &c. On réussiroit encore également, en cherchant les deux quantités dont la somme ou la difference est $\frac{cu}{r}$, & en faisant voir, à l'aide d'une figure convenable, que les valeurs de ces quantités sont $\pm \frac{ys}{x}$, & $\frac{r}{y}\left(h \mp \frac{rs}{x}\right)$. Mais voici le genre de proceder que je préfere : c'est de prendre les valeurs des deux quantités, dont la somme ou bien la différence est égale au cosinus de l'un ou de l'autre des côtés PE, PZ, qui comprennent l'angle employé dans l'opération. En disposant, par exemple, l'égalité qu'il s'agit d'établir par rapport au cosinus x du côté PE, nous avons à montrer que $\frac{rrh - cyu}{rs} = x$, *Fig.* 1 & 2e, ou que $\frac{rrh + cyu}{rs} = x$, *Fig.* 3e; c'est-à-dire, que $\frac{rh}{s} \mp \frac{cyu}{rs} = x$; & cela est aisé, car (en suppléant la lettre R dans lesdites figures, pour marquer le point d'intersection des droites CBP, LFG) il est visible que CB ou $x = CR \mp RB$. Or (à cause de la similitude des triangles rectangles PQC, CGR) on a, $PQ\ (s) : CP\ (r) :: CG\ (h) : CR = \frac{rh}{s}$; & les triangles semblables PQC, FBR, donnent $s : c :: BF\left(\frac{yu}{r}\right) : RB = \frac{cyu}{rs}$. Donc, &c.

Que si on veut disposer l'égalité en question par rapport au cosinus s de l'autre côté PZ du même triangle, on aura la même facilité à l'établir, c'est-à-dire, à prouver que

$\frac{rh \mp cyu}{rx} = s$, ou bien que $\frac{rh}{x} \mp \frac{cyu}{rx} = s$, en se servant d'une figure convenable, telle qu'est la 45e, où $OAIxoC\Phi$, représente le grand cercle, qui a P pour pole, & $\Delta Z\delta\varkappa\varphi$, un parallele à ce cercle : ainsi $\Delta\varkappa$ est le sinus (c) de PZ, & $C\varkappa$ son cosinus (s) ; $A\Phi$ (qui a $Z\varphi$ pour parallele) est le sinus de l'angle EPZ, & $C\Phi$ son cosinus (u) ; on a donc, $CO\ (r) : C\Phi\ (u) :: \beta\Delta\ (c) : \beta\varphi = \frac{cu}{r}$. $VIK\varkappa C$ est le grand cercle qui a E pour pole, & $\epsilon Z\beta\rho\gamma\varphi$ est un parallele à ce cercle, ainsi $\epsilon\gamma$ ou $Z\gamma$ est le sinus de ZE, & $C\gamma$ en est le cosinus (h) ; enfin $C\chi$ est le sinus (y) de PE, & $P\varkappa$ est son cosinus (x).

Cela posé, il est visible que $C\varkappa$ ou $s = C\rho - \rho\varkappa$. Or, (à cause de la similitude des triangles rectangles $P\varkappa C$, $C\gamma\rho$), on a $P\chi\ (x) : CP\ (r) :: C\gamma\ (h) : C\rho = \frac{rh}{x}$; d'un autre côté, les triangles semblables $P\varkappa C$, $\varphi\varkappa\rho$, donnent : $P\chi\ (x) : C\varkappa\ (y) :: \beta\varphi \left(\frac{cu}{r} \right) : \rho\varkappa = \frac{cyu}{rx}$. Donc $C\varkappa\ (s) = C\rho - \rho\varkappa = \frac{rh}{x} - \frac{cyu}{rx}$; ce qu'il falloit prouver.

A l'égard des cas de la deuxieme classe, quoique nous n'en ayons rencontré aucun dans cet Essai, nous pouvons dire en passant, & prouver, qu'ils sont soumis à une regle algébrique, pareille à celle qui vient d'être établie ; parce que tout triangle sphérique correspond à quelque autre de telle façon, que les côtés de celui-ci ont respectivement les mêmes sinus que les angles de celui-là, & que les côtés de celui-là ont aussi les mêmes sinus respectivement que les angles de celui-ci. Les trois côtés, & un des angles de l'un, ont donc entre eux la même espece de relation que les trois angles, & un des côtés de l'autre. Dans la *Fig.* 46, qui est conforme à la *Fig.* 1, quant aux

lignes marquées des mêmes lettres, *AOXIa* y étant le grand cercle dont *P* eſt le pole, &c. ſoit *KIV* un autre grand cercle, dont *E* ſoit le pole (d'où il ſuit que *K* eſt pole du cercle *ZEMVz*, & *I* pole du cercle *PEOp*), nous aurons les triangles *KIX*, & *PZE*, pour correſpondans, de la maniere qui a été dite. Car 1°, les angles *PIa* & *EIK*, étant droits par l'hypotheſe, & renfermant chacun l'angle *PIK*, l'angle *EIP* eſt égal à *KIa*, complément à deux droits de l'angle *KIX*; *EIP* eſt donc auſſi complément à deux droits de *KIX*, & ces deux angles ont mêmes ſinus & coſinus; donc *KIX* a même ſinus y & coſinus x, que l'arc *PE*, qui eſt la meſure de l'angle *EIP*. 2°. L'arc *EMV*, étant par l'hypotheſe un quart de circonférence, de même que *ZEM*, l'angle *IKX* meſuré par *MV*, a même ſinus k, & coſinus h, que l'arc *ZE*. 3°. L'angle *IXK* complément de *KXP*, & égal par conſéquent à l'angle *PXZ*, a même ſinus c, & coſinus s, que l'arc *PZ* meſure de l'angle *PXZ*. 4°. Enfin, *IXO* étant un quart de circonférence, de même que *AOX*, l'arc *IX* eſt égal à *AO*, qui eſt la meſure de l'angle *EPZ*, & a par conſéquent même ſinus t, & coſinus u que cet angle. Donc les trois angles, & le côté *IX* du triangle *KIX*, ont la même relation entre eux que les trois côtés, & l'angle *P* du triangle *EPZ*; & cette relation eſt exprimée par la formule $rrh - cyu = rsx$.

La formule $rrx + cnk = rsh$, qui eſt de la même eſpece, marque pareillement la relation des trois angles, & du côté *KX* du triangle *KIX*, parce que l'arc *KXM* étant un quart de circonférence, ainſi que *XMH*, l'arc *KX* eſt égal à *MH*, qui eſt la meſure de l'angle *MZH*, complément à deux droits de l'angle *PZE*, & par conſéquent *KX* a même ſinus m, & coſinus n, que l'angle *PZE*, &c.

On feroit voir encore, s'il étoit néceſſaire, que le côté

KI du triangle *KIX* a mêmes ſinus & coſinus que l'angle *PEZ*.

On peut remarquer ici que l'élément ſphérique cherché dans les quatre cas les plus ſimples de la premiere & de la deuxieme claſſe, eſt exprimé par ſon coſinus: mais dans les deux cas de la troiſieme claſſe, l'élément déſiré eſt exprimé par ſon ſinus, & c'eſt enfin par ſa cotangente qu'il l'eſt, dans les deux cas ſimples de la claſſe dont il nous reſte à parler. J'ajoûte que dans les quatre premiers cas, la Trigonométrie emploie pour l'élément cherché, la même expreſſion que l'algebre; c'eſt pourquoi l'on peut, dans ces cas, paſſer de la regle trigonométrique à la regle algébrique, à l'aide du ſecond Lemme.

Nous avons deux exemples de l'hypotheſe qui conſtitue la quatrieme claſſe, dans le III & IV[e] §. du premier Lemme. Leurs titres font aſſez voir, que les quatre élémens ſphériques, dont la relation y eſt demandée, ſont deux côtés, & deux angles du triangle *PEZ*, tels qu'un ſeul de ces côtés eſt oppoſé à l'un de ces angles. Ainſi nous avons deux exemples de la regle algébrique, propre aux cas de la quatrieme claſſe, dans la troiſieme & la quatrieme formule de ce Lemme, qui ſont $rnyt \pm rmcx = msyu$, & $rcht \pm nkst = rmku$, ou bien (en les réduiſant, comme il convient, à une forme plus ſimple) $Nt \pm cX = su$, & $Hc \pm mT = ns$.

Quant à l'invention de la regle dont il s'agit, ou au rappel de ſon fondement à la mémoire, on peut y parvenir en pluſieurs manieres, les unes plus ſimples que les autres. M. de Maupertuis a procédé aſſez ſimplement dans l'exemple du §. III, où je l'ai copié, ainſi que dans les autres; mais cet habile homme a procédé différemment & avec circuit, dans l'exemple du §. IV. Il eût pû s'y conduire

conduire de la même maniere que dans l'exemple précédent, en raisonnant comme il suit. Les triangles semblables, *efC*, *EFB*, donnent $t : u :: EF\left(\frac{mk}{r}\right) : FB = \frac{mku}{tr}$. Les autres triangles semblables *PQC*, *FBR*, (je suppose encore ici que le point d'intersection des droites *PBC*, *LFG*, est marqué *R*) donnent; $s : r :: FB\left(\frac{mku}{tr}\right) : FR = \frac{mku}{st}$. D'ailleurs les triangles semblables *PQC*, *CGR*; donnent; $s : c :: CG\,(h) : RG = \frac{ch}{s}$. Or, $FR - RG = FG\left(\frac{nk}{r}\right)$ *Fig.* 1 & 4; ou bien $FR + RG = FG$; *Fig.* 3, &c. Donc $\frac{mku}{st} \mp \frac{ch}{s} = \frac{nk}{r}$, ou enfin; $rmku \mp rcht = nkst$. Il y a encore une autre maniere toute pareille à celle qu'on vient de voir, pour établir la même formule, sçavoir, en montrant que $\frac{mu}{n} \pm \frac{h}{k} \times \frac{r}{n} \times \frac{ct}{r} = \frac{st}{r}$. Il y a aussi une deuxieme maniere de prouver la troisieme formule, laquelle est semblable à celle qu'a employée M. de Maupertuis. Elle consiste à montrer que $\frac{nt}{u} \pm \frac{x}{y} \times \frac{r}{u} \times \frac{mc}{r} = \frac{ms}{r}$.

Quoique la double maniere de raisonner que je viens de toucher, soit fort bonne, il est cependant une autre méthode, que je préférerois volontiers à celle-là, comme étant plus directe pour établir la regle en question. Cette regle est dans l'exemple du §. III, $rnyt \pm rmcx = msyu$, ou bien $Nt \pm cX = su$; & pour arriver à cette deuxieme forme de la regle, il faut, lorsqu'on a procedé comme ci-dessus, montrer encore, que $\frac{rn}{m} = N$, & que $\frac{rx}{y} = X$. Mais on peut éviter cette espece de détour, & prouver directement que $Nt \pm cX = su$, ainsi

qu'on va voir. Il y a deux manieres également propres pour cela, car il s'agit de montrer, ou que $\frac{Nt \pm cX}{s} = u$, ou bien que $\frac{Nt \pm cX}{u} = s$.

1°. Dans la *Fig.* 1, qui eſt conforme à la *Fig.* 47. quant aux lignes marquées des mêmes lettres, X y déſignant le pole du grand cercle $PZAHpzah$, & Z celui de $HMXh$, &c. Soit $A\zeta$ le ſinus (c) de l'arc AH égal à PZ, & $C\zeta$ ſon coſinus s; Of le ſinus (t) de l'arc AO ou de l'angle EPZ, & $Og = Cf$ ſon coſinus (u); Oe la tangente X du complément OE de l'arc PE; $X\mu$ la tangente de l'arc XM, qui eſt l'excès de l'arc hXM, par lequel eſt meſuré l'angle PZE, ſur un quart de circonférence; c'eſt-à-dire, ſoit $X\mu$ la cotangente N de l'angle PZE; ſoit gq une parallele à $X\mu$, & à $C\zeta H$, terminée par la ſecante $CM\mu$; il ſuit de ces hypotheſes, que le rayon CgX, & la droite fO, ſont perpendiculaires au plan Ogq; ainſi la tangente Oe étant perpendiculaire aux lignes gO, Of, ſe trouve dans le plan Ogq, & la droite eq rencontre la droite gO en quelqu'un de ſes points, que je marque par d: d'ailleurs cette droite edq étant & dans le plan $MCEe$ de deux rayons du cercle $ZEMz$, qui eſt perpendiculaire à $CXMH$, & dans le plan Ogq qui eſt auſſi perpendiculaire à ce plan $CXMH$, eſt pareillement perpendiculaire à ce plan, & par conſéquent à la droite gq qui y appartient. Donc enfin les trois triangles $A\zeta C$, dqg, dOe, ſont rectangles & ſemblables. Cela poſé, les triangles ſemblables $CX\mu$, Cgq, donnent $CX\,(r) : X\mu\,(N) :: Cg = fO\,(t) : gq = \frac{Nt}{r}$; les triangles $A\zeta C$, dqg, donnent $C\zeta\,(s) : CA\,(r) :: gq\,\left(\frac{Nt}{r}\right) : gd = \frac{Nt}{s}$; enfin les triangles $A\zeta C$, dOe, donnent $C\zeta\,(s) : A\zeta\,(c) :: eO\,(X) : dO = \frac{cX}{s}$. Or, $gd + dO = gO\,(u)$,

donc $\frac{Nt}{s} + \frac{cX}{s} = u$. Ce qu'il falloit prouver.

2°. Que si on veut montrer que $\frac{Nt}{u} + \frac{cX}{u} = s$, on le pourroit, au moyen de la *Fig.* 47, en y ajoûtant quelques lignes, sçavoir, en joignant les points O, q, & divisant $C\xi$ par une parallele à Oq, tirée du point A, &c. Mais il vaut mieux employer la *Fig.* 48. Les mêmes lettres y désignent les mêmes arcs que ci-devant. Soit d'ailleurs, $a\sigma$ le sinus (t) de l'angle sphérique $EPZ = OCA = aC\sigma$, & $C\sigma$ son cosinus u; soit $C\gamma = h\varphi$ le sinus (c) de l'arc $PZ = ha$, & $h\gamma$ son cosinus s; soit hk la tangente de l'angle hZK, qui est la différence de l'angle PZE d'avec un droit; c'est-à-dire, soit hk la cotangente (N) de l'angle PZE; soit PT le complément de l'arc EP, $P\theta$ la tangente X de PT; $\gamma\chi$ une parallele à $P\theta$ & à $OC\sigma$; $k\chi$ une droite située dans le plan du cercle IKT, qui est perpendiculaire au cercle $COEPT$; δ l'intersection des droites $k\chi, h\gamma$. Les trois triangles $a\sigma C$, $\delta\chi\gamma$, δhk, sont rectangles & semblables.

Cela posé, on voit que les triangles semblables $CP\theta$, $C\gamma\chi$, donnent CP (r) : $P\theta$ (X) :: $C\gamma$ (c) : $\gamma\chi = \frac{cX}{r}$. Les triangles $a\sigma C$, $\delta\chi\gamma$, donnent $C\sigma$ (u) : Ca (r) :: $\gamma\chi\left(\frac{cX}{r}\right)$ $\gamma\delta = \frac{cX}{u}$: Enfin les triangles $a\sigma C$, δhk, donnent $C\sigma$ (u) : $a\sigma$ (t) :: hk (N) : δh $\frac{Nt}{u}$. Or, $\gamma\delta + \delta h = h\gamma$ (s), donc $\frac{Nt}{u} + \frac{cX}{u} = s$.

A l'égard des signes qui conviennent aux divers termes de nos regles algébriques de résolution des triangles sphériques obliquangles, voici un échantillon des observations qu'on pourroit faire pour y mettre ordre. Soit prise pour exemple, la regle des cas de la premiere

classe, laquelle est susceptible de ces trois états :

$$+ rrh - cyu = rsx ,$$
$$- rrh + cyu = rsx ,$$
$$+ rrh + cyu = rsx .$$

Il faut remarquer d'abord, que chacun de ces états ne répond pas seulement au triangle *EPZ*, mais encore à trois autres triangles *pEZ*, *pEz*, *PEz*, adjacents à celui-là, chacun desquels a un angle & un côté communs avec *PEZ*, & dont les autres angles & côtés, sont complémens à deux droits des autres élémens de *PEZ*. Il y a donc plusieurs cas particuliers à considérer, cas que je distribue de cette sorte.

Les deux côtés qui comprennent l'angle employé dans la regle, angle qui y est employé par son cosinus *u*, sont ou de même affection (c'est-à-dire, tous deux moindres, ou tous deux plus grands qu'un quart de circonférence) ou ils sont d'affection différente.

Ces côtés étant de même affection, ou l'angle compris entre eux est aussi de même affection que le côté qui y est opposé, ou il n'en est pas. Dans le premier cas, si l'angle est aigu, on a $rrh - cyu = rsx$, premier état de la formule. Voyez les triangles *EPZ*, *EpZ*, *Fig.* 1[e] & 2[e]. Mais si l'angle est obtus, on a $- rrh + cyu = rsx$, deuxieme état de la formule, voyez les triangles *EPZ*, *Epz*, *Fig.* 4[e]. Et si l'angle employé est d'autre affection que le côté opposé (auquel cas il doit être obtus), on a $rrh + cyu = rsx$, troisieme état de la formule. Voyez les triangles *EPZ*, *EpZ*, *Fig.* 3[e].

Les côtés qui comprennent l'angle employé, étant de diverse affection, cet angle ou est aussi d'une autre affection que le côté opposé, ou de la même. Dans le premier cas, l'angle doit être aigu, & le dernier état de la for-

mule a lieu. Voyez les triangles *EPz*, *Epz*, *Fig.* 3e. Dans l'autre cas, si l'angle est obtus, c'est le premier état de la formule qui a lieu. Voyez les triangles *EPz*, *Epz*, *Fig.* 1e & 2e; mais si l'angle est aigu, on a le second état de la formule. Voyez les triangles *EPZ*, *EpZ*, *Fig.* 4e.

Il est aisé de distribuer les cas régis par les autres formules, dans un ordre semblable.

J'observe pour conclusion, que si les triangles sphériques sont rectangles, ou ont un quart de circonférence pour un de leurs côtés, il s'évanoüit un des termes dans les formules qui en ont trois, & l'on trouve les mêmes regles que celles que prescrit la Trigonométrie pour ces sortes de triangles; ainsi l'algebre a encore en ce point un avantage sur cette autre science, les regles des triangles rectangles n'étant dans le procedé algébrique, qu'une espece de Corollaire des regles des obliquangles, au lieu que dans la Trigonométrie, il faut établir la résolution des triangles obliquangles, sur les regles particulieres des triangles rectangles.



SECONDE PARTIE.

Opérations ſubſidiaires aux calculs, pour trouver l'heure. Moyens de ſimplifier quelques ſolutions algébriques de ce Probleme.

LES ſolutions algébriques ne requierent ſouvent pour elles-mêmes que des opérations faciles, qu'une marche commune & peu ſubtile, qu'un petit jeu ou remuement de lettres & de ſignes; & outre l'avantage qu'elles ont pour l'ordinaire, de ne dépendre que d'un petit nombre de principes ſimples & féconds (principes dont l'invention fait le fort du mérite d'un Géometre algébriſte), elles ont toûjours celui de la préciſion. Mais auſſi elles peuvent laiſſer à leur ſuite, la néceſſité d'un calcul numérique long & pénible, & la plûpart de celles que j'ai rapportées ou données ci-deſſus, ſont de cette qualité. Outre beaucoup de multiplications & de diviſions, elles indiquent des extractions de racines, qui ne peuvent être exécutées directement à l'aide des logarithmes. J'ai donc penſé qu'il convenoit de propoſer d'autres ſolutions plus expéditives. On ſuppoſe qu'il eſt important pour un Navigateur de ſçavoir l'heure, mais s'il n'opere que d'après l'algebre, un tems conſidérable s'écoulera pendant qu'il fera ſon calcul; ſon vaiſſeau pourra être déplacé notablement en longitude, & il ſera dans un nouveau beſoin de chercher l'heure. C'eſt un cas approchant de celui du Barbier de Martial:

> Eutrapelus tonſor dum circuit ora Luperci,
> Expungitque genas, altera barba ſubit.

Parlons férieufement. Je ne prétends pas que les opérations expéditives que j'ai à propofer, foient abfolument meilleures que les folutions algébriques, & leur foient préférables : elles font moins précifes, il faut l'avouer, & je ne les donne que par forme d'acceffoire, qui n'eft pas fans quelque avantage. Le bon eft partagé, eft difperfé, & il y a prefque toûjours dans les opérations humaines, de *fatales compenfations*. Par exemple, fi l'office du Géometre dans un Probleme eft facile, l'office correfpondant de l'Obfervateur eft difficile, & demande une grande adreffe, ou bien eft peu fûre. Si au contraire, le Géometre veut faire ufage d'une obfervation fimple & exacte, fon office devient, ou paroît devenir d'autant plus difficile : & quant aux pratiques du Géometre, telle qui eft fort jufte, eft d'ailleurs fort pénible, & telle qui eft plus facile qu'une autre, eft d'ailleurs moins exacte. Ainfi j'eftime qu'il eft à propos de raffembler diverfes méthodes, afin de prendre ce que chacune a de bon, s'il eft poffible.

Voici les raifons pour lefquelles je trouve quelque avantage dans les opérations qui font plus expéditives que les calculs indiqués par l'algebre.

1°. Quoique ces opérations ne foient pas abfolument exactes par elles-mêmes, elles feront peut-être quelquefois fuffifantes pour les befoins nautiques. Elles le feront en effet, lorfqu'il ne fera pas néceffaire de déterminer l'heure avec la plus grande précifion ; car elles ne font pas fujettes à un défaut bien notable, fi on les fait avec des inftrumens d'une bonne grandeur. Cette maniere n'eft pas même fort inférieure à la voie du calcul à cet égard : car les obfervations étant fujettes à quelque erreur, leur réfultat trouvé par le calcul, doit être pareillement fujet à quelque erreur plus ou moins grande. Or, l'erreur inévitable qui découle de l'obfervation, ne fera pas

beaucoup augmentée par l'erreur particuliere qui peut se glisser dans les opérations dont il s'agit. On verra dans la suite, que l'une & l'autre erreur est à peu près de la même espece, & a une influence à peu près semblable pour chaque Probleme : ainsi quand elles seroient du même dégré, & conspirantes, le défaut de justesse du résultat de ces opérations, ne seroit que double de celui du résultat du calcul : mais j'estime que l'erreur particuliere de ces opérations sera moindre en dégré que l'erreur de l'observation ; celle-là n'ira peut-être pas au tiers, ni même au quart de celle-ci. Cela supposé, le défaut provenant de l'observation, ne sera augmenté que d'un tiers, ou d'un quart en sus, par le concours de celui qui peut se glisser dans les opérations que j'ai en vûe.

2°. La facilité de ces opérations invitera probablement le Navigateur à multiplier les observations propres à déterminer l'heure. Or, en prenant un milieu entre plusieurs déterminations, il n'approchera gueres moins du vrai, & peut-être en approchera-t-il plus que s'il se bornoit à une seule détermination, exécutée par la voie du calcul.

3°. On trouvera dans la troisieme Partie, des regles générales pour discerner les cas d'observation qui sont avantageux, ou désavantageux, pour la détermination de l'heure, c'est-à-dire, les cas dont l'erreur n'en produit qu'une petite, ou au contraire en produit une fort grande dans la détermination de l'heure. Mais s'il arrivoit qu'un Navigateur, faute d'avoir compris ces regles, ou de les bien posséder, ou par inadvertance, voulût employer une observation peu avantageuse, il en reconnoîtroit aisément la qualité, par ces opérations que je veux proposer : elles répondent si bien aux observations, que quand elles sont peu précises dans leur résultat, c'est une marque

marque sûre que l'obſervation particuliere ſur laquelle on travaille, n'eſt pas avantageuſe pour la détermination déſirée, quand même on la tenteroit par la voie du calcul.

4°. Il ſe trouvera toûjours ſans doute, ſur les grands vaiſſeaux, quelque perſonne capable d'exécuter les calculs propres pour la détermination de l'heure, & qui en ait le loiſir; mais peut-on compter qu'il s'en trouve ſur tous les petits vaiſſeaux? S'il n'y en a pas, les opérations ſubſidiaires aux calculs ſemblent requiſes. Et à l'égard des grands vaiſſeaux, rien n'empêche que deux perſonnes n'y emploient des pratiques différentes, pour chercher l'heure ſur la même obſervation. Ne doit-on pas être curieux de voir promptement l'à-peu-près de ce que l'on cherche?

5°. Quelque verſé qu'on ſoit dans l'arithmétique, on peut commettre une faute de calcul. D'ailleurs, quand on opere d'après une formule algébrique, on peut encore prendre un ſigne pour un autre; additionner, par exemple, en conſéquence, au lieu de ſouſtraire. Il y a donc lieu de ſuſpecter le réſultat d'un calcul qui ne ſeroit fait qu'une ſeule fois. Or, l'opération ſubſidiaire eſt très-propre pour le confirmer, s'il eſt bon, ou pour en décéler le vice, s'il en a un.

6°. Dans les Problemes où l'algebre fournit pour la détermination déſirée, une équation du ſécond dégré, dont l'une & l'autre racine eſt poſitive, il faut beaucoup d'attention pour faire un juſte choix entre elles, & l'on a ſujet de craindre l'équivoque. Les opérations que je vais propoſer, ſoulageront beaucoup l'imagination dans ces cas, & faciliteront le choix néceſſaire.

7°. Enfin, c'eſt l'obſervation des aſtres dont la déclinaiſon eſt variable, qui eſt la plus commode, & de l'uſage le plus étendu, pour trouver l'heure. Or, pour la faire

ſervir à cette découverte, il faut avoir par préalable, la déclinaiſon pour le moment de l'obſervation, au moins à peu près; & pour la connoître, cette déclinaiſon, par le moyen des Tables, il faut ou avoir obſervé tout le tems écoulé depuis qu'on a quitté certain point du globe dont on connoît la longitude, ou, ſi l'on y a manqué, il faut ſçavoir à peu près l'heure du lieu où l'on a fait l'obſervation, ainſi que ſa longitude; en ſorte qu'on peut ſe rencontrer à cet égard, dans le cas d'une eſpece de cercle (ce qui n'eſt pas ſans exemple dans les Problemes Nautiques), je veux dire qu'il peut être néceſſaire de connoître déja l'heure à peu près, pour la déterminer plus exactement, par l'obſervation des aſtres qui varient en déclinaiſon. Or, pour parvenir dans ce cas à une certaine exactitude, il faut corriger la détermination par le moyen du calcul différentiel; ou, ſi on l'ignore, il faut réitérer cette opération, je veux dire qu'il faut opérer une premiere fois ſur une déclinaiſon ſuppoſée, pour obtenir une déclinaiſon plus correcte, puis une deuxieme fois ſur cette déclinaiſon corrigée, pour obtenir la détermination requiſe. (Si l'on vouloit faire uſage de la Lune, il faudroit peut-être réitérer l'opération juſqu'à trois fois). Il en eſt de même pour la longitude des planetes; on peut être dans le beſoin de la corriger après l'avoir ſuppoſée, &c. Mais un Navigateur auroit-il le courage de faire deux fois de ſuite de longs calculs numériques; (ou bien de recourir au calcul différentiel, pour en tirer une double formule de correction relative à la double erreur ſur le lieu de la planete, &c.)? D'ailleurs, quelle néceſſité y a-t-il qu'une premiere détermination faite ſeulement pour obtenir le lieu d'un aſtre plus correctement qu'on ne l'avoit par eſtime, ait autant d'exactitude qu'il en peut réſulter du calcul? Il eſt plus avantageux, ce ſemble, que cette

opération préalable puiſſe s'exécuter avec facilité & promptitude, car on la doublera ſi l'on veut. Les pratiques expéditives que je vais expoſer, ſont donc convenables, au moins pour le cas dont il s'agit.

Je ne vois au reſte qu'un inconvénient dans la propoſition de ces pratiques, c'eſt que quelque Navigateur pourra s'en contenter, & négliger la voie du calcul, quoiqu'il ſoit en état de l'employer; mais d'un autre côté, ſi l'on cachoit ces pratiques, n'y auroit-t-il point quelque Navigateur, qui, dégouté par la peine du calcul, négligeât de chercher l'heure auſſi fréquemment qu'il le fera? &c.

Cette voie ſubſidiaire au calcul, dont il m'a paru à propos d'annoncer d'avance les petits avantages, de peur qu'on n'en fît trop peu de cas, eſt de tracer les cercles de la ſphere qui répondent aux obſervations, & qui déterminent les arcs ou les angles cherchés.

On peut exécuter cette deſcription de plus d'une maniere. On peut la faire, par exemple, ſur la ſphere même. C'eſt la maniere qui ſe préſente d'abord à l'eſprit, & qui eſt la plus ſimple; & il ne faudroit pas beaucoup d'art à un Navigateur, pour découvrir de lui-même le procédé particulier qui ſeroit requis dans chaque conjoncture. Cependant cette maniere n'eſt pas la meilleure; l'opération ſeroit peu préciſe ſur un petit globe; un grand globe ſeroit trop difficile à manier, à cauſe de ſa peſanteur, ou, s'il étoit de matiere très legere, il ſeroit ſujet à irrégularité. D'ailleurs pour connoître la valeur de certains angles ſur un globe nud, il faudroit y tracer trop de lignes, &c. Il y auroit d'autres inconvéniens pour la ſolution de nos Problemes, ſi on prétendoit ſe ſervir d'un globe mobile ſur ſon aiſſieu planté, comme il eſt ordinaire dans un méridien, ſupporté par un horiſon.

C'eſt ſur un plan où la ſphere céleſte ſoit projettée, que je conſeille de travailler. On peut faire une partie de ce planiſphere de métal, & y donner un grand diametre, ſans qu'il en réſulte d'incommodité. L'eſpece de projection que je choiſis, eſt celle que quelques Auteurs nomment *Stéreographique*, & qui eſt en uſage dans les Aſtrolabes. Dans cette projection, les droites qui paſſent par les divers points du globe, & les projettent ſur le planiſphere, partent de l'extrémité de l'axe du globe, lequel eſt perpendiculaire à ce plan. On ſçait, & il eſt aſſez viſible, que dans cette hypotheſe tous les cercles grands ou petits, qui paſſent par ce point commun à toutes les lignes de projection, ſont repréſentés ſur le plan par des lignes droites indéfinies. Ainſi le cercle horaire $poT\beta PEO\varsigma$, *Fig.* 17, eſt repréſenté en partie ſur le plan de l'équateur, par la droite $oTbPEOB$. On ſçait encore que les autres cercles, grands ou petits, c'eſt-à-dire, tous ceux hors du plan deſquels eſt le point commun des lignes de projection, ſont repréſentés dans cette hypotheſe par divers cercles ſur le planiſphere ; & celui qui ne le ſçauroit pas, le reconnoîtra facilement, en imaginant le cone formé par toutes les lignes de projection qui paſſent par un de ces cercles de la ſphere, le cone, par exemple, que forment les lignes qui paſſent par le cercle dont la corde $\beta\gamma\varsigma$, repréſentée par bgB ſur le planiſphere, eſt le diametre, cone qui eſt ici figuré par ſa ſection angulaire la plus aigue, βpB; car ces deux lignes, $\beta\varsigma$, bB, font les mêmes angles avec les deux côtés de cette ſection *; par conſéquent les deux baſes du cone qui ont $\varsigma\beta$, bB pour diametre, ſont de même nature. On ſçait de plus, que les angles que font les cer-

* L'angle $p\beta\varsigma$ ayant pour meſure la moitié de l'arc $p\varsigma$, eſt égal à l'angle pBb, qui a pour meſure la moitié du quart-de-cercle po, moins la moitié du complément ςo de l'arc $p\varsigma$: & l'angle $p\varsigma\beta$ meſuré par la moitié des arcs po, $o\beta$, eſt égal à pbB, meſuré par la moitié des arcs pO, $o\beta$.

cles de la ſphere, répondent à des angles qui leur ſont égaux ſur le planiſphere.

Quant à la conſtruction du planiſphere propoſé, & au moyen ſoit de tracer ſur celui qui n'eſt chargé que de ſes lignes principales, les autres cercles dont on peut avoir beſoin, ſoit de diviſer ces cercles en dégrés, il eſt évident d'abord, que tout cercle, grand ou petit, qui eſt parallele au plan de projection; y eſt repréſenté par un cercle qui a pour centre le point repréſentatif de l'axe, du ſommet duquel partent les lignes de projection; & que les parties de chacun de ces cercles de la ſphere, ſont proportionnelles aux parties correſpondantes de celui qui en eſt la projection; c'eſt pourquoi les degrés de ceux-là ſont repréſentés par des arcs égaux ſur le planiſphere. Pour les autres cercles de la ſphere, ceux qui les repréſentent, ont un centre propre, différent tant du point qui repréſente le pole du cercle de la ſphere, que du point qui en repréſente le centre (ainſi dans la ligne *bEB*, *Fig.* 17, le point *G* eſt le centre propre du cercle par lequel celui qui a pour diametre $\beta\gamma\mathfrak{C}$, eſt repréſenté ſur le plan de l'équateur; le point *E* eſt la projection du pole *E* de ce cercle de la ſphere, & le point *g* eſt la projection de ſon centre γ). Et les dégrés de chacun de ces cercles de la ſphere non-paralleles au plan de projection, répondent à des arcs inégaux de celui qui les repréſentent.

Je ſuppoſe qu'on ait un cercle diviſé en ſes dégrés & minutes, & qu'on le prenne pour un grand cercle de la ſphere, ſur le plan duquel on doive en faire la projection. Soit, par exemple, *Fig*, 18, *AOXIaoxi* l'équateur; ſoient tirées par le centre *CP* de ce cercle, deux lignes perpendiculaires l'une à l'autre, telles que *IPi*, *oTPEOB*, qui repréſentent deux cercles horaires. Si de l'interſection *I* de l'une de ces lignes avec la circonférence *AOXIaoxi*,

on tire à toutes les diviſions de cette circonférence, des droites qui coupent le cercle *oTPEOB* perpendiculaire à *IPi*, ce cercle ſe trouvera diviſé en ſes dégrés, &c. *IPi* ſera pareillement diviſé en ſes dégrés, &c. par des droites tirées du point *O*, à toutes les diviſions de la circonférence *AXIaxi*. Tout autre cercle horaire, tel que *ahPZA*, peut être diviſé de même, par des droites tirées de ſon pole *X*: mais il n'eſt pas néceſſaire que beaucoup de cercles horaires ſoient tracés & diviſés juſqu'à leurs moindres aliquotes poſſibles, ſur le planiſphere; une alidade mobile autour du centre *C*, & diviſée comme *oTPEOB*, autant qu'on le pourra, tiendra lieu des autres cercles horaires. Il eſt à propos que cette alidade excéde beaucoup en longueur le diametre du planiſphere. Cela donné, ſoit.

LEMME PREMIER.

Décrire ſur le planiſphere un cercle quelconque, oblique à ce plan, & le diviſer en dégrés.

§. I. Décrire le cercle dont on a le pole *E*, *Fig.* 18, & dont on connoît l'amplitude. [Ce que je nomme ici *amplitude*, a peut-être un autre nom; j'entends par ce terme, la diſtance *Eϐ*, ou *EϾ*, *Fig.* 17, du pole d'un cercle à ſa circonférence.]

Portez l'alidade ſur le point *E*, prenez de part & d'autre de ce point ſur la droite *oPEO* des parties *Eb*, *EB* du même nombre de dégrés, & égales à l'amplitude du cercle déſiré : trouvez le milieu *G* de la ligne *bB*, & du centre *G*, décrivez un cercle par les points *b*, *B*; ce cercle eſt celui qu'on déſire. Pour trouver le point *G* avec juſteſſe & promptitude, il ſera bon d'avoir un inſtrument fait en zic-zac, composé de trois regles minces, *qf*, *fF*, *FQ*, mobiles ſur deux clous *f*, *F*, dont les deux extremes *qf*,

FQ, ſoient juſtement égales entre elles, & à la moitié de la regle moyenne *fF*. Celle-ci étant diviſée à ſon milieu *N*, ſi on fait répondre les deux bouts *q*, *Q* de cet inſtrument, aux deux points *b*, *B* de la ligne *BEO*, & qu'on faſſe tomber le point *N* ſur cette ligne, il eſt viſible que *N* donnera le milieu *G* de l'intervalle quelconque *bB*. Le point *N* du zic-zac ſera encore propre à recevoir la pointe du compas, & cela préſervera le planiſphere des macules que cette pointe y feroit.

SCHOLIE. Si c'étoit un grand cercle qu'il fallût tracer, on n'auroit pas beſoin d'en prendre le diametre entier ſur l'alidade, il ſuffiroit de compter autant de degrés au-delà du pole *E* donné, qu'il y en a entre ce point *E* & le centre *CP* du planiſphere, on trouvera juſtement le centre propre du cercle demandé. A l'égard d'un petit cercle, ſi on a le point *g* de projection de ſon centre (le moyen de trouver ce point eſt aiſé à découvrir); & qu'on prenne *EG* du même nombre de degrés que *Eg*, on aura le centre propre *G* du cercle de projection. Cette pratique ſera une reſſource pour les cas où le point *B* du cercle déſiré tomberoit trop loin du centre du planiſphere, & par-delà le bout de l'alidade. (Cette pratique eſt fondée ſur ce que la ligne par laquelle le centre d'un cercle eſt projetté ſur le planiſphere, fait avec la ligne qui en repréſente le diametre, le même angle que la ligne qui part du point commun aux lignes de projection, & paſſe par le centre propre du cercle repréſentatif, fait avec le diametre du cercle repréſenté. Ainſi la ligne *pg*γ, *Fig.* 17, fait avec *bB* l'angle *pgB*, égal à l'angle *p*Γβ de la ligne *pG* avec le diametre ϐβ; & il ſuit de-là, que les lignes *pG*γ, *pG*Γ, font des angles égaux avec la ligne *pEE*.)

§. II. *Tracer un grand cercle dont on a deux points.*

Soient *E*, *Z*, ces deux points, *Fig.* 18, il faut décrire

les arcs *TKI*, *hKX* des deux grands cercles qui ont les points donnés pour poles, l'interſection *K* de ces deux cercles, eſt le pole de celui qui paſſe par les points donnés *E*, *Z*.

COROLLAIRE. Ce §. fournit le moyen de décrire par un point donné, un grand cercle perpendiculaire à un grand cercle donné : car ayant trouvé le pole de celui-ci, le grand cercle qu'on décrira par ce pole, & par le point donné, ſera le requis.

§. III. *Connoître la valeur d'un arc quelconque de grand cercle, décrit ſur le planiſphere ; ou bien prendre ſur un grand cercle un arc d'une certaine quantité, dont un des termes ſoit donné.*

Soit *Tu*, l'arc donné du grand cercle *uTKI*, *Fig.* 18. Du pole *E* de ce cercle, tirez par les extremités de l'arc donné deux droites *ETo*, *Euy*, qui aillent juſqu'à la circonférence du grand cercle *AXIoi*, ſur lequel eſt formé le planiſphere ; l'arc *oy* de ce cercle compris entre les deux droites, donnera la valeur déſirée de l'arc *Tu* propoſé. La ſolution de l'autre cas eſt aiſée à appercevoir. Je ne m'arrêterai point à donner la raiſon de cette pratique, ni à montrer comment on peut connoître la valeur d'un arc de petit cercle.

LEMME SECOND.

Réſoudre tous les cas concernant les triangles ſphériques obliquangles, à l'aide du planiſphere propoſé ; c'eſt-à-dire, former ſur une baſe donnée dans le planiſphere, tout triangle ſphérique, comme PEZ, Fig. 18, 19, *dont on connoiſſe trois élémens, & découvrir les trois autres.*

Nous n'avons ici que ſix cas, & quelques-uns même ſont étrangers à notre objet ; cependant comme ils exigent

gent peu de discours, je ne les omettrai pas. Je ne prends dans les solutions suivantes, que les exemples les plus commodes.

§. I. *Tous les côtés d'un triangle sphérique étant connus, trouver tous les angles.*

Que *PEO*, l'une des droites qui passent par le centre du planisphere, *Fig.* 18, soit la ligne qui doit servir de base, en partant du point *P*. Prenez-y donc *PE*, équivalente à un des côtés donnés ; décrivez autour du point *E*, comme pole, le cercle *bZB*, dont l'amplitude *Eb*, ou *EB* soit égale à un des autres côtés ; puis ayant pris la valeur *PZ* du troisieme côté sur l'alidade, conduisez-la jusqu'à ce que le terme *Z* de ce côté tombe sur la circonférence du cercle *bZB*. Vous avez déja l'un des angles désirés, sçavoir *EPZ*, & il est évident que sa valeur est donnée par l'arc *OA* du grand cercle gradué du planisphere, lequel est compris entre la ligne *PEO* & l'alidade. Quant aux autres angles, si vous décrivez les deux grands cercles *uTKIV*, *mhKXM*, qui ont les points *E*, *Z*, pour poles, puis celui *muZEMV*, qui passe par ces points (ce qui rend le triangle *PEZ* proposé, complet), les arcs *Tu* & *hm*, ou *hKXM* des deux premiers, seront la mesure de l'angle *PEZ*, & de *EZP*, ou de son complément, & la valeur de ces arcs sera trouvée par le §. III. du Lemme précédent.

Autre exemple. Soit la circonférence du grand cercle *PZAHpzah*, sur lequel est formé un planisphere, *Fig.* 19, assignée pour servir de base à partir du point *P*. Prenez-y donc l'arc *PZ*, égal à un des côtés du triangle proposé ; décrivez autour des points *P*, *Z*, comme poles, deux arcs *DEd*, *LEl*, des cercles qui ont pour amplitudes les deux autres côtés de ce triangle, l'intersection *E* de ces arcs sera le sommet de l'angle sphérique opposé à *PZ*,

& l'on achevera le triangle requis PZE, en décrivant ses deux grands cercles $PEOtp$, $ZEMVz$, qui passent par le point E & par les points P, Z, cercles qui ont les points I, K pour poles. Cela fait, l'alidade portée sur le point I, montrera la valeur OA de l'arc qui mesure l'angle EPZ; portée pareillement sur le point K, elle donnera la mesure hM de l'angle PZE. Enfin, si l'on décrit le grand cercle $TKIVt$, qui a le point E pour pole, on aura l'arc Vt pour mesure de l'angle PEZ.

§. II. *Tous les angles d'un triangle sphérique étant connus; trouver ses côtés.* (Ce cas est un de ceux dont nous n'avons pas d'application à faire.)

Pour la solution de ce cas, il faut se rappeller ce qui a été dit dans la premiere Partie, sçavoir: que tout triangle sphérique correspond à quelque autre, de telle façon que les angles de l'un ont mêmes sinus que les côtés de l'autre, ces angles étant mesurés soit par ces côtés mêmes, soit par leurs complémens. Ainsi le cas proposé revient au précédent; car si on construit, *Fig.* 18 ou 19, le triangle KIX, dont le côté KX soit équivalent à MH ou mh, mesure du complément d'un des angles connus PZE, dont le côté IX soit équivalent ou égal à OA, mesure de l'angle EPZ, aussi donné, dont enfin le côté KI soit équivalent à Tu ou Vt, mesure du troisieme angle donné PEZ; il est visible que les points I, K, sont poles des deux grands cercles $TPEOt$, $ZEMV$, qui par leur intersection avec $ahPZA$, forment le triangle sphérique PZE, dont il falloit déterminer les côtés.

§. III. *Deux côtés d'un triangle sphérique, & l'angle qu'ils comprennent, étant donnés, trouver le reste.*

Conduisez l'alidade, *Fig.* 18, jusqu'à ce qu'elle fasse un angle égal au donné, avec $TPEO$, l'une des droites qui traversent le planisphere; puis prenez sur $TPEO$,

& sur l'alidade, les deux parties *PE*, *P* ; équivalentes aux deux côtés donnés, & trouvez le grand cercle qui passe par les points *E*, *Z*, &c. Ou bien, prenez dans la circonférence du grand cercle, sur lequel est formé le planisphere, *Fig.* 19, l'arc *PZ* égal à un des côtés donnés, puis prenez sur le cercle *AOXa*, dont *P* est pole, la partie *AO*, qui est mesure de l'angle donné, & décrivez le grand cercle *PEOp*, qui passe par les points *P*, *O*; prenez ensuite sur ce cercle la partie *PE*, équivalente à l'autre côté donné, & décrivez un grand cercle *ZEMVz*, par les points Z, *E*, &c.

§. IV. *Un côté d'un triangle sphérique, & les deux angles adjacens étant donnés, trouver le reste.*

Prenez sur une des lignes du planisphere la partie *PZ*, qui soit ou égale, *Fig.* 19, ou équivalente, *Fig.* 18 au côté donné. Décrivez ou suppléez, par l'alidade, la ligne *TPEOt*, qui fasse avec *PZ* l'angle *EPZ*, égal à un des angles donnés, ainsi qu'au cas précédent; puis ayant décrit le grand cercle *mhKXM*, dont *Z* est le pole, lequel coupe la ligne *AZPha* en *h*; prenez une partie *hKXM* de ce cercle, qui soit équivalente à la mesure de l'autre angle donné; & par les points *Z*, *M*, décrivez un grand cercle *ZEMV*: son intersection *E*, avec la ligne *TPEO*, déterminera les parties *PE*, *ZE*, équivalentes aux côtés requis du triangle proposé.

§. V. *Deux côtés d'un triangle sphérique, & l'angle adjacent à un de ces côtés étant donnés, trouver le reste.*

REMARQUE. C'est le côté auquel est adjacent l'angle donné, qui peut seul dans ce cas servir de fondement à l'opération.

Prenez sur la droite *APa*, *Fig.* 18, la partie *PZ*, équivalente à celui des côtés donnés, auquel est adjacent l'angle donné; puis ayant décrit le grand cercle *mhKXM*,

dont Z eſt le pole, prenez ſur ce cercle la partie hXM, meſure de l'angle donné, ou hm, meſure de ſon complément, & décrivez un grand cercle $mZEM$, par le point Z, & par l'un ou l'autre des points m, M; conduiſez enſuite l'alidade juſqu'à ce que ſon point E, qui eſt le terme de la partie PE, équivalente au ſecond côté donné, tombe ſur la circonférence $mZEM$, & le triangle propoſé ſera achevé.

Autrement: Prenez ſur la circonférence $AZPha$, *Fig.* 19, l'arc PZ, égal à celui des côtés donnés, auquel eſt adjacent l'angle donné; puis prenez ſur la ligne hXH, dont Z eſt le pole, la partie hXM, meſure de l'angle donné, & décrivez un grand cercle $ZEMV$, par les points Z, M; décrivez enſuite autour de P, comme pole, un arc DEd, du cercle qui a pour amplitude l'autre côté donné du triangle, l'interſection E de cet arc, avec le grand cercle $ZEMV$, détermine la partie ZE de ce cercle, qui eſt équivalente au troiſieme côté du triangle; & ce triangle ſera achevé, en décrivant le grand cercle $PEOt$, auquel appartiennent les points P, E.

§. VI. *Deux angles d'un triangle ſphérique, & le côté oppoſé à l'un de ces angles étant donnés, trouver le reſte.*

La ſolution de ce cas eſt donnée par la précécedente; par la raiſon qui a été alléguée ci-deſſus (& elle en dépend néceſſairement, lorſque le triangle n'eſt pas rectangle); car ſi on forme le triangle KIX, dont le côté IX ſoit égal, *Fig.* 18, ou équivalent, *Fig.* 19 à OA, meſure de l'angle donné EPZ, dont le côté IK ſoit équivalent à Tu; meſure de l'autre angle donné PEZ, dont enfin l'angle KXI ſoit meſuré par ha, égale ou équivalente au côté donné PZ; il eſt aiſé de voir que I, K, ſont les pôles des deux grands cercles $TPEO$, $ZEMV$, qui par leur interſection avec $AZPh$, forment le triangle ſphérique PEZ;

dont j'ai ſuppoſé qu'il falloit déterminer les côtés *PE*, *ZE*, & l'angle *EZP*.

SCHOLIE. Lorſqu'un des angles donnés eſt droit, ce cas peut encore recevoir une ſolution particuliere & directe, dont nous aurons un exemple dans le Chapitre ſuivant.



CHAPITRE PREMIER.

Solution de la plûpart des Problemes proposés dans la premiere Partie, par le moyen d'un Planisphere.

LE Planisphere construit sur le plan de l'équateur, est celui dont l'usage sera le plus commode; & il seroit à désirer qu'il s'étendît 29 ou 30 dégrés par-delà la circonférence de l'équateur, afin d'embrasser tout le zodiaque dans son étendue. Je suppose que les principales étoiles situées dans la partie du ciel à quoi il répond, y sont marquées dans leurs places respectives, & que le limbe de cet instrument, ainsi que l'écliptique, sont divisés de maniere, que le lieu du Soleil, & celui d'une planete quelconque, puissent aussi y être assignés pour tel tems qu'on voudra.

PROBLEME PREMIER.

La hauteur & l'angle azymuthal d'un astre étant donnés; ainsi que sa déclinaison, &c. trouver l'heure & la hauteur du pole.

Ce Probleme est dans l'espece du cinquieme cas du Lemme second de cette Partie. Pour le résoudre, prenez sur le planisphere, *Fig.* 18, la valeur *PE* du complément de la déclinaison de l'astre, & supposez que le point *P* est le lieu de l'astre, & *E* le pole, il faudra faire *PZ* équivalente au complément de la hauteur donnée, & l'angle *PZE* égal à l'angle azymuthal, &c. l'angle *PEZ*

sera l'angle horaire dans cette hypothese, & ZE le complément de la hauteur du pole, &c.

PROBLEME II.

Les hauteurs contemporaines de deux astres étant données, trouver l'heure de l'observation, la hauteur du pole, l'angle azymuthal de l'un ou de l'autre astre.

Soient E, E', *Fig.* 20, 21, 22, 23, les lieux des deux astres. Autour de ces points, comme poles, décrivez deux cercles $Zb\zeta$, $Zb'\zeta$, qui aient respectivement pour amplitudes, les complémens des hauteurs observées : ces cercles se couperont en deux points Z, ζ, dont l'un Z, marquera le point du ciel qui étoit au zénith, au moment de l'observation. L'alidade portée sur Z, représentera le méridien ; la différence d'ascension droite du point Z & du Soleil, donnera l'heure ; PZ sera la valeur du complément de la hauteur du pole, &c.

SCHOLIES. I. Lorsque les deux intersections des cercles $Zb\zeta$, $Zb'\zeta$, se trouveront de même part de l'équateur, les circonstances de l'observation feront connoître lequel de ces deux points indique le vrai zénith. Il faudra voir, par exemple, si les astres ont été observés de différens côtés du méridien, *Fig.* 20, ou de même part, *Fig.* 21, &c.

II. On a dû comprendre que deux planispheres sont nécessaires, l'un ayant le pole arctique pour centre, & l'autre le pole antarctique ; & il y aura des mêmes étoiles marquées sur l'un & sur l'autre de ces plans. Cependant il est possible, que l'opération requise pour ce Probleme, ne soit pas pratiquable directement ni sur l'un ni sur l'autre planisphere. C'est ce qui arrivera dans quelques-uns des cas où les deux astres observés, ou l'un des deux,

déclineront beaucoup du côté du pole abbaiſſé : car ſi on prend le planiſphere où eſt ce pole, le point du vrai zénith peut ne pas ſe trouver dans ſon étendue ; & ſi l'on prend l'autre planiſphere, on peut n'y pas trouver, ni ſur ſon alidade non plus, les deux centres propres G, G', des cercles $Zb\zeta$, $Zb'\zeta$, qui doivent être décrits autour des aſtres E,E', comme poles. Il faut en ce cas, réſoudre le Probleme par une opération indirecte, telle que celle-ci.

On ſuppoſera que le grand cercle ſur lequel eſt conſtruit le planiſphere, repréſente le cercle horaire de l'un des aſtres (E), *Fig.* 24, & y ayant pris un arc POE, égal à la diſtance de cet aſtre à l'un des poles, on décrira par le point P un arc $PO'E'$ de grand cercle, dont l'angle OPO' avec POE, ait pour meſure la différence donnée des aſtres E, E' en aſcenſion droite ; ainſi $PO'E'$ repréſentera une portion du cercle horaire de l'autre aſtre (E'), & ſi $PO'E'$ eſt équivalent à la diſtance de ce ſecond aſtre au pole P, E' ſera le lieu de cet aſtre, relativement à l'hypotheſe. Cela fait, on décrira autour des points E, E', comme poles, les cercles $Zb\zeta$, $Zb'\zeta$, définis ci-deſſus, & on fera paſſer par Z l'une de leurs interſections, & par P, un grand cercle PZA, qui repréſentera le méridien ; l'angle OPA, ou $O'PA$ de l'un des cercles horaires avec PZA, ſera donc l'angle horaire de l'un ou l'autre aſtre, au moment de l'obſervation, &c.

III. Si les obſervations des deux hauteurs ont été faites en des tems différens, dont l'intervalle ſoit connu, ſoient E, e' les lieux des deux aſtres obſervés. Décrivez une portion du parallele de l'un de ces aſtres, de l'aſtre e' par exemple, & prenez ſur ce parallele un arc $e'E'$, équivalent au tems écoulé entre les obſervations ; prenez, dis-je, cet arc, ou en avançant dans la direction du mouvement journalier, ou en retrogradant contre cette direction

tion

tion : il faut avancer, si la hauteur de l'astre e' a été prise avant celle de l'autre astre, rétrograder dans le cas contraire. Le point E' représentera le lieu d'un astre idéal, qui auroit été observé à la hauteur de l'astre réel e', au moment de l'observation de l'autre astre E. Ainsi prenez les points E, E', pour poles des cercles $Zb\zeta$, $Zb'\zeta$, & Z; l'une des intersections de ces cercles, marquera le point du ciel qui aura été au zénith, au moment de l'observation de l'astre réel E. On doit voir par-là ce qu'il faut faire, lorsqu'on a les observations de deux hauteurs différentes d'un seul astre.

PROBLEME V.

La hauteur du pole, celle d'un astre, & sa déclinaison étant données, trouver l'heure, &c.

Ce Probleme est tout résolu *Fig.* 18, par le §. I. du second Lemme de cette Partie, E marquant le lieu de l'astre, Z le zénith, &c.

PROBLEME VI.

La hauteur du pole, la déclinaison d'un astre, & son angle azymuthal étant donnés, trouver l'heure & la hauteur de l'astre.

Ce Probleme est tout résolu *Fig.* 18, par le §. V. du second Lemme, E marquant, non le pole comme on a supposé au Probleme premier, mais le lieu de l'astre, & EPZ son angle horaire, &c.

PROBLEME VII.

La hauteur du pole étant donnée, & deux astres dont les déclinaisons, &c. sont connues, étant vûs dans un même vertical, trouver l'heure de l'observation, l'angle azymuthal, &c.

Soient *E*, *E'* les lieux des deux astres, *Fig.* 25. Par ces points décrivez un grand cercle *ENFE'*, puis du centre *P*, & d'un rayon équivalent au complément de la hauteur du pole, décrivez un arc de cercle *Ziζ*, qui coupera le grand cercle *ENFE'* en deux points *Z*, ζ, dont l'un *Z*, montrera le point du ciel qui étoit au zénith au moment de l'observation. Les circonstances de cette observation feront connoître lequel des points *Z*, ζ, indique le vrai zénith. Au lieu de décrire l'arc *Ziζ*, il suffira de marquer sur l'alidade le terme *Z*, de sa partie équivalente au complément de la hauteur du pole, & de conduire cette piece jusqu'à ce que son point *Z* tombe sur la circonférence *ENFE'* en *Z* ou en ζ.

PROBLEME VIII.

La hauteur du pole étant donnée, & deux astres dont les déclinaisons, &c. sont connues, étant vûs dans un même almicantarath, trouver l'heure, &c.

Soient *E*, *E'* les lieux des deux astres, *Fig.* 26 : par ces points, décrivez un grand cercle *E'NEF*, puis ayant pris le milieu *N* de l'arc *ENE'*, décrivez par ce point & par le pole *Q* du cercle *E'NEF*, le grand cercle *Q*⊕*N*; il est aisé de reconnoître que ce dernier est un de ceux qui passoient au zénith au moment de l'observation, puisqu'il est perpendiculaire au cercle *E'NEF*, & que chacun de

ſes points eſt, ainſi que N, à une même diſtance des points E, E', qui ſont à une même hauteur. Ainſi ayant décrit du centre P un cercle $Zi\zeta$, dont l'amplitude ſoit égale au complément de la hauteur du pole ; ce cercle coupera le vertical $Q\phi N$ en deux points Z, ζ, dont l'un marquera le point céleſte qui étoit au zénith au moment de l'obſervation, & l'on conſiderera les circonſtances de cette obſervation, pour faire un bon choix entre les points Z, ζ.

PROBLEME IX.

Connoiſſant les déclinaiſons & les aſcenſions droites de quatre aſtres, dont deux ſont vûs dans un même vertical, & deux dans un autre, trouver l'heure, la hauteur du pole, &c.

Soient E, E', *Fig.* 27, les lieux des deux premiers aſtres ; ε, ε', les lieux des deux autres, ſi leur obſervation eſt contemporaine à celle de la premiere paire ; ou bien, ſoient ε, ε' les lieux des aſtres idéaux qui auroient paſſé au vertical de la deuxieme paire des aſtres réels au moment de l'obſervation de ceux de la premiere paire (ce qui doit être ſous-entendu pour tout aſtre, quand je ne l'aurois pas exprimé). Décrivez un grand cercle $ENE'F$ par les points de la premiere paire, & un autre grand cercle $\varepsilon'N'F'\varepsilon$ par ceux de la ſeconde. Ces cercles feront des verticaux, & leur interſection en Z, z, donnera les points du zénith & du nadir, pour le moment de l'obſervation de l'aſtre réel Z.



PROBLEME X.

Connoiſſant les déclinaiſons, &c. de quatre aſtres, dont deux ſont vûs dans un même almicantarath, & deux dans un autre, trouver l'heure, &c.

Soient E, E', & ε, ε', *Fig.* 28, les lieux des deux paires d'aſtres. Décrivez les deux grands cercles $Q\Phi ZN$, $Q'Z\Phi'N'$, qui ſont perpendiculaires aux grands cercles $E'NEF$, $\varepsilon N'\varepsilon'F'$, ſur leſquels ſont les points donnés E, E', & ε, ε', & qui ſont reſpectivement équidiſtans de ces points; ces cercles $Q\Phi N$, $Q'\Phi'N'$, ſeront des verticaux, par la raiſon rapportée au Probleme VIII, & leur interſection en Z, z, donnera le zénith & le nadir, pour le tems d'une des obſervations.

PROBLEME XI.

Connoiſſant les déclinaiſons, &c. de quatre aſtres, dont deux ſont vûs dans un même vertical, & deux dans un même almicantarath, trouver l'heure &c.

Soient E, E' (*Fig.* 29) les lieux des aſtres de la 1re paire, & ε, ε', ceux des aſtres de la deuxieme. Décrivez par les points E, E', un grand cercle $ENFE'$, & un autre grand cercle $Q'\Phi ZN'$, qui ſoit perpendiculaire au grand cercle $\varepsilon'N'\varepsilon F'$, ſur lequel ſont les autres points ε, ε', & qui ſoit équidiſtant de ces points; ces cercles $ENFE'$, $Q'\Phi N'$, ſont des verticaux, ainſi leur interſection donne le zénith pour le tems d'une des obſervations.

PROBLEME XII.

Connoissant les déclinaisons, &c. de trois astres, dont deux sont vûs dans un même vertical, & du troisieme desquels on a la hauteur, trouver l'heure, la hauteur du pole, &c.

Soient E, E', *Fig.* 30, les lieux des astres vûs à un vertical commun, & ϵ le lieu du troisieme astre. Ayant tracé le grand cercle $ENE'F$ par les points E, E', décrivez autour du point ϵ, comme pole, le cercle $Z\beta\zeta$, qui ait pour amplitude le complément de la hauteur donnée de l'astre ϵ; ce cercle coupera le premier en deux points, dont l'un Z représentera le zénith, pour le moment de l'une des observations.

PROBLEME XIII.

Connoissant les déclinaisons, &c. de trois astres, dont deux sont vûs dans un même vertical, dont on a l'angle avec le vertical du troisieme astre, trouver l'heure, la hauteur du pole, &c.

Pour la solution de ce Probleme, il faut trouver par préalable le complément $E\epsilon$, *Fig.* 30, de la hauteur de l'astre ϵ, qui est solitaire sur son azymuth, ou plutôt le complément ZR de la hauteur du point d'intersection R du grand cercle $ENE'F$ avec le grand cercle $Q\epsilon R$, qui y est perpendiculaire, & passe par le point ϵ. Décrivez d'abord ce cercle $Q\epsilon R$, ce qui est très-facile, puisque Q est le pole du cercle $ENE'F$, & vous aurez $Q\epsilon$ complément du côté ϵR du triangle rectangle ϵRZ, avec l'angle ϵZR ou $M'ZM$, opposé à ce côté ϵR. C'est ce triangle ϵRZ, dont on connoît trois élémens, qu'il s'agit d'achever de construire : mais cela ne se peut qu'indirecte-

ment ; il faut faire pour cela une figure particuliere, telle que la *Fig.* 50 ou 51.

Prenez un quart, ou l'équivalent $qm'n$ d'un quart de circonférence de grand cercle, dont z marque le pole : décrivez par ce point des cercles mrz, $m'\epsilon z$, qui faffent un angle égal à celui MZM', qui eft donné par l'obfervation ; puis tracez un arc $f\epsilon$ du parallele à mrz, lequel ait pour amplitude $q\epsilon$, égale au complément $Q\epsilon$, trouvé dans la *Fig.* 30 ; enfin par l'interfection ϵ des cercles $f\epsilon$, $m\epsilon z$, & par q, pole du cercle mrz, décrivez le grand cercle $q\epsilon r$; vous aurez rz pour valeur de l'arc RZ requis, *Fig.* 30., & vous y déterminerez ainfi le point Z du zénith, &c.

PROBLEME XIV.

Connoiffant les déclinaifons & les afcenfions droites de deux aftres, avec l'angle de leurs azymuths, au moment où ils font vûs dans un même almicantarath, trouver l'heure, &c.

Soient E, E', les lieux de ces aftres, *Fig.* 26 ; le vertical $Q\Phi ZN$, dont les points E, E' font équidiftans, eft déterminé, & ce grand cercle divife par la moitié l'angle donné des azymuths des points E, E' ; on connoît donc au triangle rectangle ENZ deux élémens, outre l'angle droit, fçavoir le côté EN, moitié de la diftance des deux aftres, & l'angle EZN oppofé à ce côté ; & l'on eft, quant à ce triangle ENZ, dans le même cas que celui du Probleme précédent, pour le triangle ϵRZ : ainfi on obtiendra la folution défirée, par un procedé pareil à celui qui a donné RZ.

PROBLEME XV.

La hauteur d'un astre, & l'angle de son azymuth avec celui d'un autre astre étant donnés, ainsi que leurs déclinaisons, &c. trouver l'heure, & la hauteur du pole, &c.

Soit E', *Fig.* 20, 21, 22, 23, le lieu du premier astre, & E celui du second : on connoît donc trois élémens du triangle EZE', sçavoir EE' distance des deux astres, $E'Z$ complément de la hauteur de l'astre E', & l'angle EZE' compris entre les azymuths ZEM, $ZE'M'$, lequel est opposé au côté EE' (c'est l'espece du cinquieme cas du second Lemme de cette Partie); mais ce triangle ne peut pas être résolu directement sur la Figure qui donne $E'E$, il faut en faire une particuliere, telle que la 18 ou la 19, où vous supposerez que P représente l'astre E', & que PE équivaut par conséquent à $E'E$, & PZ à $E'Z$: vous déterminerez par l'opération marquée au §. V. du second Lemme, le troisieme côté EZ du triangle en question, ou bien l'angle EPZ, qui est le même que $EE'Z$, & avec l'un ou l'autre de ces élémens, vous serez en état de trouver le sommet Z du triangle EZE', *Fig.* 20, 21, 22, 23, puisque vous aurez ou bien la valeur des trois côtés de ce triangle, ou la valeur de deux côtés, & de l'angle qu'ils comprennent, ce qui est le cas du §. I, ou du §. III du Lemme cité.

Telles sont les opérations que j'avois à proposer. On reconnoît sans doute qu'elles sont faciles & expéditives : il n'est pas besoin que j'insiste sur ce point, mais il en est un sur lequel je dois m'arrêter avant que de finir ce Chapitre, sçavoir sur la qualité que j'ai attribuée à ces opérations ; de n'être pas sujettes à un grand défaut ; d'être peu inférieures en justesse au résultat du calcul. Je ne sçais si cha-

cun en conviendra : on estime peu les opérations méchaniques en comparaison du calcul ; on s'en défie, & peut-être quelques personnes sont-elles prévenues trop généralement contre ce genre d'opérations. Pour moi je crois qu'on doit distinguer méchanique & méchanique ; il faut donc entrer en quelque discussion sur ce point.

On pourroit, par exemple, se prévaloir contre ce que j'ai avancé, d'une autorité que j'avoue être d'un très-grand poids, sçavoir celle de M. Bouguer, ce Sçavant si versé dans les matieres Astronomiques. Cet illustre Auteur de la Piece qui a remporté le Prix de 1731, *sur la méthode d'observer en mer la déclinaison ou variation de la Boussole*, traite dans la deuxieme Partie de cet excellent Ouvrage, *des moyens de déterminer cette variation*, par l'observation d'un astre, c'est-à-dire, des moyens de trouver l'angle azymuthal de quelque astre ; & après avoir assigné trois especes d'observations qui donnent cet angle avec facilité, il tourne ses réflexions sur le cas où l'on n'auroit pas eu la commodité de faire aucune de ces observations, mais où on en auroit fait quelqu'autre. » Il faudra alors » (dit le judicieux Astronome) avoir recours au calcul, » pour trouver par la Trigonométrie Sphérique (ou au- » trement), le vrai azymuth. Il n'y a gueres lieu d'espe- » rer (ajoûte-t-il) qu'on puisse éviter la longueur de l'opé- » ration, *en se servant de quelques figures*, ou en employant » quelques instrumens particuliers. On ne peut toûjours » parvenir, *par tous ces moyens*, qu'à une détermination » *trop grossière*, & trop éloignée d'une certaine exacti- » tude. »

Voilà ce qu'on peut m'opposer. Je remarque pour réponse, que dans la suite de l'article cité, M. Bouguer parle seulement de ces *instrumens particuliers*, qui donnent tout d'un coup la situation du méridien, & je conviens

que

que l'usage en est blâmable avec grande raison. (Outre les inconvéniens de ces instrumens, on doit considérer que l'usage en est trop borné, parce qu'il suppose que la hauteur du pole est connue). Mais il y a, ce me semble, une différence non-légere entre ces pratiques rejettées spécialement par M. Bouguer, & celles que j'ai proposées, quoique celles-ci consistent à *se servir de quelques figures*, & qu'elles soient ainsi enveloppées dans la censure générale portée par le sçavant Géometre.

1°. Le plus parfait de ces instrumens particuliers, qui étant exposé au Soleil, montre la situation du méridien, *sera toûjours sujet à quelques défauts dans sa construction particuliere.* (Ces défauts sont les mêmes pour le moins, que ceux que M. Bouguer a justement relevés dans l'Arbalestrille, *Part.* I. *Ch.* IV §. *32*, de la Piece qui a mérité le prix de 1729, touchant la méthode d'observer exactement sur mer la hauteur des astres: car un demi-cercle mobile, qui entre dans la composition de cet instrument, le plus propre à montrer la situation du méridien, & dont l'ombre doit être observée, peut *n'être pas bien perpendiculaire à la fleche*, ou regle qui le porte, &c.)

2°. *On n'a point d'égard à la réfraction dans l'usage de ces instrumens.* Ce sont des remarques de M. Bouguer même.

3°. Ces instrumens ne peuvent être que petits, ils auroient trop de poids s'ils étoient grands. M. Bouguer qui a bien voulu prendre la peine de marquer la forme de celui qui seroit le meilleur, ne donne que 9 ou 10 pouces de rayon au demi-cercle, dont l'ombre doit être observée (encore est-ce beaucoup, & je pense qu'un instrument fait sur cette proportion, seroit bien plus pesant qu'un grand Quartier Anglois). Ainsi la distance du bord qui jette l'ombre au point qui doit la recevoir, est fort petite, & cela entraîne le même inconvénient, que celui

auquel eſt ſujet le Quartier Anglois, dont l'arc qui porte la pinnule expoſée au Soleil, eſt d'un moindre rayon que l'arc par lequel viſe l'Obſervateur; inconvénient ou *défaut* que M. Bouguer a traité de *conſidérable*, & prouvé tel, *Part.* I. *Ch.* IV. *§.* 33. de la Piece qui a remporté le Prix de 1729.

4°. Ajoûtons que la partie d'ombre que l'on doit faire tomber ſur certain point de l'inſtrument particulier dont il s'agit, eſt très-difficile à diſcerner; car cette partie d'ombre eſt celle qui répond au centre du Soleil, & elle appartient à une pénombre dont les limites verticales ſont trop peu ſenſibles, ainſi que le même Auteur le démontre, §. 37, de la Piece citée de 1729.

Voilà déja quatre chefs, eu égard auxquels M. Bouguer a pû juger très-juſtement, que *l'on ne parviendroit qu'à une détermination trop groſſiere* du méridien, à l'aide des inſtrumens particuliers dont il s'agit. Mais quand tous ces inconvéniens ceſſeroient, il en reſte néceſſairement un cinquieme, qui eſt conſidérable, lorſque le pole a certaine hauteur, & qui ſuffiroit ſeul pour vicier la détermination qu'on prétendroit faire avec ces inſtrumens particuliers. Ce chef eſt peut-être indiqué, mais confuſément, dans une remarque de l'art. cité de la piece de 1731, *pag.* 34, ſçavoir, que *l'on obſerve d'une maniere implicite la hauteur du Soleil, & ſon azymuth*, par ces inſtrumens, *& que comme on eſt toûjours expoſé à commettre ces erreurs inévitables qui ſe trouvent dans toutes les opérations, elles doivent être ici à peu près les mêmes, que lorſqu'on cherche la hauteur d'un aſtre & ſon azymuth, par le moyen d'un Quartier Anglois.*

Voici le point. Selon une autre remarque importante de M. Bouguer, *Part.* III. *Art.* VIII. *pag.* 52 de cette Piece de 1731, *il y a en mer grande difficulté de mettre un*

instrument dans une situation exactement verticale, en regardant l'horison sensible....; il est très-facile de se tromper, c'est-à-dire, d'écarter le plan de l'instrument de la situation verticale, *de 25 ou 30 minutes, & même de 40 ou 50, sans qu'on s'en apperçoive*. Or cette erreur, lorsqu'on se sert du Quartier Anglois, pour prendre la hauteur & l'azymuth d'un astre, en produit une sur la position de cet azymuth, qui est plus ou moins grande, suivant que l'astre est plus ou moins élevé. Si l'on nomme I la tangente de la quantité dont l'instrument est éloigné de la situation verticale, & $H = \frac{rh}{k}$ la tangente de la hauteur de l'astre; le sinus de la quantité dont on s'éloigne de son vrai azymuth, est précisément égal à $I \frac{H}{r} = I \frac{h}{k}$. Au reste on a communément la liberté d'observer un astre peu élevé, & d'exténuer par conséquent le mauvais effet de l'inclinaison du Quartier Anglois. Que si l'on employoit l'instrument particulier décrit par M. Bouguer, *Part.* II. *Art.* VII, de la Piece de 1731, l'inclinaison *inévitable* de cet instrument, produiroit aussi une erreur dans la détermination du méridien: mais cette erreur ne dépend point dans sa quantité du plus ou du moins de hauteur du luminaire, elle dépend de la hauteur du pole, nommant i le sinus de la quantité dont l'instrument est éloigné de la situation verticale, & $S = \frac{rs}{c}$ la tangente de la hauteur du pole; la tangente de ce dont on s'écarteroit du méridien, seroit égale, tout le reste étant correct, à $i \frac{S}{r} = i \frac{s}{c}$, quantité considérable, lorsque le pole a certaine hauteur.

Concluons donc hardiment, qu'*il vaut infiniment mieux déterminer la hauteur & l'azymuth d'un astre bien situé*, par

le moyen d'un instrument simple, tel que le Quartier Anglois, *& déduire le reste par supputation*, *que de vouloir le trouver par la seule construction d'un instrument* composé de plusieurs pieces, puisque cet instrument est d'autant plus fautif, qu'il est plus compliqué, & que l'on seroit exposé, dans son usage, à une erreur double ou triple, pour le moins, de celle qui naît du défaut qui peut se glisser dans une observation simple.

Mais que faut-il penser du résultat d'une observation simple, trouvé par quelques figures subsidiaires à la supputation ? Qu'on rejette encore cette pratique, j'y consens, si les figures sont petites, mais si elles sont grandes, je n'y vois pas d'inconvénient fort grave. Par exemple, si on donnoit 21 pouces de rayon à l'équateur *AOXax* du planisphere (ce qui est un peu moins que celui qu'on donne au Quartier Anglois), les dégrés seroient sur ce cercle d'environ quatre lignes deux cinquiemes, & l'on pourroit y marquer leurs vingt-quatriemes parties (les degrés auroient à la vérité une fois moins d'étendue auprès du centre de l'instrument). Cela posé, se trouveroit-il tant d'erreur dans la construction de l'instrument, en commettroit-on tant d'ailleurs, soit sur le centre propre *G* d'un cercle *Zbζ*, *Fig.* 20, 21, 22, 23, soit sur son rayon, que le trait de la circonférence de ce cercle s'écartât de plus de 4 ou 5 minutes du lieu où il devroit être ? c'est-à-dire, seroit-on exposé dans le cas du Probleme second, à faire le complément *ZE* de la hauteur d'un astre, de 4 ou 5 minutes plus grand ou moindre sur le planisphere, qu'on ne l'a trouvé par l'observation ? Ce seroit beaucoup, ce me semble ; supposons néanmoins cette erreur de 5 minutes, ce qui est un douzieme de degré. Or selon M. Bouguer, *Part.* III. *Art.* XII. *pag.* 62, de la Piece citée de 1731, *on doit supposer de* 15 *minutes*, *l'erreur que d'ha-*

biles marins peuvent commettre dans l'obſervation de la hauteur d'un aſtre, faite lorſque cet aſtre *en change ſenſiblement* (& nous verrons dans la ſuite, que c'eſt dans cette circonſtance qu'une obſervation de hauteur détermine l'heure le plus ſûrement.) L'erreur totale dans la hauteur attribuée à l'aſtre ſur le planiſphere, pourra donc être de 20 minutes, & l'erreur qui naîtra de celle-là, dans la détermination de l'heure, ſera plus grande d'environ un tiers en ſus, que celle qui ſe trouvera dans la détermination exécutée par le calcul. * Si l'erreur de celle-ci va, par exemple, à une minute & demie de tems, l'erreur de celle-là pourra être de deux minutes, & n'ira gueres au-delà.

Je laiſſe à juger ſur cela, de la grandeur qu'on devra donner au rayon de l'équateur du planiſphere. J'obſerve ſeulement qu'il faut que ce cercle ſoit tracé ſur du métal, & que l'alidade ſoit pareillement de métal, afin que leurs diviſions ſoient plus exactes. Il me ſemble au reſte, que pour ne point maculer l'inſtrument, par les divers traits que chaque détermination requerera, on pourra le couvrir d'un papier fin & tranſparent, ſur lequel on fera ces traits.

* Je mets en même proportion les erreurs ſur la hauteur, & les erreurs ſur l'heure, trouvées par les deux voies différentes, parce que l'erreur particuliere commiſe ſur la hauteur, en employant le planiſphere, eſt la ſeule qui doive entrer ici en conſidération. Je regarde toute autre mépriſe comme fort legere, ou bien comme acccidentelle, dans le cas pris pour exemple, & je la ſuppoſe évitable, lorſque les obſervations ſont combinées avantageuſement : telle eſt la mépriſe qu'on peut commettre, faute de bien diſcerner le vrai point d'interſection des cercles *Zbζ*, *Zb'ζ*. Ce genre d'erreur n'eſt pas à négliger abſolument, je l'avouë, mais il concerne une autre matiere de conſidération. Si l'on y étoit expoſé à un dégré non-leger, ce ſeroit un ſigne que la combinaiſon des obſervations ſeroit déſavantageuſe à quelque égard en ſe ſervant même du calcul.

CHAPITRE II.

Moyens de ſimplifier les calculs pour l'invention de l'heure, ſolution des Problemes XV. & XVI, laiſſés I. Partie.

QUOIQUE j'aie propoſé de ſe ſervir de figures ſubſidiaires au calcul, je ſuis bien éloigné d'eſtimer cette pratique au-dela de ſa juſte valeur; je ne prétends point qu'on doive s'en contenter. Je reconnois ſi bien l'importance du calcul, que je reviens à cette voie exacte, & que je vais m'appliquer à y procurer toute la ſimplicité & la facilité poſſibles.

Je porte d'abord mes réflexions ſur le Probleme VII. On doit remarquer dans la *Fig.* 25, qui répond à ce Probleme, que le grand cercle *ENFE'*, ſur lequel ſont deux aſtres, a quelque point *F* plus voiſin du pole que tous les autres qui ſont de même part de l'équateur, & ce point eſt celui où le cercle *ENFE'* eſt coupé par le cercle horaire *QPF*, qui y eſt perpendiculaire. Si on connoiſſoit donc l'aſcenſion droite du point *F*, & l'arc *PF*, dont je nomme le ſinus y', la tangente Y', le coſinus x', &c. (& ce ſont choſes faciles à découvrir). Le Probleme dont il s'agit ſeroit très-aiſé à réſoudre par le calcul, car on obtiendroit l'angle horaire *FPZ*, par une ſimple analogie.

Soit t' le ſinus de cet angle, u' ſon coſinus. On connoît, je le ſuppoſe, au triangle *PFZ*, outre ſon angle en *F*, deux élémens; ſçavoir le côté *PF*, & *PZ* dont *S* eſt cotangente, & on demande l'angle *FPZ*, compris entre les côtés donnés; ainſi on eſt dans un cas de la quatrieme

classe (cas pareil à celui qui est régi par la troisieme formule du premier Lemme de la premiere Partie). On a donc, $cotang.\ PFZ \times t' + y'S = u'x'$. Mais l'angle PFZ étant droit comme on l'a remarqué, sa cotangente est zéro; & il reste $u' = \frac{y'}{x'} S = \frac{Y'S}{r}$. * Cette valeur de u' est plus simple assûrément que celle qui résulte pour t (sinus de l'angle EPZ) de l'équation du second degré,

$$(rrX'X' - 2rbX'X + rrXX)\,cctt \left.\begin{matrix} -2rX' \\ +2bX \end{matrix}\right\} r^2acst \left.\begin{matrix} +r^4aass \\ -rraaccXX \end{matrix}\right\} = 0, \text{ ou}$$

$$(rrX'X' - 2rbX'X + rrXX)\,tt \left.\begin{matrix} -2rX' \\ +2bX \end{matrix}\right\} raSt + rraa(SS - XX) = 0,$$

trouvée dans la premiere Partie.

J'ai dit que l'arc PF, & que l'ascension droite du point F, sont faciles à découvrir (& je vais le montrer). Il y a plus, dans le cas où les deux astres vûs ensemble sont des fixes, on peut égargner aux Navigateurs la peine de chercher ces choses & autres semblables, en formant des Tables où elles soient marquées. Ces Tables seroient peut-être assez utiles pour mériter qu'on y travaillât, car la même chose peut servir non-seulement à plusieurs Navigateurs, mais en plusieurs circonstances, comme l'on verra dans la suite : il ne resteroit donc au Marin à calculer l'ascension droite, & la distance du point F au pole, que lorsque l'un des astres observés seroit une planete, ou bien lorsqu'il y auroit eu de l'intervalle entre les observations.

* On peut encore trouver cette valeur de u' par un petit circuit, en considérant que lorsque le cercle $ENE'F$ est vertical, son point F est à sa plus grande digression, & s'éleve perpendiculairement à l'horison XMK, parce que sa route étant perpendiculaire au cercle horaire PF, elle concourt avec une petite portion du vertical $ENE'F$. Par conséquent, selon ce qu'on a vû (premiere Partie) le sinus h de la hauteur FM du point F, est égal à $\frac{rs}{x'}$. Cette valeur de h étant substituée dans la formule $rrh - rsx' = cy'u'$, on a $rs(rr - x'x') = cx'y'u'$, ou bien $rsy' = cx'u'$, d'où on déduit $u' = \frac{y'}{x'} \cdot \frac{rs}{c} = \frac{Y'S}{r}$.

Voici ce qu'il faudra faire alors, & en attendant que les Tables proposées soient construites.

Les complémens PE, PE', des déclinaisons des deux points E, E', étant donnés avec leur différence d'ascension droite, différence qui est mesure de l'angle EPE', & dont les sinus & cosinus ont été nommés ci-devant a, b, il faut chercher 1°. l'un ou l'autre des angles PEE', $PE'E$; je nomme le sinus du premier l, sa tangente L, son cosinus λ, sa cotangente Λ. Cela posé, on est dans un cas de la quatrieme classe, & on a $a\Lambda \pm yX' = bx$, d'où on déduit $\Lambda = \frac{bx \mp yX'}{a}$.

2°. L'angle PEE' étant connu, on peut trouver PF par une simple analogie; car outre l'angle droit on a deux élémens du triangle rectangle EFP, sçavoir l'hypothenuse PE, & l'angle PEE' ou PEF, opposé au côté désiré, ce qui est un cas de la troisieme classe; on a donc $y' = \frac{yl}{r}$.

3°. la différence d'ascension droite des points E, F, est mesure de l'angle EPF du même triangle rectangle EFP; je nomme son sinus g, son cosinus γ, sa cotangente Γ, &c. On trouvera cet angle par quelqu'une de ces équations très-simples: $\Gamma = \frac{xL}{r}$, $\gamma = \frac{Y'X}{r}$, $g = \frac{rl}{x'}$.

Observons que le Navigateur ayant connu l'angle PEE', pourroit se dispenser de chercher PF, & trouver l'angle horaire EPZ du point E, en résolvant par la regle de Trigonométrie, le triangle obliquangle PEZ, dont il a trois élémens, sçavoir les côtés PE, PZ, & l'angle PEE' ou PEZ, opposé à un de ces côtés. La regle consiste à chercher d'abord l'angle EPF, par l'équation $\Gamma = \frac{xL}{r}$, qui en donne la cotangente, puis à chercher l'angle FPZ du triangle

du triangle rectangle PFZ par cette équation.* Cosin. $FPZ = \frac{\gamma Y}{C} = \frac{\gamma YS}{rr}$, la somme ou la différence des angles EPF, FPZ, sera l'angle horaire requis du point E.

Voici les choses dont on pourroit former des Tables, & en même tems la maniere de les trouver. 1°. La distance EE' ou $\epsilon\epsilon'$, *Fig.* 20, 21, &c. de deux étoiles qui peuvent être observées conjointement. Pour trouver cette distance (dont j'ai nommé ci-devant le sinus δ, & le cosinus β), posé qu'on ne l'ait pas déja dans les catalogues d'étoiles, on est dans un cas de la premiere classe, à l'égard du triangle EPE', & on a $\beta = \frac{yy'b}{rr} \pm \frac{xx'}{r}$. b est le cosinus de la différence d'ascension droite des deux étoiles.

2°. L'angle PEE' du cercle horaire d'une de ces étoiles, avec le grand cercle $ENEF$, qui leur est commun. EE' étant connue au triangle EPE', on est dans un cas de la troisieme classe, pour trouver son angle PEE', & on a $l = \frac{y'a}{\delta}$.

3°. La moindre distance FP du cercle $ENEF$ au pole: on vient de voir que le sinus y' de cette distance $= \frac{yl}{r}$.

4°. L'ascension droite du point F, ou bien l'angle EPF: on l'aura, comme j'ai déja dit, par une des équations $\Gamma = \frac{xL}{r}$, $\gamma = \frac{YX}{r}$.

5°. On peut ajoûter l'arc EF: cet arc sera trouvé par quelqu'une de ces équations, *sin.* $EF = \frac{yg}{r} = \frac{\lambda Y'}{r}$, *tang.* $EF = \frac{y'G}{r} = \frac{\lambda Y}{r}$.

* Le fondement de cette équation est que PF est un côté commun aux deux triangles rectangles EFP, ZFP; ainsi on a ces deux analogies : $r : Y :: \gamma : Y'$, $r : C ::$ cos. $FPZ : Y'$; donc $\gamma Y = rY' = C$ cos. FPZ, &c.

La diſtance de deux étoiles eſt une choſe invariable. Les autres choſes que j'ai marquées, ſont ſujettes à une petite variation, à cauſe du mouvement lent de l'axe terreſtre autour des poles de l'écliptique. Pour remédier à cela, il faudra donner dans la Table les changemens que ces quantités variables reçoivent en certain nombre d'années.

SCHOLIES. I. L'équation du ſecond degré, rapportée ci-deſſus, pour t ſinus de l'angle EPZ, s'accorde ſi bien avec celle qu'on a vûe pour u', que celle-ci peut être déduite de celle-là. Pour le montrer, je remarque 1°, que le coëfficient $rrX'X' \pm 2rbX'X + rrXX$, que peut avoir tt dans cette équation, eſt égal à $\frac{r^4aa}{Y'Y'}$.*

2°. $X = \frac{r\gamma}{Y'}$, & par conſéquent $XX = \frac{rr\gamma\gamma}{Y'Y'}$; car on a au triangle rectangle EFP, $r : \gamma :: X' = \frac{rr}{Y'} : X$.

3°. $X' = \frac{b\gamma \pm ag}{Y'}$; car le triangle $E'FP$ étant rectangle, on a $r : cof. E'PF :: X' = \frac{rr}{Y'} : X' = \frac{r. cof. E'PF}{Y'}$; or par le ſecond Lemme de la premiere Partie, $r. cof. E'PF = b\gamma \pm ag$.

* Cela eſt facile à trouver; car on a cette proportion : $Y'Y' : rr :: y'y' : x'x' = rr - y'y'$. Or $y'y' = \frac{yy\,ll}{rr}$, donc $\frac{rr}{Y'Y'} = \frac{x'x'}{y'y'} = \frac{r^4 - yy\,ll}{yy\,ll} = \frac{1}{yy} \times \frac{r^4}{ll} - 1$. On a d'ailleurs cette proportion, $\Lambda\Lambda : rr :: rr - ll : ll$, ou bien $rr + \Lambda\Lambda : rr :: rr : ll$; donc $\frac{r^4}{ll} = rr + \Lambda\Lambda$, & $\frac{rr}{Y'Y'} = \frac{rr + \Lambda\Lambda - yy}{yy} = \frac{xx + \Lambda\Lambda}{yy}$. Or, $\Lambda\Lambda = \frac{bb\,xx \pm 2bX'xy + yy\,X'X'}{aa}$, donc $\frac{rr}{Y'Y'} = \frac{aa\,xx + bb\,xx}{aayy} \pm \frac{2bX'x}{aay} + \frac{X'X'}{aa}$. Multipliant donc tout par $rr\,aa$, ſubſtituant rr à $aa + bb$, & X à $\frac{rx}{y}$, on trouve enfin, $\frac{r^4aa}{Y'Y'} = rr\,XX$, &c.

Les trois quantités qu'on vient de voir étant ſubſtituées dans l'équation pour t, & ayant tout multiplié par $Y'Y'$, elle devient :

$$r^4aatt - 2rrab\gamma SY't \mp 2rraagSY't + rraaSSY'Y' = rraarr\gamma\gamma.$$
$$+ 2rrab\gamma SY't$$

Deux termes où t eſt linéaire, ſe détruiſent mutuellement, & tous les autres ſont diviſibles par $rraa$, ainſi il reſte :

$$rrtt \mp 2gSY't + SSY'Y' = rr\gamma\gamma.$$

Subſtituant $gg + \gamma\gamma$ à rr, on a :

$$ggtt \mp 2gtSY' + SSY'Y' = \gamma\gamma rr - \gamma\gamma tt = \gamma\gamma uu.$$

Donc $gt \mp SY' = \gamma u$, ou bien $SY' = \gamma u \pm gt = ru'$.

II. Si l'on veut avoir l'angle azymuthal PZM, *Fig.* 25, on l'obtiendra par une ſimple analogie, & même ſi l'on veut, ſans avoir l'angle horaire ; on l'obtiendra, dis-je, par quelqu'une de ces formules :

$$m = \frac{ry'}{c},\ n = \frac{t'x'}{r},\ N = \frac{ST'}{r}.$$

PROBLEME VIII.

Où deux aſtres ſont vûs à une même hauteur, Fig. 26.

Ce Probleme nous arrêtera peu. Je ſuppoſe qu'on a par des Tables, ou autrement, l'arc $NF = EF \pm \frac{EE'}{2}$ meſure de l'angle PQZ, & qu'on connoît encore un autre élément du triangle obliquangle ZPQ, ſçavoir PQ complément de PF, outre PZ complément de la hauteur du pole. On peut donc réſoudre ce triangle par la regle de trigonométrie. La regle conſiſte à faire $P\Phi$ perpendiculaire ſur QZN, & à chercher d'abord l'angle $QP\Phi$ par cette équation : $cotang.\ QP\Phi = \frac{y' \times tang.\ NF}{r}$, puis l'angle

ΦPZ par cette autre équation : $cof.\ \Phi PZ = \frac{X' cof.\ QP\Phi}{C} = \frac{X'S}{rr}\ cofin.\ QP\Phi$. La fomme ou la différence des angles $QP\Phi$, ΦPZ, fera l'angle horaire du point Q, dont l'afcenfion droite differe de 180 degrés de celle du point F, que je fuppofe connue.

PROBLEME XI.

Où deux aftres font vûs dans un même vertical, & deux autres dans un autre vertical, Fig. 27.

Je nomme encore u' le cofinus de l'angle horaire du point F. Soit u'' celui de l'angle horaire du point F', Y'' la tangente de PF'; p', q', le finus & le cofinus de l'angle FPF'. Nous avons $ru' = Y'S$, & $ru'' = Y''S$: donc $\frac{ru'}{Y'} = S = \frac{ru''}{Y''}$, & $u'' = \frac{u'Y''}{Y'}$. Or, par le fecond Lemme de la premiere Partie $ru'' = q'u' \pm p't'$, ou $ru'' \pm q'u' = p't'$, & $rru''u'' \pm 2rqu'u'' + q'q'u'u' = p'p't't' = rrp'p' - p'p'u'u'$, d'où (à caufe de $p'p' + q'q' = rr$) on déduit $rru''u'' \pm 2rq'u'u'' + rr\,u'u' = rrp'p'$. Subftituant dans cette formule les valeurs de u'' & de $u''u''$, & multipliant tout par $Y'Y'$, on a $u'u' = \frac{rrp'p'Y'Y'}{rrY'Y' \pm 2rq'Y'Y'' + rrY''Y''}$, & $u' = \frac{rp'Y'}{\sqrt{(rrY'Y' \pm \&c.)}}$. En reprenant l'équation $ru' = Y'S$, on a :

$$S = \frac{rrp'}{\sqrt{(rrY'Y' \pm 2rq'Y'Y'' + rrY''Y'')}}.$$

Si on ne trouve pas ces valeurs de u', S, affez commodes, à caufe du figne radical qui s'y rencontre, voici encore une folution plus fimple.

En comparant la formule qu'on vient de voir pour S,

& celle-ci $\frac{r^4 aa}{Y'Y'} = rrXX \pm 2rbXX' + rrX'X'$, qu'on a vûe au Probl. VII, en comparant encore le triangle QPQ' au triangle EPE', on doit reconnoître que les deux formules sont semblables, & relatives à des lignes homologues. Y' est la tangente de PF, perpendiculaire à la base $E E'$ du triangle EPE', menée par le sommet P de l'angle opposé à cette base, lequel a pour sinus & cosinus a, b, & est compris entre des côtés dont X, X' sont les cotangentes : de même S est la tangente de Ph, perpendiculaire à la base QQ' du triangle QPQ', menée par le sommet P de l'angle opposé à cette base, lequel a pour sinus & cosinus p', q', & est compris entre des côtés dont $Y'\,Y''$ sont les cotangentes. Ainsi, comme on a vû qu'on peut avoir PF autrement que par la valeur algébrique, de sa tangente où le signe radical se rencontre ; c'est-à-dire, qu'on peut avoir PF par deux opérations simples & subordonnées, on peut trouuer Ph par un procedé semblable.

Il faut déterminer d'abord l'angle PQQ', par sa relation avec les trois élémens donnés, qui sont l'angle QPQ', & les côtés qui le comprennent, lesquels ont x', x'', pour sinus ; c'est un cas de la quatrieme classe, & on a $p' \times$ cotang. $PQQ' \pm x'Y'' = q'y'$, d'où on déduit cotang. $PQQ' = \frac{q'y' \pm x'X''}{p'}$. L'angle PQQ', ou PQh étant connu, on a Ph par cette analogie, $r : x' :: \mathit{sin.}\ PQh : S$. Enfin la hauteur du pole Ph étant connue, on aura u' par sa valeur $\frac{Y'S}{r}$.

Je ne m'arrêterai point aux Problemes XII & XIII. On s'apperçoit sans doute, que si $P\phi$ perpendiculaire sur QZN, *Fig.* 29 (dont Pz est complément) est connue, ainsi que PF perpendiculaire sur $ENFE'$, avec l'ascension

droite des points Φ, F, on eſt en état de proceder pour le Probleme XIII, de la même maniere qu'on vient de faire au Probl. XI. Je remonte au Prob. II.

PROBLEME II.

Où les hauteurs de deux aſtres ſont données, Fig. 20, 21, 22, 23.

Je ſuppoſe l'arc EE' connu au triangle EPE', avec l'un ou l'autre des angles PEE', $PE'E$. Cela ne requiert que deux petites opérations, poſé qu'on ne l'ait pas par des Tables. On a donc trois élémens du triangle obliquangle EZE', ſçavoir ſes trois côtés ; ainſi on peut trouver l'un ou l'autre de ſes angles en E, E', c'eſt un cas ſimple de la premiere claſſe. (Soit PEE' l'angle connu au triangle EPE', c'eſt l'angle ZEE' qu'il faut chercher.) On a, en conſervant les dénominations employées ci-devant, $rrh' \underline{+} r\beta h = \delta k \times cof. ZEE'$: d'où réſulte $cof. ZEE' = \frac{rrh'}{\delta k} \underline{+} \frac{r\beta}{\delta} \times \frac{h}{k}$. (Ce deuxieme terme eſt réductible à une expreſſion plus ſimple, ſçavoir au produit de la tangente de la hauteur du point E, & de la cotangente de l'arc EE' diviſé par le rayon.)

Ayant ajoûté les angles connus PEE', ZEE', *Fig.* 20, 22, ou ayant retranché l'un de l'autre, *Fig.* 21, 23, on aura l'angle PEZ, & on a déja par l'hypotheſe deux autres élémens du triangle EPZ, ſçavoir les côtés qui comprennent l'angle PEZ : la relation de ces élémens avec le troiſieme côté PZ du triangle, détermine ce côté ou bien ſon complément, qui eſt la hauteur du pole ; c'eſt un cas de la premiere claſſe, & on a $rrs \underline{+} rxh = yk \times cof. PEZ$. La hauteur du pole étant connue, on eſt dans un cas de

la troisieme classe pour l'angle horaire EPZ, & on a $z = \frac{k\, fin. PEZ}{c}$.

On peut aussi changer l'ordre qui vient d'être suivi; c'est-à-dire, trouver l'angle horaire de l'astre E avant la hauteur du pole, on est dans un cas de la quatrieme classe pour l'angle horaire: on a, en prenant V pour la cotangente de cet angle, & H pour la tangente de la hauteur de l'astre E, $V \times fin.\ PEZ + yH = x \times cof.\ PEZ$, d'où résulte $V = \frac{x \times cotang.\ PEZ}{r} \pm \frac{yH}{fin.\ PEZ}$. L'angle horaire étant découvert, on est dans un cas de la troisieme classe pour la hauteur du pole, on a, $c = \frac{k \times fin.\ PEZ}{s}$.

Si l'on souhaite avoir l'angle azymuthal, on a $m = \frac{yt}{k} = \frac{y \times fin.\ PEZ}{c}$. On peut même obtenir cet angle sans avoir l'angle horaire & la hauteur du pole; on est pour cela dans un cas de la quatrieme classe: on a $N \times fin.\ PEZ \pm kX = h \times cof.\ PEZ$, d'où résulte $N = \frac{h \times cotang.\ PEZ}{r} \pm \frac{kX}{fin.\ PEZ}$.

Un procédé conforme en gros à celui qu'on vient de voir, a été proposé il y a quelques années par M. Pitot, de l'Académie Royale des Sciences, pour le cas particulier où l'on auroit *observé deux fois la hauteur de quelque astre, avec le tems écoulé entre les deux observations*. Voyez les Mémoires de 1736, *pag.* 255.

Notre Probleme comprend le cas où l'on aura le tems écoulé entre les observations de deux astres dans l'horison rationel. J'ai rapporté, premiere Partie, d'après M. de Maupertuis, que dans ce cas particulier la tangente S de PH hauteur du pole $= \frac{rrp}{\sqrt{(rrXX \pm 2rqXX' + rrX'X')}}$. On doit

voir que dans ce même cas *PH* se confond avec *PF*, *Fig.* 24, ainsi deux opérations simples & subordonnées y suffisent, & peuvent être substituées à celle qu'indique la formule pour la tangente *S*, &c.

Je place ici une remarque sur la méthode proposée dans ce Chapitre. Je la donne comme plus commode, comme tendante pour chaque Probleme, à des opérations arithmétiques plus simples que celles de la premiere Partie : je crois bien qu'on conviendra unanimement de ce point, qu'on approuvera par conséquent cette derniere méthode pour la pratique ; mais il me semble d'ailleurs qu'en elle-même elle a quelque valeur, qu'elle est capable de satisfaire *les esprits Géométriques*:& dois-je me flatter qu'en effet chacun en jugera aussi favorablement? Voici donc les raisons de mon opinion.

1°. Cette derniere méthode convient dans le genre avec celle de la premiere Partie, qui a M. de Maupertuis pour Auteur, & qui est très-belle assûrément : on emploie dans celle-ci, comme dans celle-là, le calcul algébrique, le *même calcul.* Aussi les différentes formules qu'elles fournissent pour la solution du même probleme, ont-elles tant d'affinité, qu'on peut déduire l'une de l'autre, comme je l'ai montré. En un mot, ces deux méthodes roulent sur les relations qui regnent entre les élémens des triangles sphériques. Nous avons, par exemple, dans ce Probleme second quatre triangles, sçavoir PEE', ZEE', PEZ, $PE'Z$, qui, deux à deux, ont un côté commun, & trois à trois un sommet commun à leurs angles, en sorte qu'un angle quelconque est la somme ou la différence de deux autres angles. Or dans la méthode de la premiere Partie, on considere les trois angles qui ont leur sommet en *P*, on considere donc très-réellement les deux triangles PEZ, $PE'Z$, quoiqu'on ne les trace pas.

Dans

Dans la derniere méthode, ce sont les trois angles qui ont leur sommet en E, ou en E', que l'on considere principalement; ce sont de part & d'autre des objets de même nature.

2°. La derniere méthode n'est pas moins concise que la premiere : elle est contenue en aussi *peu de lignes*. Les quatre principales opérations subordonnées que requiert, par exemple, ce Probleme second, suivant la méthode de ce Chapitre (je compte pour les deux premieres opérations, celles qui donnent l'arc EE' & l'angle PEE'), sont indiquées par des formules qui n'occupent pas plus d'espace que le calcul qui produit l'équation du second dégré, donnée, premiere Partie, pour ce même Probleme.

3°. La derniere méthode est assez *générale* : elle s'étend à tous les cas dans lesquels celle de M. de Maupertuis peut être employée avec certain succès.

4°. Si quelque méthode a du mérite géométrique; c'est en partie à l'*analyse* que ce mérite est dû. Or, sans se prévaloir ici de l'étymologie, ne peut-on pas avancer qu'il y a autant d'analyse dans la méthode, qui, comme celle de ce Chapitre, parvient à la solution d'un Probleme en le décomposant & par degrés, que dans celle qui l'embrasse tout entier d'un seul coup, & exclusivement à tout autre objet ?

J'avoue bien qu'une solution exécutée par plusieurs équations, est communément fort inférieure en mérite à celle qui est contenue dans une seule équation : mais je ne crois pas qu'on veuille dépriser la derniere méthode, relativement à la premiere, par cette considération générale; ce seroit en abuser, car elle suppose que les équations sont du même degré de part & d'autre. Si l'on se permettoit de former des reproches vagues, ne pourroit-on pas objecter d'un autre côté à la belle méthode de

M. de Maupertuis, qu'il est vicieux d'employer des équations du second degré, lorsque des équations linéaires suffisent, & que quoique l'algebre soit fort supérieure à la simple arithmétique, par l'artifice de la construction & de la résolution de ses équations de plus d'un degré, cet artifice est cependant déplacé dans les rencontres où il n'est pas absolument nécessaire ?

Mais enfin, peut-on dire, les solutions de ce Chapitre sont *indirectes*, & ne sont pas *immédiates*. On cherche, par exemple, pour le Probleme second, un angle *PEZ* qui n'est point demandé. Je passe l'objection, mais 1°, ne peut-on point la rétorquer d'une certaine façon ? Il est vrai qu'on va au but assez immédiatement dans la Partie purement algébrique de la solution du second Probleme, que donne la premiere méthode ; on part de la double formule $rrh \pm rsx = cyu$, $rrh' \pm rsx' = cy'u'$, & à l'aide d'une relation énoncée au second Lemme (relation dont la deuxieme méthode n'a pas besoin), on trouve une valeur du sinus de la hauteur du pole ; mais cette valeur n'est qu'algébrique, & pour obtenir la valeur numérale qui est demandée dans la pratique, combien d'opérations arithmétiques ne faudroit-il pas faire ? Combien de produits faudroit-il former ? Combien de quotiens faudroit-il chercher ? &c. Que de quantités, en un mot, faudroit-il trouver, qui ne sont pas plus demandées que l'angle *PEZ* ? Ce ne seroit donc pas immédiatement, ni par une route bien directe, que l'on résoudroit en effet le Probleme second suivant la premiere méthode.

2°. Dans plusieurs Problemes deux choses sont inconnues, sçavoir l'heure, & la hauteur du pole (une troisieme chose y est même encore inconnue, sçavoir l'angle azymuthal). Or suivant la premiere méthode, tantôt c'est la hauteur du pole, tantôt c'est l'heure qu'il faut

chercher par préalable, en sorte que la solution n'est pas immédiate pour l'une des deux (ou pour deux des trois) inconnues. Au Probleme second, par exemple, la solution n'est pas immédiate pour l'heure dans la premiere méthode, la recherche de la hauteur du pole devant la précéder. Que si on cherche par la méthode de ce Chapitre un angle *PEZ* qui n'est pas demandé, ce n'est pas sans quelque avantage, car cet angle étant une fois connu, on peut indifféremment trouver laquelle on veut des trois inconnues, l'heure, la hauteur du pole, l'angle azymuthal, indépendamment des autres.

Au reste, je ne prétends point par ces raisons aller au-delà du soûtien de la deuxieme méthode, je consens qu'on donne la *préférence* à la premiere, & qu'on la juge plus élégante que toute autre.

PROBLEME XVII.

Où la hauteur d'un astre & l'angle de son azymuth, avec celui d'un autre astre sont donnés, Fig. 20, 21, 22, 23.

Je joins ce Probleme au précédent, parce qu'il y a beaucoup de rapport, quoiqu'il soit moins simple. On connoît, je le suppose, l'arc *EE'*, & l'angle *PEE'*; on a donc trois élémens du triangle *EZE'*, sçavoir le côté *EZ*, complément de la hauteur de l'astre *E*, le côté *EE'*, & l'angle *MZM'* qui y est opposé, & il s'agit de trouver l'angle *ZEE'*. (Car de chercher la hauteur de l'astre *E'*, ce seroit un circuit inutile dans cette méthode. Si j'ai cherché cette hauteur, Partie premiere, c'est que l'usage des seules formules de M. de Maupertuis, auquel je m'étois astreint, l'exigeoit. Au reste, il n'est pas plus difficile de trouver l'angle *ZEE'*, que le côté *ZE'* qui lui est oppo-

fé, indépendamment l'un de l'autre.) Or pour avoir cet angle ZEE', on eft dans un des cas compliqués de la quatrieme claffe, & le parti le plus commode eft de fuivre la regle de trigonométrie, qui confifte à fuppofer une perpendiculaire menée du fommet E de l'angle cherché fur le côté qui lui eft oppofé, & à prendre fucceffivement les angles de ZE, & de EE', avec cette perpendiculaire. L'algebre fournit les équations pour ces angles, nous avons déja vû un cas pareil au Probl. II.

L'angle ZEE' étant connu, on aura PEZ par addition ou fouftraction de PEE', & l'on continuera comme au Probleme précedent.

PROBLEME XIV.

Où deux aftres font vûs dans un même vertical, & la hauteur d'un troifieme aftre eft connue Fig. 30.

En confervant les dénominations déja employées ci-devant, nous avons u' cofinus de l'angle horaire du point $F = \frac{Y's}{c}$, lorfque le cercle $ENE'F$ eft vertical, ainfi qu'il a été montré au Probleme XI, & v cofinus de l'angle horaire de l'aftre $\epsilon = \frac{rrh'' - rs\chi}{ci}$. Nommant p', q', le finus & le cofinus de la différence des points ϵ, F, en afcenfion droite, nous avons $rv = q'u' - p'\sqrt{(rr - u'u')}$; d'où réfulte $rvv - 2q'vu' + ru'u' = rp'p'$. Subftituant dans cette équation les valeurs de v, u', & de leurs quarrés, multipliant tout par $ccii$, fubftituant $rr - ss$ à cc, &c. on trouve

$$\left.\begin{matrix} iiY'Y' \\ -2i\chi q'Y' \\ +rr\chi\chi \\ +iip'p' \end{matrix}\right\} ss \quad \left.\begin{matrix} +2rh''iq'Y' \\ -2r^3h''\chi \end{matrix}\right\} s \quad \begin{matrix} -rriip'p' \\ +r^4h''h'' \end{matrix} = 0;$$

Formule plus ſimple que celle qui a été donnée, premiere Partie, pour le même Probleme, ſçavoir :

$$\left.\begin{array}{l} rr\,aaii \\ -\,2rai\chi\,(pX'-p'X) \\ +\,\chi\chi\,(rrX'X'+rrXX) \\ \quad -\,2rbX'X \\ +\,ii\,(qX'-q'X)^2 \end{array}\right\} ss \quad \left.\begin{array}{l} +\,2rrah''i\,(p'X'-p'X) \\ -\,2rrh''\chi\,(rr\,X'X'+rr\,XX) \\ \quad -\,2rbX'X \end{array}\right\} s$$

$$\left.\begin{array}{l} -\,rr\,ii\,(qX'-q'X)^2 \\ +\,rrh''h''\,(rrX'X'+rrXX) \\ \quad -\,2rbX'X \end{array}\right\} = 0.$$

Obſervons cependant en paſſant, que l'une de ces formules eſt réductible à l'autre, en ſubſtituant dans la plus longue $\frac{r^4aa}{YY'}$ à ſa valeur $rrX'X'+rrXX-2rbX'X$; $\frac{raq'}{Y'}$ à $pX'-p'X$, & $\left(\frac{rap'}{Y'}\right)^2$ à $(qX'-q'X)^2$; puis multipliant tout par $Y'Y'$, & diviſant par $rraa$.

Comme cette ſolution n'eſt point encore aſſez commode, en voici une très-ſimple. Je ſuppoſe qu'on a par des Tables ou autrement, l'arc $E\epsilon$, & les angles PEE', $PE\epsilon$, que fait le cercle horaire du point E avec les grands cercles $ENE'F$, $E\epsilon$; la ſomme ou la différence de ces angles, eſt l'angle ϵEZ du triangle obliquangle $EZ\epsilon$, dont on a, par l'hypotheſe, le côté $Z\epsilon$: on peut donc réſoudre ce triangle par la regle de Trigonométrie, c'eſt-à-dire, trouver par parties le côté EZ, ou l'angle $E\epsilon Z$. (Il eſt preſque indifférent lequel de ces élémens on ait pour ſatisfaire au Probleme.) Si l'on veut ſe ſervir de EZ, on cherchera 1°. le côté ER du triangle rectangle $ER\epsilon$, par cette équation : $tang.\ ER = \frac{tang.\ E\epsilon \times cof.\ \epsilon ER}{r}$. 2°. Le côté RZ du triangle rectangle $ZR\epsilon$, par cette équation : $cof.\ RZ = \frac{rh'' \times cof.\ ER}{cof.\ \epsilon E}$. La ſomme ou la différence de

ER, RZ, eſt EZ, l'un des côtés du triangle PEZ; dont on connoît d'ailleurs deux élémens, ſçavoir PE, & l'angle PEE' ou PEZ; on peut donc trouver tel autre élément qu'on voudra de ce triangle, en procédant comme au Probleme ſecond. On aura, par exemple, s coſinus de PZ, par cette équation : $rrs \pm rxh = yk \times cof.\ PEZ$; puis t ſinus de l'angle horaire EPZ du point E, par celle-ci : $ct = k \times fin.\ PEZ$: ou bien on fera $V \times fin.\ PEZ \pm yH = x \times cof.\ PEZ$, &c.

Si on veut ſe ſervir de l'angle $E\epsilon Z$, on cherchera 1°. l'angle $E\epsilon R$ du triangle rectangle $ER\epsilon$, par cette équation : $cotang.\ E\epsilon R = \frac{cof.\ E\epsilon \times tang.\ \epsilon ER}{r}$. 2°. L'angle $Z\epsilon R$ du triangle rectangle $ZR\epsilon$ par cette autre équation : $cof.\ Z\epsilon R = \frac{tang.\ \epsilon E \times cof.\ E\epsilon R}{tang.\ \epsilon Z}$; la ſomme ou la différence des angles $E\epsilon R$, $Z\epsilon R$, eſt l'angle $Z\epsilon E$, lequel étant retranché de l'angle $P\epsilon E$, que je ſuppoſe connu, ou y étant ajoûté, on a l'angle $P\epsilon Z$, compris entre deux côtés connus du triangle ϵPZ; ainſi on eſt en état de trouver la hauteur du pole par cette équation : $rrs \pm rxh'' = ik'' \times cof.\ P\epsilon Z$, &c.

Si l'on avoit par des Tables la perpendiculaire PF, ſur le cercle $ENE'F$, l'arc EF, &c. on rendroit la ſolution encore plus ſimple ; car après avoir trouvé l'arc EZ, on auroit par ſa ſouſtraction ou addition à EF, le côté ZF du triangle rectangle PFZ, & l'on obtiendroit la hauteur du pole, l'angle horaire FPZ, ou l'angle azymuthal hZM, par de ſimples analogies.

PROBLEME XV.

Où deux astres sont vûs dans un même azymuth, dont on connoît l'angle avec l'azymuth d'un troisieme astre, Fig. 30.

Si, outre l'angle donné $EZ\epsilon$ ou MZM', on suppose connus comme au Probleme précédent, l'angle $\epsilon EE'$ ou ϵEZ, & le côté ϵE du triangle obliquangle ϵEZ, on est en état de trouver par parties son côté EZ; on aura 1°, l'arc ER par cette équation : $tang.\ ER = \frac{tang.\ \epsilon E \times cos.\ \epsilon EZ}{r}$. 2°. L'arc RZ par cette autre équation : $sin.\ RZ = \frac{sin.\ ER \times tang.\ \epsilon EZ}{tang.\ EZ\epsilon}$ la somme ou la différence des arcs ER, RZ, est EZ côté du triangle PEZ, où on connoît d'ailleurs deux élémens; ainsi on continuera comme au Probleme précedent.

PROBLEME XVI.

Où deux astres sont vûs à une même hauteur, & l'angle de leurs azymuths est donné, Fig. 26.

Outre l'angle EZN, moitié de l'angle donné EZE' ou MZM', je suppose connus l'angle PEE' ou PEN, & la moitié EN de l'arc EE' : on peut donc 1°. Chercher l'hypothenuse ZE du triangle rectangle ENZ par cette équation : $k = \frac{r \times sin.\ EN}{sin.\ EZN}$. 2°. L'angle ZEN du même triangle par cette autre équation : $sin.\ ZEN = \frac{r \times cos.\ EZN}{cos.\ EN}$, ou par celle-ci : $cos.\ ZEN = \frac{H \times tang.\ EN}{r}$. Cet angle ZEN étant soustrait ou ajoûté à l'angle PEN, on aura l'angle PEZ compris entre deux côtés connus du triangle EPZ, on sera donc en état de continuer comme ci-dessus.

CHAPITRE III.

Autre maniere de ſimplifier les calculs pour l'invention de l'heure.

CETTE maniere convient à peu de cas. Elle conſiſte à ajoûter une obſervation à celles qui ſuffiſent abſolument pour la détermination déſirée ; on obtient par ce moyen, une équation plus baſſe en degré que celle qu'on auroit ſans cela.

Soient, par exemple, deux aſtres vûs dans un même azymuth, & ſoit donné leur angle azymuthal, outre la hauteur du pole : ce ſont trois choſes, qui, combinées ſeulement deux à deux, ne donneroient point l'heure par une équation linéaire, mais jointes enſemble, elles la donnent ainſi ; car on a par la 3[e] formule de la premiere Partie, $\frac{Nt - su}{X} = c = \frac{Nt' - su'}{X'}$, ou $rNX't - rsX'u = rt'NX - ru'sX$. Or, par le ſecond Lemme de la même Partie, $rt' = bt - au$, & $ru' = bu + at$, en certain cas (a, b, ſont le ſinus & le coſinus de la différence des aſtres en aſcenſion droite), ſubſtituant ces valeurs de rt' & ru' dans l'équation précedente, on a $rNX't - bNXt + asXt = rsX'u - aNXu - bsXu$. d'où on déduit pour la tangente de l'angle horaire de l'un des aſtres, $\frac{rt}{u} = r\left(\frac{rsX' - aNX - bsX}{rNX' - bNX + asX}\right)$.

On a un exemple d'un autre cas auquel convient cette maniere, ſous le Probleme XXXI de l'Aſtronomie Nautique. Voici le texte de M. de Maupertuis, à peu près.

Soient

Soient h, h', h'', les (ſinus de) trois hauteurs auxquelles on a obſervé un même aſtre ; ſoient u, u', u'', les coſinus des angles horaires ; p, p', les ſinus ; q, q', les coſinus des tems écoulés entre la premiere & la deuxieme, la premiere & la troiſieme obſervation. Par la premiere formule on a, $rrh - cyu = rsx = rrh' - cyu' = rrh'' - cyu''$, d'où l'on tire $\frac{rr(h-h')}{u-u'} = cy = \frac{rr(h-h'')}{u-u''}$, ou (faiſant $h - h' = D$, $h - h'' = D'$) $D'u - D'u' = Du - Du''$. Mais on a $u' = \frac{qu - pt}{r}$, $u'' = \frac{q'u - p't}{r}$, qui étant ſubſtitués dans l'équation précedente, donnent : $D'u(r-q) + D'pt = Du(r-q') + Dp't$; ou (mettant o, o', pour $r-q$, $r-q'$, ſinus verſes des tems écoulés) $D'ou + D'pt = Do'u + Dp't$. D'où l'on tire pour la tangente de l'angle horaire de l'aſtre, au moment de la premiere obſervation $\frac{rt}{u} = r\left(\frac{Do' - D'o}{D'p - Dp'}\right)$.

Ce procedé s'étend aiſément au cas où l'on a les obſervations des hauteurs contemporaines de trois différens aſtres. Soient en ce cas, x, x', x'', les ſinus ; y, y', y'', les coſinus de leurs déclinaiſons ; p, p', les ſinus ; q, q', les coſinus de la différence d'aſcenſion droite du premier & du ſecond, du premier & du troiſieme aſtre, &c. Par la premiere formule on a, $\frac{rrh - cyu}{x} = rs = \frac{rrh' - cy'u'}{x'} = \frac{rrh'' - cy''u''}{x''}$, d'où l'on tire, $rrhx' - cx'yu = rrh'x - cxy'u'$, & $rrhx'' - cx''yu = rrh''x - cxy''u''$, ou bien, $\frac{hx' - h'x}{x'yu - xy'u'} = \frac{c}{rr} = \frac{hx'' - h''x}{x''yu - xy''u''}$. Mettant D pour $hx' - h'x$, & D' pour $hx'' - h''x$, & conſidérant que $ru' = qu - pt$, & $ru'' = q'u - p't$, on trouve $rx'yD'u - qxy'D'u + pxy'D't = rx''yDu - q'xy''Du + p'xy''Dt$,

ou (mettant o pour $rx'y - qxy'$, & o' pour $rx''y - q'xy''$) $oD'u + pxy'D't = o'Du + p'xy''Dt$; d'où l'on tire pour la tangente de l'angle horaire du premier aftre, $\frac{rt}{u} = r\left(\frac{o'D - oD'}{x(py'D' - p'y''D)}\right)$, ou en remettant les valeurs de o, o', & D, D', dans le numérateur de cette fraction, $\frac{rt}{u} = r\left(\frac{h(qx''y' - q'x'y'') + ry(h''x' - h'x'') + x(q'h'y'' - qh''y')}{py'D' - p'y''D}\right)$.

SCHOLIES. I. Outre la propriété de rendre le calcul plus fimple jufqu'à certain point, qui fe trouve dans la méthode de ce Chapitre, il eft remarquable qu'elle a celle de donner le réfultat de plufieurs obfervations, ce qui eft un petit avantage, vû l'imperfection à laquelle ces opérations font toûjours fujettes fur mer. Car plus on combine d'élémens de cette qualité, plus il eft rare que leurs défauts confpirent à produire une erreur en même fens, plus fouvent au contraire doivent-ils tendre à des erreurs en fens oppofé, & qui s'entre-détruifent en partie.

II. Le calcul que j'ai tiré du Probleme XXXI de l'Aftronomie Nautique, n'eft qu'une préparation pour la folution de ce Probleme, que les Sçavâns de l'Académie de Ruffie ont rendu *fameux*, Probleme *plus curieux* cependant qu'*utile*, felon M. de Maupertuis, & qui confifte à trouver la déclinaifon de l'aftre dont on a les trois hauteurs, & l'élevation du pole. Or en difant au commencement de ce Chapitre, que la méthode que j'y préfente, confifte à ajoûter une obfervation à celles qui fuffifent abfolument pour la détermination défirée, j'ai fuppofé que la déclinaifon étoit donnée, fans quoi je fçai que deux hauteurs d'un aftre ne feroient pas fuffifantes pour la détermination de l'heure. En un mot, je conviens que dans l'efpece précife de ce Probleme XXXI de l'Aftro-

nomie Nautique, les trois obſervations ſont abſolument néceſſaires pour l'invention de chacune des trois inconnues qu'on y détermine.

On peut faire une remarque à ce ſujet, ſur une double propriété de la combinaiſon de pluſieurs quantités Aſtronomiques, de même ou de différente eſpece, ſuppoſées données. Une de ces propriétés eſt, qu'à meſure qu'on accumule ces données, on a beſoin de connoître moins d'élémens d'une autre eſpece, & on eſt en état d'en découvrir un plus grand nombre. Si on a, par exemple, une ſeule obſervation de la hauteur d'un aſtre, il faut connoître d'ailleurs deux quelconques d'entre ces quatre choſes, la déclinaiſon de l'aſtre, ſon angle azymuthal, ſon angle horaire, & la hauteur du pole, pour trouver quelqu'une des autres : mais ſi l'on a deux obſervations de hauteur de cet aſtre, avec le tems écoulé entre ces obſervations, il ſuffit de connoître d'ailleurs un des quatre élémens que je viens de marquer, pour être en état de découvrir tout le reſte ; & ſi l'on a les obſervations de trois hauteurs de cet aſtre, avec leurs intervalles, il n'eſt pas néceſſaire d'avoir d'ailleurs aucun des quatre élémens ſuſdits, & on eſt en état de les découvrir tous par ordre.

L'autre propriété eſt, qu'en ſe ſervant des formules de M. de Maupertuis, on trouve par la combinaiſon de certaines données, une valeur algébrique plus ſimple pour quelque inconnue, que par d'autres combinaiſons. C'eſt de cette propriété que j'ai fait uſage dans ce Chapitre, & il y en a encore d'autres exemples dans la premiere Partie. Ainſi lorſqu'on a les paſſages de deux couples d'aſtres à deux verticaux, ce qui eſt le cas du Probl. XI, on a une équation d'un moindre degré pour l'invention de l'heure, que lorſqu'on a ſeulement le paſſage de deux aſtres à un

vertical, outre la hauteur du pole, ce qui eſt le cas du Probleme VII.

L'uſage qu'on peut faire de la connoiſſance de la premiere propriété, eſt de diſcerner combien de données ſont abſolument requiſes, pour la ſolution de quelque Probleme que ce ſoit du genre de ceux dont je parle. Voici, par exemple, une application de cette remarque à certaine ſolution du Probleme où il s'agit de trouver concurremment la hauteur du pole, & la déclinaiſon de quelque étoile. Quoique ce Probleme ſoit étranger à mon objet, cependant comme il eſt célebre en général, & qu'on l'eſtime même *utile pour la perfection de l'aſtronomie*, en ce que l'on y évite un *cercle* qui ſe rencontre dans la plûpart des méthodes par leſquelles on cherche la hauteur du pole, ou la déclinaiſon, je crois qu'on tolerera cette petite digreſſion.

La ſolution ou méthode que j'ai en vûe, eſt celle du Probleme XL & dernier de l'Aſtronomie Nautique. (Cette méthode qui eſt qualifiée de *très-belle* par M. de Maupertuis, & avec juſtice, parce qu'elle ne ſuppoſe *la meſure actuelle d'aucun angle* *, eſt dûe, ſuivant le même Ecrivain, à *M. Mayer*, de l'Académie de Ruſſie, à titre d'Auteur, ou d'indicateur. On y ſuppoſe ſeulement que les intervalles de tems entre les paſſages de deux étoiles par le méridien, par deux verticaux, & par deux almicantaraths inconnus, mais conſtans, ſont donnés. Or, je dis qu'une de ces obſervations eſt ſurabondante pour la ſolution du Probleme dont il s'agit, car ce ſont quatre quantités principales qui ſont données pour chaque étoile, & il n'y a auſſi que quatre inconnues principales pour chaque étoile, ſçavoir ſa hauteur & ſon angle azymuthal, au moment d'une des obſervations, outre ſa

* Voyez l'Aſtron. Naut. *pag. 94*, & ſa Préface, *pag.* xxxiij, xxxiv.

déclinaiſon & la hauteur du pole. Je dis, par exemple, qu'ayant ſeulement les tems écoulés entre les paſſages des deux étoiles au méridien & à deux autres verticaux, & à un ſeul almicantarath, toutes les inconnues que je viens de marquer ſont déterminées, & peuvent être découvertes: on n'aura pas, à la vérité une équation linéaire, pour la déclinaiſon, ainſi que dans le Probleme XL de l'Aſtronomie Nautique, mais une équation d'un plus haut degré. Voici une preuve particuliere de cette aſſertion.

Soient les ſinus, les coſinus, & les tangentes des déclinaiſons des deux étoiles x, y, X, & x', y', X'. Soient t, t', & u, u', les ſinus & coſinus des angles horaires des étoiles, lorſqu'elles paſſent au premier vertical; t'', t''', & u'', u''', les ſinus & coſinus de ces angles, lorſqu'elles paſſent au ſecond. La troiſieme formule donne, ſuivant ce qu'on a vû au Probl. VII, premiere Partie, $\frac{su - cX}{t} = N = \frac{su' - cX'}{t'}$, & $\frac{su'' - cX}{t''} = \frac{su''' - cX'}{t'''} = N'$; ou $sut' - cXt' = su't - cX't$, & $su''t''' - cXt''' = su'''t'' - cX't''$: ou $sut' - su't = cXt' - cX't$, & $su''t''' - su'''t'' = cXt''' - cX't''$; ou $\frac{Xt' - X't}{ut' - u't} = \frac{s}{c} = \frac{Xt''' - X't''}{u''t''' - u'''t''}$; ou (nommant [d'après M. de Maupertuis] a le ſinus de la différence des arcs horaires, terminés par les ſinus t & t', & a' le ſinus de la différence des arcs terminés par les ſinus t'' & t''', ce qui donne $ra = ut' - u't$, & $ra' = u''t''' - u'''t''$), on a $\frac{Xt' - X't}{ra} = \frac{s}{c} = \frac{Xt''' - X't''}{ra'}$, ou $a'Xt' - a'X't = aXt''' - aX't''$, ou $X'(a't - at'') = X(a't' - at''')$, ou faiſant la fraction $\frac{a't' - at'''}{a't - at''} = e$) $X' = eX$. Ainſi nous avons déja le rapport des tangentes des déclinaiſons déſirées.

Soient maintenant les cosinus des angles horaires des deux étoiles, lorsqu'elles passent au même almicantarath, v & v'; la premiere formule donne $cyv + rsx = rrh = cy'v' + rsx'$, ou bien $c(y'v' - yv) = s(rx - rx')$, ou (substituant Xy à rx, & $X'y'$ à rx',) $\frac{y'v' - yv}{Xy - X'y'} = \frac{s}{c} = \frac{Xt' - X't}{ra}$. Donc $rav'y' - ravy = XXt'y - XX't'y' - XX'ty + X'X'ty'$, ou $rav'y' + XX't'y' - X'X'ty' = ravy + XXt'y - XX'ty$. Donc $y' : y :: rav + X(Xt' - X't) : rav' - XX't' + X'X't$; & $y'y' : yy :: (rav + XXt' - XX't)^2 : (rav' - XX't' + X'X't)^2$. Or, on sçait que $y'y' = \frac{r^4}{rr + X'X'}$, & $yy = \frac{r^4}{rr + XX}$; donc $rr + XX : rr + X'X' :: (rav + XXt' - XX't)^2 : (rav' - XX't' + X'X't)^2$, ou (en mettant eX au lieu de X', & ϵ au lieu de $t' - et$) $rr + XX : rr + eeXX :: (rav + \epsilon XX)^2 : (rav' - e\epsilon XX)^2$, d'où il résultera enfin une équation du troisieme degré, pour la tangente X de la déclinaison d'une des étoiles. Cette déclinaison étant connue, on trouvera facilement la déclinaison de l'autre étoile, par l'équation $X' = eX$, puis la hauteur du pole par sa tangente $\frac{rs}{c} = \frac{Xt' - X't}{a}$. On aura ensuite, si l'on veut, le premier angle azymuthal des étoiles, par l'équation $\frac{su - cX}{t} = N$, &c.

Seroit-ce me tromper, que de regarder cette méthode comme approchante en mérite de celle de M. Mayer? Il est vrai d'un côté, qu'une équation du troisieme degré est un peu longue, & difficile à résoudre, & que le calcul pour la déclinaison seroit moins simple par cette méthode, que par celle du sçavant Académicien, laquelle aboutit seulement à une équation linéaire dans l'Astronomie Nautique : mais en récompense, la méthode qu'on

vient de voir exige une obſervation de moins que celle-la, & cette obſervation retranchée, eſt une de celles qui ſont les plus difficiles à exécuter, & où il eſt à craindre que la réfraction ne cauſe quelque défaut par ſon irrégularité. Or, *c'eſt, ce ſemble*, (au dire d'un très-habile homme) *une méthode avantageuſe que celle, qui, rejettant ſur le calcul les.... difficultés de l'Aſtronomie, en rendra la pratique* (ou bien la partie qui eſt de l'office de l'Obſervateur) *plus facile*, & moins ſujette aux vices latents que la réfraction peut y jetter. Au reſte, je laiſſe aux Maîtres de l'art à décider ſur ce point.

Une des ſuppoſitions de M. Mayer, étant ſurabondante en rigueur, il doit encore y avoir lieu à un autre procédé pour l'invention de la déclinaiſon, ſans la meſure actuelle d'aucun angle, ſçavoir en retranchant l'obſervation du paſſage des étoiles à un des verticaux, & en conſervant le reſte. Voici ce procédé, mais je le donne moins pour la pratique que pour la théorie, & pour une plus ample confirmation de ma remarque, ſur le nombre des données néceſſaires à nos Problemes Aſtronomiques. Je conviens d'ailleurs, qu'il n'y a pas grand mérite à avoir penſé à ces procédés. Comme la principale partie du calcul ſuivant ainſi que du précédent, eſt tirée de l'Aſtronomie Nautique, c'eſt à M. de Maupertuis que l'honneur en appartient.

Soient v'', v''' les coſinus des angles horaires des étoiles, lorſqu'elles paſſent au ſecond almicantarath, & le ſurplus comme ci-deſſus. On a, pour les paſſages aux deux almicantaraths, $\frac{y'v'-yv}{rx-rx'} = \frac{s}{c} = \frac{y'v'''-yv''}{rx-rx'}$, d'où réſulte $\frac{y'}{y} = \frac{v-v''}{v'-v'''}$; ou (faiſant $\frac{i}{r} = \frac{v-v''}{v'-v'''}$) $y' = \frac{iy}{r}$. Pour le paſſage au vertical, on a (en faiſant

$ra = ut' - u't$), $\frac{xy't' - x'yt}{yy'a} = \frac{s}{c} = \frac{y'v' - yv}{r(x - x')}$, ou (en ſubſtituant $\frac{iy}{r}$ à y'), $\frac{ixt' - rx't}{iay} = \frac{iyv' - ryv}{rr(x - x')}$, ou $yy(iiav' - riav) = rr(xxit' - rxx't - ixx't' + rx'x't)$. Et (en ſubſtituant $rr - yy$ à xx, & $rr - \frac{ii}{rr}yy$ à $x'x'$), $yy(iiav' - riav + rrit' + riit) - r^4(it' + rt) = -rrxx'(it' + rt)$, ou (en faiſant $it' + rt = ro$, & $i(a[iv' - rv] + r[rt' + it]) = r^3\omega$), $\omega yy - rro = oxx'$, & (en quarrant chaque membre) $\omega\omega y^4 - 2rro\omega y^2 + r^4oo = ooxxx'x' = oo(r^4 - rryy - iiyy + \frac{ii}{rr}y^4)$.



TROISIEME

TROISIEME PARTIE.

Du choix entre les manieres de trouver l'heure, & des moyens de faire les obſervations ſuppoſées.

SI toutes les obſervations étoient parfaitement exactes, toutes les voies différentes qui conſtituent les divers Problemes propoſés ci-devant ſur l'invention de l'heure, ſeroient également bonnes, & il ſeroit d'ailleurs indifférent quelle fût la ſituation de l'aſtre, ou des aſtres, dont les obſervations ſont ſuppoſées pour chaque Probleme. Mais il n'eſt que trop certain que l'*on ſe trompe toûjours de quelque choſe* en obſervant à la mer ; *& les mêmes erreurs commiſes dans les obſervations dont on a beſoin, & qu'on prend pour fondement du calcul, ou d'une opération graphique, mettent, par leur différente complication*, ou par la diverſité des circonſtances, *une grande différence* entre les réſultats de la même méthode, & peuvent en mettre auſſi entre ceux des différentes méthodes ou Problemes. Il y a donc un choix à faire à cet égard entre les différentes circonſtances, où une même méthode peut abſolument être employée, & un autre choix entre les différentes méthodes. C'eſt même preſque par ce ſeul égard que l'on doit déterminer quelle eſt la meilleure maniere de trouver l'heure en mer, ſelon le déſir de l'Académie, car la facilité des opérations * eſt peu de choſe, en comparaiſon

* Ce n'eſt pas la facilité reſpective des opérations de divers genres, telles que le calcul & la formation d'une figure, qui peuvent ſervir à un même Probleme, dont j'entends parler, c'eſt de celle des opérations homogenes qui conviennent aux divers Problemes, ou en différentes rencontres.

de l'exactitude à laquelle il faut toûjours tendre, afin d'en approcher le plus qu'il est possible, quand on ne sçauroit l'obtenir ; & d'ailleurs, les opérations les plus faciles répondent communément aux cas où les erreurs des observations sont les moins nuisibles. Ainsi, pour diriger le choix qu'il convient de faire, il faut *examiner dans quelles rencontres les erreurs des observations tirent moins à conséquence*, & il est bon de sçavoir comment on peut évaluer leur effet, une telle évaluation étant utile au Navigateur, pour connoître jusqu'où il peut compter sur le résultat de ses observations, dans le cas où il n'aura pas la commodité de faire celles qui sont les plus avantageuses, ni de choisir les circonstances les plus favorables.



CHAPITRE PREMIER.

Du choix que l'on doit faire entre différentes applications de la même méthode, ou détermination des circonſtances dans leſquelles une obſervation quelconque doit être faite, afin que ſon erreur tire moins à conſéquence pour l'invention de l'heure.

MR. Bouguer, dont j'ai emprunté ci-deſſus quelques expreſſions, a bien fait ſentir la néceſſité d'une détermination pareille à celle dont il s'agit, il nous a découvert une maniere d'y procéder, & nous en a laiſſé un beau modele dans la troiſieme Partie de ſon excellente Piece déja citée, touchant la méthode d'obſerver en mer la déclinaiſon de la bouſſole. Il y fait uſage pour cela du calcul différentiel : je me ſervirai auſſi du même moyen, ou pour mieux dire, je ne le négligerai pas, car j'en employerai un autre en premier lieu, afin d'abréger. L'uſage de la ſeule maniere inventée par M. Bouguer, produiroit ici trop de prolixité, à cauſe de la multitude & de la nature des Problemes que j'ai embraſſés ci-devant, puiſque cet habile Géometre a été obligé de faire pluſieurs articles, pour appliquer ſa méthode à l'unique, & aſſez ſimple Probleme, où l'angle azymuthal d'un aſtre eſt conclu de l'obſervation de ſa hauteur, & de la ſuppoſition que celle du pole eſt connue exactement, ou à peu près. D'ailleurs ce moyen que je vais employer d'abord, ſera intelligible à plus de perſonnes que le calcul différentiel.

La recherche de l'heure pouvant être ſouvent jointe, & allant pour ainſi dire de pair avec celle de la hauteur

du pole, je déterminerai conjointement, quelles sont les circonstances les plus favorables pour l'invention de l'une & de l'autre chose, quoique la derniere ne soit pas de mon objet. Je ne pourrois même séparer ces choses sans inconvénient, certaine opposition qui est entre elles, servant à faire mieux entendre ce qui convient en particulier à l'une ou à l'autre.

L'angle horaire de toute étoile ou de tout point du ciel, est une chose qui change continuellement, uniformément, & assez rapidement, par l'effet du mouvement journalier : au contraire la hauteur du pole, c'est-à-dire, du centre de ce mouvement, est une chose fixe pour chaque point de la terre. C'est sur ces propriétés opposées, que je vais déterminer en général quelle doit être la position d'un astre, ou quelles doivent être les positions de plusieurs astres, pour donner l'une ou l'autre de ces choses, avec le moins d'erreur qu'il est possible. On peut déja entrevoir, & j'annonce, que l'observation qui est favorable pour l'une, est désavantageuse ou peu utile pour l'autre.

Le mouvement journalier, comme je l'ai remarqué dans la premiere Partie, fait que les astres changent continuellement, tant d'azymuth que d'almicantarath : mais ces changemens, & ceux qui en dépendent, sont différens à certain égard de ceux de l'angle horaire. Ils sont sujets à variété; car tantôt ils sont grands & prompts, tantôt ils sont lents & petits, & presque insensibles. Il y a telle situation de la sphere, où l'angle azymuthal d'un astre change moins que sa hauteur; telle autre où c'est sa hauteur qui change moins que son angle azymuthal. Une de ces choses peut changer autrement pour un astre voisin du pole, que pour un astre qui en est plus éloigné. Il y a telle partie du cours de chaque astre, où c'est sa hauteur qui

change peu, & telle autre où c'eſt ſon angle azymuthal qui reçoit le moindre changement, &c.

Je conſidere d'abord le cas où l'une de ces choſes; l'heure, & la hauteur du pole, eſt connue, ſoit exactement, ſoit à peu près, ou bien n'eſt pas déſirée, & où l'on cherche ſeulement l'autre : & je dis que pour connoître le plus exactement qu'il ſe peut la hauteur du pole, qui eſt une choſe fixe, il faut obſerver un ou deux élémens quelconques, du nombre de ceux qui ont été ſuppoſés dans les divers Problemes ci-deſſus, dans la circonſtance où ils changent le moins; & qu'au contraire, pour trouver le plus correctement l'heure, qui eſt une choſe changeante, il faut obſerver un ou deux de ces élémens quelconques, dans la circonſtance où ils changent le plus, poſé qu'ils ne ſoient pas trop difficiles à obſerver alors. Je dis que plus un de ces élémens approchera de l'état fixe au moment où il ſera obſervé, plus ſûrement il donnera la hauteur du pole, & plus vicieuſement il donneroit l'heure; c'eſt-à-dire que l'erreur que l'on commettra dans l'obſervation de cet élément, ne produira qu'une erreur égale, ou de peu plus grande ſur la concluſion de la hauteur du pole dans pluſieurs Problemes, & qu'elle en produiroit une beaucoup plus grande ſur la concluſion de l'angle horaire. Je dis d'un autre côté, que plus un élément approchera de la rapidité & de l'uniformité de la variation de l'angle horaire par la ſienne, au moment où il ſera obſervé; plus ſûrement il donnera cet angle, & plus défectueuſement il donneroit la hauteur du pole, ſauf quelques exceptions; c'eſt-à-dire, que l'erreur qui découlera dans la détermination de l'heure, de celle de l'obſervation d'un tel élément, ne ſera pas plus grande, ou de peu plus grande que celle de ſon principe, & que celle qui en réſulteroit ſur la hauteur du pole, l'excéderoit de beaucoup pour l'ordinaire.

Entrons donc un peu en détail, sur les changemens auxquels les élémens que j'ai ſuppoſés donnés dans les Problemes des Parties précédentes ſont ſujets, ſelon que l'aſtre eſt, ou que les aſtres ſont dans telle ou telle partie de leur cours, qu'ils ont plus ou moins de déclinaiſon, & que le pole eſt plus ou moins élevé. On verra dans ce détail, un commencement de preuve de mes propoſitions.

La ſphere étant parallele, ou preſque parallele, la hauteur des aſtres ne varie point, ou varie très-peu; ainſi leur déclinaiſon étant ſuppoſée donnée, l'obſervation de la hauteur d'un aſtre quelconque, ou des hauteurs de deux aſtres, donneroit la hauteur du pole avec autant d'exactitude qu'elle en auroit: mais il eſt viſible que cette obſervation ne donneroit point l'heure, quand même il s'en faudroit de 9 ou 10 minutes que le pole ne fût au zénith, puiſqu'en ſe trompant d'autant de minutes ſur la hauteur de l'aſtre obſervé, on pourroit ſe tromper du quart-de-cercle entier ſur ſon angle horaire, en le mettant, par exemple, au méridien, lorſqu'il ſeroit au cercle de ſix heures, ou à ce cercle, lorſqu'il ſeroit au méridien.

Au contraire, l'angle azymuthal de tous les aſtres, ou de preſque tous, change beaucoup dans cette ſituation de la ſphere, & il change également, ou preſque également à l'angle horaire. Auſſi l'obſervation de cet élément donneroit l'heure avec autant d'exactitude qu'elle en auroit; mais elle ne donneroit point, ou donneroit mal, la hauteur du pole, ſurtout lorſque l'aſtre ne ſeroit pas fort élevé, & fort voiſin du premier vertical, qui, dans ce cas, eſt preſque co-incident avec le cercle de ſix heures.

La ſphere étant droite, ou preſque droite, les circonſtances qu'on vient de voir ſont renverſées, & il s'en trouve

de nouvelles. Les aſtres varient beaucoup en hauteur, & le plus qu'il eſt poſſible, & avec le plus d'uniformité, quant à chacun, mais ils en varient diverſement entre eux : au contraire, ils changent peu d'angle azymuthal pour la plûpart, & ils en changent diverſement en tems égaux. Tout cela a beſoin d'être développé. A l'égard du changement de hauteur, voici d'abord une regle générale, c'eſt que pour les aſtres qui paſſent entre le pole élevé & le zénith, ou bien entre le pole abbaiſſé & le nadir, ce changement total, c'eſt-à-dire, celui qui ſe fait entre la culmination de l'aſtre, & ſa plus grande dépreſſion, eſt égal au double du complément de la déclinaiſon de l'aſtre. Pour tous les autres aſtres, c'eſt-à-dire, ceux dont la déclinaiſon eſt moindre que la hauteur du pole, leur changement total en hauteur, eſt égal au double du complément de la hauteur polaire. Et quant à l'angle azymuthal, c'eſt auſſi une regle générale, que l'azymuth des aſtres qui ſont dans le premier cas, ne parcourt qu'une partie de l'horiſon, & une partie d'autant moindre, que leur déclinaiſon ſurpaſſe plus la hauteur du pole : d'ailleurs cet azymuth va tantôt en un ſens, tantôt en un autre. Au contraire, l'azymuth des aſtres qui ſont dans le ſecond cas, avance toûjours en même ſens, & parcourt tout l'horiſon en 24 heures : ainſi la variation totale de leur angle azymuthal, eſt égale à celle de l'angle horaire, mais elle eſt tantôt plus lente, & tantôt plus prompte.

Revenons à notre hypotheſe. La ſphere étant droite, ou preſque droite, la hauteur d'un aſtre ſitué à l'équateur, qui, dans ce cas, eſt preſque co-incident avec le premier vertical, change autant, ou preſque autant que l'angle horaire, & toûjours uniformément, ou il s'en faut très-peu. Il eſt encore viſible que par l'obſervation de cet élément, on auroit l'heure auſſi exactement que cet

élément même. Au contraire, une telle obfervation ne donneroit point, ou donneroit mal la hauteur du pole, fi ce n'eft que l'aftre fût fort élevé. Quant aux aftres qui déclinent de l'équateur, ils varient d'autant moins en hauteur, qu'ils ont plus de déclinaifon, & ils en varient peu fenfiblement vers le tems de leur culmination; ainfi leur hauteur étant obfervée dans cette circonftance, donneroit affez exactement la hauteur du pole.

Dans la même hypothefe de la fphere droite, ou prefque droite, les aftres fe meuvent perpendiculairement, ou prefque perpendiculairement à l'horifon, lorfqu'ils fe levent ou fe couchent; ainfi leur angle azymuthal ne change point dans cette circonftance, & il eft affez propre à donner la hauteur du pole. Cet angle change le plus vers le tems de la culmination de l'aftre, lorfque fon cours eft prefque parallele à l'horifon, & ce changement eft d'autant plus grand & plus prompt, que l'aftre paffe plus près du zénith, ou bien décline moins de l'équateur, mais il eft lent, lorfque l'aftre eft voifin du pole. L'angle azymuthal change médiocrement pour la plûpart des aftres, entre ces extrémités du paffage à l'horifon, & du paffage au méridien. La fphere étant parfaitement droite, un aftre fitué à l'équateur ne change point d'azymuth entre fes paffages au méridien, & à ces paffages, il en change diamétralement tout d'un coup. Tout aftre qui paffe pareillement au zénith, lorfque la fphere n'eft pas droite, change diamétralement d'azymuth à ce paffage.

La fphere étant oblique, les changemens de la hauteur & de l'angle azymuthal des aftres, participent aux états oppofés qu'on vient de voir dans les deux hypothefes précédentes. Ils ne font la plûpart, ni fi grands, ni fi petits; ni fi rapides, ni fi lents; ni fi inégaux, ni fi approchans de l'égalité, ou bien s'ils font fufceptibles de quelques-uns

de

de ces états, c'eſt dans une moindre partie de leur cours. Au reſte, il eſt commun à cette hypotheſe & aux précédentes, que plus un aſtre eſt voiſin du méridien, moins il change de hauteur à chaque inſtant, & que plus il eſt éloigné de ce cercle, plus par conſéquent il en change. Or ce plus grand éloignement du méridien a lieu, quant aux aſtres dont la déclinaiſon eſt moindre que la hauteur du pole, à leur paſſage au premier vertical. Quant aux aſtres dont la déclinaiſon ſurpaſſe la hauteur du pole, on ſçait qu'ils ne paſſent point au premier vertical, ou bien que leur plus grande digreſſion du méridien eſt moindre que 90 degrés, & inégale. L'angle azymuthal varie au rebours de la hauteur; il change le plus, lorſque la hauteur change le moins, & au contraire il change le moins, lorſque la hauteur change le plus. C'eſt donc toûjours vers le tems du paſſage d'un aſtre au méridien, que ſon angle azymuthal change le plus, & vers le tems de ſon paſſage au premier vertical (poſé qu'il y paſſe) que cet angle change le moins. Pour les aſtres qui ne paſſent point au premier vertical, il eſt viſible qu'il y a quelque partie de leur cours où ils ſe meuvent perpendiculairement à l'horiſon, comme je l'ai déja obſervé, & qu'alors leur angle azymuthal ne varie pas.

Plus un aſtre eſt éloigné du méridien, ai-je dit, plus il change de hauteur. Il eſt à propos d'ajoûter, & il eſt très-aiſé de voir, que ce plus grand changement inſtantané, eſt moindre que celui de l'angle horaire, lorſque la ſphere eſt oblique, & d'autant plus petit qu'elle eſt plus oblique. (Cela doit être en effet, puiſque le changement total d'un aſtre en hauteur pendant 12 heures, eſt tout au plus égal au double du complément de la hauteur du pole). Il ſuit donc du principe que j'ai poſé, que pour découvrir l'heure par l'obſervation de la hauteur de quelque aſtre, il faut

la prendre lorſqu'il eſt le plus éloigné du méridien; mais que dans cette circonſtance, qui eſt la plus favorable à l'invention de l'heure, on a moins d'avantage pour la découvrir lorſque la ſphere eſt oblique, que lorſqu'elle eſt droite, & à proportion qu'elle eſt plus oblique; & c'eſt ce que je prouverai rigoureuſement dans la ſuite par le calcul. On doit donc regarder comme certain mon principe général, ſçavoir, qu'à meſure que la variation d'un élément eſt moindre que celle de l'angle horaire, il réſulte une plus grande erreur dans la détermination de l'heure, que celle qu'on peut commettre dans l'obſervation de cet élément, &c.

Pour l'angle azymuthal, celui de quelques aſtres varie autant, ou plus, que l'angle horaire, vers le tems du paſſage de ces aſtres au méridien, dans le même cas de la ſphere oblique : mais cet angle ne peut pas être obſervé directement ſur mer, parce qu'une telle obſervation requiert une ligne méridienne; & d'ailleurs, quand bien on auroit cette ligne ſur mer, il ſeroit encore difficile d'y prendre directement l'azymuth d'un aſtre, vers le tems où cet azymuth varie le plus, parce que c'eſt alors que l'aſtre eſt le plus élevé, &c.

A l'égard de l'invention de la hauteur du pole, on voit ſans doute que dans le même cas de la ſphere oblique, il y a des circonſtances qui y ſont auſſi favorables que dans tout autre cas, puiſque le changement de hauteur eſt inſenſible pour la plûpart des aſtres à leur paſſage au méridien, & que le changement d'angle azymuthal eſt pareillement inſenſible pour quelques aſtres, en certaine partie de leur cours. On doit voir auſſi, que la circonſtance la plus déſavantageuſe dans le même cas, pour trouver la hauteur du pole par l'obſervation de celle d'un aſtre, ou de celles de deux aſtres, eſt lorſque cet aſtre, ou ces aſtres

ſont voiſins du premier vertical. On peut juger ſur cela, des *reſtrictions* qu'exigent *dans l'uſage*, les Problemes XXXVIII & XXXIX de l'Aſtronomie Nautique, qui conſiſtent à trouver ſur mer la hauteur du pole, ſoit par la durée du jour, ſoit par le tems écoulé entre le lever ou le coucher de deux Planetes.

Il me reſte à remarquer touchant la hauteur, & l'on peut aiſément reconnoître à l'inſpection d'un globe, que la variation inſtantanée de cet élément, eſt la même pour tous les aſtres qui ſont dans le même azymuth, ou dans des azymuths également éloignés du premier vertical, quelques ſoient la hauteur & la déclinaiſon de ces aſtres, parce que ceux qui ſont plus de chemin, le ſont plus obliquement. On peut conclurre de-là, que la plus grande variation de hauteur des aſtres qui ne paſſent pas au premier vertical, eſt moindre que celle des aſtres qui y paſſent. (On peut auſſi tirer la même concluſion de ce que la variation totale de hauteur de ceux-là eſt moindre que la variation totale de hauteur de ceux-ci.) Ainſi pour déterminer l'heure par la hauteur d'un aſtre, c'eſt quelqu'un de ceux dont la déclinaiſon eſt moindre que la hauteur du pole, & du côté du pole élevé, qu'il faut obſerver préférablement à ceux d'une condition différente, &c.

Le détail des propoſitions où je viens d'entrer touchant les changemens divers de la hauteur, & de l'angle azymuthal des aſtres, ne regarde pas ſeulement l'uſage qu'on peut faire de ces élémens, il tend encore à montrer en quelles circonſtances les variations des autres élémens propres à donner l'heure, & la hauteur du pole, ſont moindres ou plus grandes : mais avant que de paſſer à cette expoſition, je m'arrête pour confirmer par le calcul, pluſieurs des propoſitions précédentes.

Nous avons par la premiere formule, $rrh + rsx = cyu$,

& en prenant la petite variation, la hauteur du pole ainſi que la déclinaiſon de l'aſtre étant ſuppoſées préciſes, $rrdh = cydu$. Donc en nommant dH la petite variation inſtantanée de la hauteur (d'où réſulte $dh = \frac{kdH}{r}$), & dE le petit arc de l'équateur qui meſure la variation de l'angle horaire correſpondante à dH, (d'où réſulte $du = \frac{tdE}{r}$), on a $rrkdH = cytdE$.

Donc 1°. dH eſt zéro lorſque t eſt zéro, c'eſt-à-dire, lorſque l'aſtre paſſe au méridien.

2°. dH eſt un *maximum*, lorſque ſa différence ddH eſt égale à zéro. Or, dH étant $= \frac{cyt}{rrk} dE$, $ddH = (kdt - tdk) \frac{cy}{rrkk} dE$ lorſque dE eſt conſtante. Faiſant donc $kdt - tdk = 0$, ſubſtituant $\frac{hdH}{r}$ à dk, & $\frac{udE}{r}$ à dt, ce qui donne $kudE - htdH = 0$, ou bien $rrkku - chtty = 0$, parce que $dH = \frac{cyt}{rrk} dE$; mettant enſuite $rr - hh$ pour kk, & $rr - uu$ pour tt, multipliant tout par cy, puis mettant pour cyu ſa valeur $rrh - rsx$, &c. on trouve enfin $hhsx - rhxx - rhss + rrsx = 0$. Or cette équation eſt diviſible par ces deux-ci : $hs - rx = 0$, $hx - rs = 0$. Nous avons déja vû la deuxieme, elle indique la partie du cours d'un aſtre, dont la déclinaiſon excede la hauteur du pole, où cet aſtre eſt à ſa plus grande digreſſion du méridien : la premiere marque la hauteur d'un aſtre à ſon paſſage au premier vertical ; car en faiſant $n = 0$, dans la deuxieme formule du premier Lemme, qui eſt $rrx + nck = rsh$, l'on trouve auſſi $rx = hs$.

3°. On peut découvrir en général, indépendamment du calcul de l'article précédent, que plus un aſtre eſt

éloigné du méridien par ſon azymuth, plus la variation inſtantanée de ſa hauteur eſt conſidérable. Il ſuffit pour cela de ſubſtituer à yt, dans l'équation $rrkdH = cytdE$, ſa valeur mk, priſe de la cinquieme formule du premier Lemme ; car on aura $dH = \frac{cm}{rr} dE$: & il eſt viſible que plus m, ſinus de l'angle azymuthal, ſera grand, plus auſſi le ſera la variation dH. On voit d'ailleurs par la même expreſſion, que la plus grande variation dH eſt moindre que dE, lorſque la ſphere eſt oblique, dans la proportion du coſinus de la hauteur du pole au ſinus total.

Reprenons la premiere formule, & ſuppoſons maintenant de l'erreur tant ſur la hauteur de l'aſtre, que ſur celle du pole, ce qui rend h, s, c, u, variables, pendant que x, y, demeurent conſtantes ; nous aurons $rrdh - rxds = cydu + yudc$, & (mettant pour les différences du ſinus & du coſinus de la hauteur du pole le petit arc du méridien $dL = \pm \frac{rds}{c} = \pm \frac{rdc}{s}$ &c.) $cytdE = cmkdE = rrkdH \mp rxcdL \pm syudL$; & (mettant pour syu ſa valeur $\frac{rrhs - rxss}{c}$, tirée de la premiere formule, puis rx ſa valeur $\frac{rsh \mp nck}{r}$, tirée de la deuxieme formule, ce qui rend 1°. $syu = \frac{rhs(rr - ss) \pm nckss}{rc} = \frac{rhsc \pm nkss}{r}$, 2°. $rxc = \frac{rhsc \mp nkcc}{r}$) ; $rcmkdE = r^3kdH + nkdL (\pm cc \pm ss)$, ou $cmdE = rrdH \pm rndL$.

Donc 1°. ſi $m = r$, ce qui rend $n = 0$, c'eſt-à-dire, ſi l'on a pris la hauteur de l'aſtre à ſon paſſage au premier vertical, l'erreur dE qui ſe trouve dans la détermination de l'angle horaire, eſt la plus petite qu'il eſt poſſible de commettre en évitant le haſard ; & l'erreur ſur la hauteur du pole eſt ſans conſéquence pour cette détermination,

puisque l'on a $dE = \frac{r}{c} dH$.* (Cependant cette moindre erreur qui résulte sur l'angle horaire de celle qu'on a commise sur la hauteur de l'astre, est plus grande que celle-ci, lorsque la sphere est oblique, ainsi que je l'ai déja dit, conformément au principe général.) Et si l'astre est fort voisin du premier vertical lorsqu'on prend sa hauteur, ce qui rend n fort petit, l'erreur sur la hauteur du pole est de petite conséquence dans la détermination de l'angle horaire.

Donc 2°. lorsqu'on peut observer la hauteur d'un astre à son passage au premier vertical, ou lorsqu'il est fort près de ce cercle ; & que l'on connoît d'ailleurs à peu près la hauteur du pole, ne fût-ce que par l'estime pratiquée à la mer, une seule observation suffit pour la détermination de l'heure, & l'on peut se servir du Probleme V. ci-dessus. Et si l'on étoit dans le cas de ne pas connoître la hauteur du pole, ou de ne la connoître que très-grossierement, & qu'on voulût découvrir l'heure, sans déterminer plus précisément cette hauteur, il ne faut pas craindre de faire les deux observations des hauteurs d'un ou de deux astres, lesquelles conviennent à ce cas, selon le Probleme second, de faire, dis-je, ces deux observations dans les circonstances où elles donneroient le plus mal la hauteur du pole, puisque le défaut de ces observations à l'égard de la hauteur du pole, est alors indifférent à la détermination de l'heure. Bien loin même d'éviter ces circonstances, ce sont celles qu'il faut préférer & joindre ensemble ; je veux dire, qu'il est à propos pour la détermination de

* Je dis *en évitant le hasard*, car absolument parlant, dE peut être moindre que $\frac{r}{c} dH$, & peut même être zéro, lorsque les termes $rrdH$ & $rndL$ ont des signes contraires. Mais c'est un hasard que l'on auroit tort de tenter, en prenant volontairement un astre à quelque distance du premier vertical, puisque l'on s'exposeroit également par-là, au danger d'avoir les deux termes de la valeur de dE affectés de signes semblables.

l'heure seule, dans le cas du Probleme second, d'observer deux astres les plus voisins du premier vertical, soit de même côté, soit de différens côtés du méridien; car l'erreur dE qui se trouvera dans la détermination de l'heure en suivant cette pratique, pourra être zéro, si les deux erreurs dH, dH', sont en sens contraires, elle sera au plus égale à la moitié de $\frac{r}{c}\ dH + \frac{r}{c}\ dH'$, posé que les deux astres soient précisément au premier vertical, & communément $\frac{c}{r}\ dE$ sera environ la moitié de la plus grande erreur dH, à laquelle on est sujet en prenant la hauteur d'un astre, erreur que M. Bouguer, déja cité sur ce point, estime de 15 minutes de degré.

Par la raison des contraires, on doit dire (on le sçait même assez sans cela, & il est inutile de le prouver directement par le calcul) que pour trouver seulement la hauteur du pole dans le cas du Probleme second, il faut observer les deux hauteurs lorsque les deux astres sont le plus voisins du méridien, circonstances qui sont les plus désavantageuses pour la détermination de l'heure. Cette remarque paroît peut-être superflue: mais je la fais moins pour elle-même, que pour fortifier l'induction que je tire de la précédente, en faveur de cette maxime générale, sçavoir que *soit qu'on cherche seulement la hauteur du pole, soit qu'on cherche seulement l'heure, & par quelques élémens qu'on veuille chercher l'une de ces choses, dans les Problemes du premier & du troisieme Chapitre de la premiere Partie, il faut toûjours choisir les deux circonstances les plus favorables, en particulier à l'invention de la chose désirée, quoiqu'elles soient les plus désavantageuses à la détermination qu'on pourroit faire de l'autre chose, concurremment avec celle-là.* Si on veut trouver seulement l'heure, par exemple, par l'observation des passages de deux couples d'astres à deux ver-

ticaux, ce qui est le cas du Probleme XI, Probleme qui fournit concurremment la hauteur du pole; on peut, & il est même à propos, de préférer les deux circonstances qui donneroient le plus mal cette hauteur, *& vice versa*, &c. C'est des qualités de cet élément employé au Probl. XIe, & de celui qui sert au Probleme suivant, qu'il me reste à parler.

Observer deux astres à leur passage à un même vertical, c'est les saisir lorsque la différence de leurs angles azymuthaux est zéro, ou à peu près, ou bien lorsque l'angle du grand cercle $ENE'F$, qui passe par ces astres avec le vertical MZ de l'un des deux est aussi zéro, ou à peu près, *Fig.* 25, 27, &c. Observer deux astres à leur passage à un même almicantarath, c'est les saisir lorsque leur différence de hauteur est nulle ou à peu près, ou bien lorsque l'angle du grand cercle $ENE'F$, qui passe par ces astres avec le vertical μZN, qui en est équidistant, est droit ou à peu près, *Fig.* 26, 28. La différence des angles azymuthaux de deux astres, & la différence de leurs hauteurs; ou bien les angles du grand cercle sur lequel sont situés deux astres avec certains verticaux, sont donc les élémens de la variation, desquels il s'agit de déterminer l'état vers le tems où ces élémens servent à nos Problemes.

Quant à la différence des hauteurs de deux astres, il est manifeste 1°, que sa variation est nulle lorsque les hauteurs croissent ou décroissent ensemble, & qu'elles reçoivent un changement égal; & que cette variation est petite, lorsque les hauteurs reçoivent des changemens presque égaux. Ainsi, comme nous avons vû que les changemens de hauteur de deux astres également éloignés du premier vertical par leurs azymuths sont égaux, & que ces changemens sont d'ailleurs en même sens, lorsque les deux astres sont de même part du méridien, il s'ensuit que

la

la variation de l'élément en queſtion eſt nulle, ou peu conſidérable, lorſque le vertical μZN, qui eſt équidiſtant des deux aſtres E, E', *Fig.* 26, 28, &c. & perpendiculaire, ou à peu près perpendiculaire au grand cercle $ENE'F$, ſur lequel ſont ces aſtres, n'eſt pas différent du premier vertical, ou en eſt peu éloigné.

2°. Il n'y a pour certains aſtres qu'un tems très-court, où la variation $dH - dH'$ de la différence de leur hauteur puiſſe être nulle ſenſiblement. Ce tems eſt aſſez long pour d'autres aſtres : un peu avant ou après ces tems, la variation inſtantanée $dH - dH'$ de deux des premiers eſt plus grande, que la variation pareille de deux des ſeconds, quoique la variation totale $H - H'$ dont ceux-là ſont capables, ſoit moindre que la variation totale de ceux-ci, en ſorte que le rapport de la variation inſtantanée à la variation totale, eſt bien plus grand alors pour ceux-là que pour ceux-ci ; & les aſtres qui ſont fort voiſins du 1er vertical, ſont ceux de la premiere condition, & ceux qui ſont fort voiſins du méridien ſont ceux de la ſeconde ; car il réſulte de ce qui a été dit ci-deſſus, que la variation dH va en croiſſant pour les aſtres qui ſont ſitués du côté du premier vertical, où eſt le pole élevé, lorſqu'ils s'approchent de ce cercle, & la variation dH' va toûjours en diminuant pour les aſtres qui ſont de l'autre côté du premier vertical : ainſi avant ou après l'inſtant où dH eſt préciſément égale à dH', $dH - dH'$ eſt d'autant moins petite que chacune de ces quantités a une plus grande variation ddH, ddH' ; & c'eſt ce qui arrive lorſque les aſtres ſont voiſins du premier vertical : au contraire $dH - dH'$ eſt d'autant plus petite, que chacune de ces quantités a une plus petite variation, & c'eſt ce qui arrive lorſque les aſtres ſont voiſins du méridien, &c.

3°. Il eſt encore viſible que ſi les deux aſtres ſitués à

peu près dans le même almicantarath, étoient de même part du premier vertical, la variation $dH - dH'$ de leur différence de hauteur, quand même elle se trouveroit petite, * ne seroit pas la plus petite dont cet élément est susceptible, & que le tems de la rencontre supposée de ces astres à un même almicantarath, est assez éloigné du tems où leur variation $dH - dH'$ est effectivement la plus petite.

Il résulte de tout cela, & du principe posé ci-dessus, que ce sont deux astres situés de différens côtés du premier vertical, de même part du méridien, & les plus proches qu'il est possible de ce dernier cercle, qu'il faut choisir pour découvrir le plus sûrement la hauteur du pole, par l'observation du passage de ces astres à un même almicantarath.

On seroit parvenu à la même conclusion, en considérant la variation de l'angle du grand cercle $ENE'F$, sur lequel deux astres sont placés, & du vertical $Z\mu N$, équidistant de ces astres, *Fig.* 26, 28, &c. car la variation de cet élément est d'autant plus petite, que les points E, E', varient moins en hauteur, & qu'ils sont plus éloignés du point mitoyen N, &c.

D'un autre côté, la variation $dH - dH'$ de la différence de hauteur de deux astres, ne sçauroit être plus grande que quand l'une des hauteurs croît pendant que l'autre décroît; & quand chacune de ces quantités dH & dH' est la plus grande qu'il est possible. Ainsi pour déterminer le plus sûrement l'heure, par l'observation de deux astres dans un même almicantarath, il faut en choisir deux qui soient de différens côtés du méridien, & le plus voisins qu'il se pourra du premier vertical : mais cela ne suffit pas, il faut encore que ces astres soient de même

* (C'est ce qui auroit lieu, si les astres étoient fort voisins.)

part du premier vertical, plutôt que de différens côtés de ce cercle, parce que la variation $dH - dH'$ a un plus grand rapport à la variation totale $H - H'$ dans le premier cas que dans le second. Il est donc avantageux pour la détermination de l'heure, par l'élément dont il s'agit, que le vertical μZN, qui est équidistant des deux astres, & perpendiculaire ou à peu près, au grand cercle $ENE'F$ où ils sont, soit co-incident avec le méridien, ou en soit peu éloigné. Et c'est aussi ce que demande l'opposition d'entre la détermination de la hauteur du pole & celle de l'heure, puisque nous avons vû qu'il convenoit à celle-là, que le cercle μZN fût co-incident avec le premier vertical, ou en fût peu éloigné.

Cette proposition que je viens d'avancer touchant la détermination de l'heure, sçavoir qu'il est à propos que les deux astres observés dans un même almicantarath, soient de même côté plutôt que de différens côtés du premier vertical, peut être confirmée par la considération de la variation de l'angle du grand cercle $ENE'F$, où sont les astres avec le vertical μZN, équidistant de ces astres: car cette variation est d'autant plus grande, le reste étant égal, que les points E, E', sont moins éloignés du point mitoyen N. Or, en supposant deux astres E, E', situés de divers côtés du méridien, & de même part du 1er vertical, & un troisieme astre E'' d'autre patt de ce cercle, & à la même distance qu'en est E', ce qui rend égales les variations dH', dH'' des hauteurs des astres E', E''; il est évident que les astres E, E', sont moins éloignés de leur point mitoyen, que les astres E', E'' ne le sont du leur; donc, &c. Mais si les astres sont de même côté du premier vertical, & peu élevés, plus ils seront éloignés l'un de l'autre, & voisins par conséquent du premier vertical, plus ils seront propres, comme je l'ai déja dit, à la déter-

mination de l'heure, parce que la variation de l'angle des cercles μNZ, $ENE'F$ augmentera plus par le plus grand changement des points E, E' en hauteur, qu'elle ne diminuera par le plus grand éloignement de ces points.

Il ſuit de la même conſidération, que ſi l'on n'eſt pas expoſé à une plus grande erreur, en croyant obſerver deux aſtres dans un même almicantarath lorſque ces aſtres ſont élevés, que lorſqu'ils ſont bas; il vaudra mieux choiſir des aſtres qui ſoient dans le premier cas, que d'en prendre qui ſoient dans le ſecond, le reſte étant égal; car plus les aſtres ſont élevés, plus ils ſont voiſins. Mais il ne faut pas abuſer de cette conſidération, & vouloir pouſſer l'avantage dont il s'agit, juſqu'à prendre des aſtres très-élevés, & par conſéquent très-voiſins, parce que le premier vertical n'étant pas exactement connu ſur mer, ſur-tout avant qu'on ſçache l'heure, on s'expoſeroit par-là à l'inconvénient que ces aſtres fuſſent trop écartés de ce grand cercle par leur azymuth, & que la variation de leur hauteur fût par conſéquent alors trop petite, &c.

A l'égard de la variation inſtantanée de la différence des angles azymuthaux de deux aſtres, différence préſumée $= 0$, lorſqu'on croit ſaiſir ces aſtres à leur paſſage par un même vertical, cette variation eſt à ſon plus haut point de grandeur, ou en eſt voiſine, 1°. Dans le cas où les angles azymuthaux changent en ſens différens, lorſque leurs changemens ſont les plus grands, ou peu s'en faut. 2°. Dans le cas où ces angles changent en même ſens, lorſque l'un de ces angles eſt dans ſon état de plus grand changement, ou en approche, & que l'autre eſt un de ceux qui changent le moins parmi ceux qui peuvent être combinés avec celui-là. Or c'eſt ce qui arrive lorſque l'aſtre ſupérieur eſt fort près du zénith & du méridien, & que l'aſtre inférieur eſt fort près de l'horiſon, ainſi que du méridien.

Le premier cas a lieu, lorſque les deux aſtres ſont du côté du premier vertical, où eſt le pole élevé; & la circonſtance dont il s'agit s'y trouve en effet: car l'aſtre ſupérieur étant au-deſſus du pole, eſt mû d'Orient en Occident; & d'ailleurs plus il eſt près du zénith, plus ſon angle azymuthal change rapidement; & l'aſtre inférieur étant plus bas que le pole, revient d'Occident en Orient au regard de l'horiſon, & d'ailleurs, plus il eſt près tant du méridien que de l'horiſon, plus le changement de ſon angle azymuthal eſt grand. La liaiſon de la proximité du méridien avec ce plus grand changement, eſt aſſez évidente par ce qui a été dit ci-deſſus. Pour l'autre point, ſçavoir que plus un aſtre ſitué au-deſſous du pole & dans le méridien ou auprès, eſt voiſin de l'horiſon, plus le changement de ſon angle azymuthal eſt grand, je le prouve, pour abréger, par le calcul. Nous avons $mk = yt$, par la cinquieme formule de M. de Maupertuis. Faiſant donc varier m & t, qui ſont les ſinus de l'angle azymuthal & de l'angle horaire, pendant que k & y, qui ſont les coſinus de la hauteur & de la déclinaiſon de l'aſtre, demeurent conſtans, nous avons $kdm = ydt$, ou $dm = \frac{y}{k} dt$. Et lorſque l'aſtre eſt fort près du méridien, ce qui rend les ſinus m & t fort petits, leurs variations dm, dt, ſont à peu près les mêmes que celles des angles auxquels appartiennent ces ſinus: la variation inſtantanée de l'angle azymuthal eſt donc proportionnelle à $\frac{y}{k}$ dans cette circonſtance. Or, je dis que cette fraction eſt d'autant plus grande, que l'aſtre eſt plus bas; car le coſinus y de ſa déclinaiſon en eſt d'autant plus grand, & quoique k ſoit auſſi plus grand que ſi l'aſtre étoit moins bas, l'augmentation que reçoit y eſt plus grande que celle de k; donc, &c.

Le second cas a lieu, lorsque les deux astres sont du côté du premier vertical où n'est pas le pole élevé, & la circonstance marquée ci-devant s'y trouve aussi, car les deux astres sont mûs en même sens, & l'angle azymuthal de celui qui est supérieur & voisin du zénith, change beaucoup: mais celui de l'astre inférieur change d'autant moins, qu'il est plus près de l'horison, & qu'il décline plus par conséquent de l'équateur, ce qui rend le cosinus y de sa déclinaison d'autant plus petit; car cet astre étant voisin du méridien, la variation de son angle azymuthal est, comme nous venons de le voir, proportionnelle à $\frac{y}{k}$. Or cette fraction est d'autant moindre, que son numérateur y est plus petit, & son dénominateur k plus grand. Il est vrai que l'astre inférieur étant supposé voisin du méridien, cette partie de son cours est celle où son angle azymuthal reçoit le plus grand changement: mais cela n'empêche pas que la variation instantanée de la différence des angles azymuthaux des deux astres situés de cette maniere, ne soit plus grande que s'ils étoient dans ou auprès d'un azymuth éloigné du méridien, parce que le changement de l'angle azymuthal de l'astre supérieur, est beaucoup plus grand dans la premiere circonstance que dans l'autre.

Il suit de-là, & du principe exposé ci-devant, que pour déterminer le plus sûrement l'heure par l'observation du passage de deux astres par un même vertical, il faut 1°, que ce vertical MZ, où on croit voir les deux astres, *Fig.* 25, 27, &c. soit le plus près qu'il est possible du méridien (de même que doit être situé, comme on l'a vû, le vertical μZN pour la même détermination, lorsqu'on observe deux astres dans un même almicantarath); & cette position du vertical MZ auprès du méridien, se-

roit au contraire très-défavorable à l'invention de la hauteur du pole. Il faut 2°, pour la détermination de l'heure par le moyen dont il s'agit, que l'un des aftres foit fort élevé, & l'autre fort bas. Je parlerai encore du même fujet dans le Chapitre fuivant.

D'un autre côté, la variation inftantanée de la différence des angles azymuthaux de deux aftres, eft dans l'état de la plus grande petiteffe, ou voifine de cet état, lorfque ces angles varient en même fens & également, ou prefque également, & le moins qu'il eft poffible; & c'eft ce qui fe rencontre, lorfque ces aftres font de même part du méridien, & que le vertical où on croit les voir eft co-incident avec le premier vertical, ou en eft peu éloigné. Cette pofition des deux aftres eft donc la plus avantageufe pour l'invention de la hauteur du pole, & la plus défavantageufe pour la détermination de l'heure. Au refte, il faut encore, pour obtenir le plus fûrement la hauteur du pole par ce moyen, que l'un des aftres foit fort élevé, & l'autre fort bas: la raifon en eft, que la variation inftantanée de la différence des angles azymuthaux de deux aftres ainfi difpofés, a un plus petit rapport à la variation totale de cet élément, que fi les deux aftres étoient à des hauteurs moins différentes: car deux aftres fitués en certain moment au premier vertical, l'un fort élevé & l'autre fort bas, feront dans quelque autre partie de leurs cours, en des azymuths bien plus éloignés, que ne feront deux aftres qui fe feront pareillement rencontrés au premier vertical, mais qui font plus voifins que ceux-là, &c.

Ce que je viens de dire fur l'état de la variation inftantanée de l'angle compris entre les azymuths de deux aftres, convient aux cas où cet angle eft réputé nul. A l'é-

gard de ceux où cet angle eſt ſuppoſé réel, & doit même avoir quelque grandeur (tels ſont les cas énoncés dans les Probl. XV & XVI.), je me borne à quelques exemples ſur l'état de la variation dont il s'agit, parce que le détail de toutes les rencontres ſeroit trop long, & peut-être ennuyeux : d'ailleurs il ne ſera pas difficile de le ſuppléer, à celui qui aura bien compris ce qui précede.

Au Probleme XVI, on fait uſage de l'angle des azymuths de deux aſtres, ſitués ſur un même almicantarath. Si donc les deux aſtres ſont aſſez près du méridien, & de même part de ce cercle, en ſorte que le vertical μZN, équidiſtant des deux aſtres, ſoit voiſin du premier vertical (poſition avantageuſe pour l'invention de la hauteur du pole), & ſi d'ailleurs les deux aſtres ſont peu élevés, & moins que le pole, l'angle azymuthal de l'un croîtra, & celui de l'autre décroîtra, & les changemens de ces angles ſeront preſque égaux : ainſi la variation de l'angle des azymuths de ces aſtres ſera petite, & déſavantageuſe par conſéquent pour l'invention de l'heure : mais ſi les aſtres ſont elevés, & plus élevés que le pole, en ſorte que celui qui eſt du côté du pole, ſoit au-deſſus du point de ſa plus grande digreſſion du méridien, les angles azymuthaux des deux aſtres changeront en même ſens, & preſque également : ainſi la variation inſtantanée de l'angle de leurs azymuths ſera grande, & pourra même être beaucoup plus grande que celle de l'angle horaire. Cette ſituation des aſtres ſeroit donc aſſez avantageuſe pour l'invention de l'heure, ſi l'angle de leurs azymuths pouvoit être pris avec peu d'erreur : mais plus les aſtres ſont élevés, & plus l'erreur à laquelle on eſt expoſé en prenant cet angle doit être grande, & je ne ſçais ſi elle ne pourroit pas monter à un degré trop conſidérable. Il n'y a donc peut-être

pas

pas de position des astres qui soit fort favorable en effet à la détermination de l'heure, dans le cas où le vertical μZN est voisin du premier vertical.

Que si on suppose que les deux astres qui ont même hauteur sont fort proches du premier vertical, & de même part de ce cercle, en sorte que le vertical μZN, équidistant des deux astres, soit voisin du méridien (position avantageuse pour l'invention de l'heure), on appercevra que l'observation de l'angle des azymuths de ces astres ne seroit pas bien favorable pour la détermination de la hauteur polaire, si les astres étoient bas; & s'ils étoient élevés, l'observation de cet angle seroit peut-être sujette à une trop grande erreur, pour être utile à la même détermination.

Au Probleme XV, le vertical où sont deux astres, peut se trouver situé très-favorablement pour donner l'heure, ou pour donner la hauteur du pole; mais l'observation de l'angle de ce vertical avec celui du troisieme astre, ne seroit assez avantageuse ni pour donner la hauteur du pole dans le premier cas, ni pour donner l'heure dans le second, si le troisieme astre étoit fort bas, quand bien l'angle dont il s'agit seroit fort grand dans le second cas, &c. Que si le troisieme astre étoit fort élevé, cet angle pourroit être tel, que s'il étoit observé sans trop d'erreur, on auroit de l'avantage pour trouver l'heure dans le second cas (& alors il faudroit que cet angle fût de 90 degrés, ou approchant), ou pour trouver la hauteur polaire dans le premier: mais l'observation supposée seroit peut-être sujette à un défaut trop grand en soi, pour que sa conséquence pût être légere. Les Probl. XV & XVI ne sont donc peut-être propres dans la pratique, qu'à donner l'une ou l'autre de ces choses, la hauteur du pole, ou l'heure, selon la rencontre.

Au Probleme XVII, on fait uſage de l'angle des azymuths de deux aſtres, & de la hauteur de l'un d'entre eux. Or, ſi l'on ne déſire qu'une de ces choſes, l'heure & la hauteur du pole, il eſt à propos que l'angle dont il s'agit, approche de 90°, plutôt que de s'en éloigner. Si, par exemple, c'eſt l'heure ſeulement que l'on veut déterminer, il faut déja, comme on l'a vû, que l'aſtre dont la hauteur ſera obſervée, ſoit voiſin du premier vertical, & il eſt encore à propos que l'autre aſtre ſoit auprès du méridien, parce que la variation inſtantanée de l'angle de leurs azymuths en ſera plus grande, puiſque le premier aſtre eſt vers la partie de ſon cours, où le changement de ſon angle azymuthal eſt le plus petit, & que l'autre ſera vers la partie de ſon cours, où le changement de ſon angle azymuthal eſt le plus grand.

Mais ſi l'on ſouhaite que l'une des obſervations du Probleme XVII ſoit avantageuſe pour la détermination de l'une des choſes dont il s'agit, & que l'autre obſervation le ſoit pour celle de l'autre choſe, l'angle des azymuths des deux aſtres doit être au moins fort petit, s'il ne peut être nul; d'ailleurs l'un des aſtres doit être aſſez élevé, & l'autre fort bas. Si l'aſtre, par exemple, dont la hauteur ſera obſervée, eſt voiſin du méridien, ce qui eſt avantageux pour déterminer la hauteur polaire, il eſt clair qu'afin que l'obſervation de l'angle des azymuths des aſtres ſoit favorable pour la détermination de l'heure, il faut 1° que l'autre aſtre ſoit pareillement voiſin du méridien, & que les hauteurs des aſtres ſoient très-différentes, parce que la variation inſtantanée de l'angle de leurs azymuths en ſera d'autant plus grande, ces azymuths avançant dans ce cas en ſens contraires, & chacun avec une rapidité approchante de la plus grande qu'il puiſſe avoir. 2°. Les aſtres étant ſuppoſés de même part du premier

vertical, il est à propos, le reste étant égal, qu'ils soient aussi de même part du méridien, parce que la variation instantanée de l'angle de leurs azymuths aura un plus grand rapport à la variation totale de cet élément, que si les deux astres étoient de divers côtés du méridien; il faut donc que l'angle des azymuths des astres soit fort petit dans l'exemple proposé, & le plus avantageux seroit qu'il fût nul. Pareillement si l'astre dont la hauteur sera observée est voisin du premier vertical, ce qui est avantageux pour l'invention de l'heure, il faut que l'autre astre soit voisin aussi du même cercle, afin que l'observation de l'angle des azymuths des astres soit favorable pour l'invention de la hauteur du pole, parce que la variation instantanée de cet élément sera fort petite, les azymuths des astres avançant dans ce cas en même sens, & avec le plus de lenteur, ou à-peu-près, qu'il se puisse, &c. Donc encore dans cet exemple, l'angle des azymuths des astres doit être fort petit, &c.

Jusqu'ici j'ai exposé les états de la variation instantanée des divers élémens employés dans les Problemes, touchant l'heure & la hauteur du pole, & j'ai fait en même tems l'application de mon Principe, au cas où l'on demande seulement l'une ou l'autre de ces choses, & où on la cherche soit par une, soit par deux observations. Il s'agit maintenant de statuer sur le cas où l'on demande conjointement l'heure & la hauteur du pole, ce qui requiert nécessairement la combinaison de deux observations; & je dis, 1°. Qu'il faut faire l'une des observations dans la rencontre la plus favorable à l'invention de l'heure, & l'autre observation dans la rencontre la plus favorable à l'invention de la hauteur du pole, nonobstant que la premiere rencontre ne soit pas propre à donner la hauteur du pole, & que la deuxieme ne soit pas propre non

plus à donner l'heure; car ces défauts respectifs des observations deviennent indifférens, dès que chacune de ces observations est avantageuse pour une des choses demandées, puisqu'il n'est pas nécessaire de bien connoître la hauteur du pole, pour obtenir l'heure aussi exactement qu'il se peut, ni de bien connoître l'heure, pour obtenir pareillement la hauteur du pole avec la justesse possible.

Par exemple, si c'est par le passage de deux couples d'astres à deux verticaux, que l'on veuille déterminer l'heure & la hauteur du pole, ce qui est le sujet du Probleme XI, il faut que l'un des verticaux soit co-incident, s'il se peut, avec le méridien, ou en soit fort voisin, & que l'autre soit de même co-incident avec le premier vertical, ou fort près de ce cercle. Si c'est par les hauteurs de deux astres que l'on cherche les deux choses dont il s'agit, ce qui est le sujet du Probleme second, il faut que l'un des astres soit sur le premier vertical, ou auprès, & que l'autre soit au méridien, ou en soit proche, &c.

2°. Si les deux rencontres ou circonstances qui se présentent, pour les deux observations dont on a besoin, ne sont pas les plus favorables de toutes, chacune à chaque chose demandée, il faut, le reste étant égal, que ces circonstances aient entre elles un certain rapport égal, ou approchant de celui qui se trouve entre les circonstances qui sont absolument les plus favorables de toutes. C'est ce qui va être expliqué par des exemples.

Au Probleme second, les deux rencontres les plus favorables absolument, tant à l'invention de l'heure, qu'à celle de la hauteur du pole, sont, comme je viens de le dire, que l'un des astres soit au méridien, & l'autre au premier vertical. Or il se trouve entre ces circonstances ce rapport, sçavoir que les azymuths des deux astres sont un

angle droit. Lors donc qu'il n'y aura ni fur le premier vertical, ni au méridien, des aftres dont on puiffe obferver les hauteurs, il faudra, le refte étant égal, en choifir deux dans les parties du ciel adjacentes, dont les azymuths faffent un angle droit, ou approchant d'un droit, par préférence à ceux dont les azymuths feroient un angle plus différent d'un droit. Si, par exemple, il y a un aftre E à côté du méridien, dans la partie orientale & méridionale du ciel, un fecond aftre E' à côté du premier vertical, dans la partie Orientale & Septentrionale, enfin un troifieme aftre E'' à même diftance que l'aftre E' du premier vertical, mais fitué dans la plage Occidentale & Septentrionale, l'azymuth du premier aftre, fait avec l'azymuth du fecond un angle plus approchant d'un droit, que n'eft celui qu'il fait avec l'azymuth du dernier aftre. C'eft donc la hauteur de l'aftre E' qu'il faut obferver, & combiner avec celle de l'aftre E, préférablement à celle de l'aftre E''.

Au Probleme XI, où l'on fait ufage du paffage de deux couples d'aftres à deux verticaux, il faut, fi ces verticaux font autres que le méridien & le premier vertical, qu'ils faffent du moins un angle droit, ou approchant d'un droit. Au Probleme XIII, où l'on fait ufage des paffages d'une couple d'aftres à un vertical, & d'une autre couple à un même almicantarath, il faut pareillement que le vertical $\mu ZN'$, équidiftant de ces derniers, faffe avec celui où paffent les deux premiers, l'angle le plus approchant d'un droit.

Je fonde cette deuxieme regle en premier lieu, fur fon analogie avec la regle précédente. Je pourrois l'établir en fecond lieu, en fpécifiant, & en prouvant par le calcul l'avantage de la pratique propofée. Il confifte, cet avantage, lorfque les deux obfervations font erronées,

d'un côté en ce que leurs erreurs quelconques ont des effets contraires à l'égard de l'une ou de l'autre des chofes défirées ; c'eft-à-dire, foit à l'égard de l'heure, foit à l'égard de la hauteur du pole, effets qui fe compenfent par conféquent jufqu'à un certain point, & peuvent fe compenfer parfaitement : d'un autre côté, en ce que les erreurs des obfervations ne tirent que médiocrement à conféquence, pour la chofe à l'égard de laquelle elles font confpirantes. Et dans le cas où une feule des obfervations pecheroit, le vice de cette obfervation partageroit fon influence entre les deux chofes défirées, de maniere que fon effet en feroit moindre fur chacune. Mais fi l'on s'écartoit de la regle dont il s'agit, les défauts des obfervations, ou le défaut feul de l'une d'elles, entraîneroit une erreur non-médiocre fur l'une des chofes défirées, & d'ailleurs lorfque les deux obfervations pecheroient, leurs défauts pourroient ne pas produire des effets contraires à l'égard de l'autre chofe.

L'avantage que j'attribue à la feconde regle, peut enfin être rendu fenfible par la confection de quelques figures, & par des exemples, & c'eft le parti que je prends. Je donnerai par la même voie, une nouvelle preuve de la premiere regle du cas dont il s'agit, & je retoucherai un point traité précédemment. Ces démonftrations ferviront d'ailleurs, ou conduiront à deux chofes ; fçavoir 1° à enfeigner au Navigateur un moyen facile de difcerner à peu près le degré d'erreur auquel il eft expofé dans la recherche de l'heure, ou de la hauteur du pole, ou de l'angle azymuthal d'un aftre, en quelque occurrence qu'il fe trouve. 2°. A juftifier ce que j'ai avancé touchant quelques utilités du planifphere propofé ci-devant.

Je prends le fujet du Probleme fecond pour exemple. Soit, *Fig.* 31, 32, 33, 34, *P* le pole; z le vrai zénith,

$P\Sigma$ une partie du vrai méridien : ſoient $\varsigma\Sigma E$, & $\varsigma'\Sigma E'$, ou $\Sigma\varsigma' E'$ des portions des verticaux où ſont réellement les aſtres E, E', dont les hauteurs ſont obſervées : ſoient $Z\varsigma$, $Z\varsigma'$, des arcs des cercles qui ont les points E, E' pour poles, & pour amplitudes les complémens des hauteurs obſervées, arcs dont l'interſection Z eſt différente du vrai zénith, lorſque les obſervations des hauteurs des aſtres péchent, ſoit par excès, ſoit par défaut, & eſt priſe cependant pour le zénith. Les arcs $\Sigma\varsigma$, $\Sigma\varsigma'$, ſont égaux aux petites quantités dH, dH', dont on peut ſe tromper dans ces obſervations. Les arcs $Z\varsigma$, $Z\varsigma'$, ayant leurs poles dans les azymuths $\varsigma\Sigma E$, $\varsigma'\Sigma E'$, ſont perpendiculaires à ces cercles : ſi l'on peut donc regarder les lignes qui compoſent le quadrilatere $Z\varsigma\Sigma\varsigma'$ rectangle en ς, ς', comme droites ou preſque droites, on aura l'angle $\varsigma Z\varsigma'$, égal ou à peu près égal au complément de l'angle $\varsigma\Sigma\varsigma'$ que font les deux verticaux où ſont les aſtres : ainſi les lignes ςZ, $\varsigma' Z$, ont à peu près la même inclinaiſon reſpective que les verticaux des aſtres ; & ſi ces verticaux comprennent un angle droit, *Fig.* 31, 32, 33, l'angle $\varsigma Z\varsigma'$ eſt droit, ou à peu près, & le quadrilatere $Z\varsigma\Sigma\varsigma'$ peut être pris pour un parallelogramme.

Suppoſons maintenant 1° que l'un des aſtres eſt au méridien, & l'autre au premier vertical, conformément à la premiere regle, *Fig.* 31, & que l'erreur $\varsigma'\Sigma$ ſur la hauteur du premier eſt de 10 minutes, & l'erreur $\varsigma\Sigma$ ſur la hauteur du ſecond, de 15 ; le zénith putatif Z ſera, il eſt vrai, éloigné du véritable de 18 minutes & plus, mais d'un côté ce faux zénith Z ſera ſeulement éloigné du méridien d'une quantité à peu près égale à $\varsigma\Sigma$, qui eſt l'erreur commiſe ſur la hauteur de l'aſtre ſitué au premier vertical. L'angle $ZP\Sigma$ eſt l'erreur qui en réſulte ſur l'angle horaire, & il eſt aiſé de reconnoître que cet angle eſt à

l'arc $\varsigma\Sigma$, à peu près comme le finus total eft au finus de $P\Sigma$, c'eft-à-dire au cofinus de la hauteur du pole. (C'eft ce que nous avons déja vû plus haut, en trouvant par le calcul $dE = \frac{r}{c} dH$.) D'un autre côté, le faux zénith fera feulement éloigné du premier vertical d'une quantité à peu près égale à $\varsigma'\Sigma$, en forte que $PZ - P\Sigma$, ou $P\Sigma - PZ$, qui eft l'erreur réfultante fur la hauteur du pole, fera égale feulement à l'erreur fur la hauteur de l'aftre fitué au méridien, c'eft-à-dire, de dix minutes ou environ.

Enfin, les cercles ZE, ZE', étant pris pour les azymuths des aftres, les angles $ZE\Sigma$, $ZE'\Sigma$, feront les erreurs fur les angles azymuthaux. Remarquons en paffant, que plus les aftres feront bas, moins ces erreurs feront confidérables, & que les hauteurs étant égales, on fera expofé à une moindre erreur fur l'angle azymuthal de l'aftre fitué au premier vertical, que fur l'angle de l'autre.

Suppofons 2° que les deux aftres font dans des azymuths également éloignés du méridien & du premier vertical, rencontre qui s'écarte de ce que requiert la premiere regle le plus qu'il fe puiffe, en rempliffant la feconde. Suppofons encore que les erreurs fur les obfervations des hauteurs de ces aftres font égales, & de 15 minutes chacune; le quadrilatere $Z\varsigma\Sigma\varsigma'$ fera un quarré, & la diftance du zénith putatif Z au vrai zénith, fera de plus de 21 minutes: mais dans le cas de la *Fig* 32, le point Z fe trouve fur le méridien, & l'erreur dans la pofition de ce point, tombe feulement fur la hauteur du pole: & dans le cas de la *Fig.* 33, le point Z fe trouve fur le premier vertical, ainfi on fe trompe de l'angle $ZP\Sigma$ fur l'heure, & comme PZ ne differe pas fenfiblement

blement de $P\Sigma$ en grandeur, il ne résulte pas d'erreur sur la hauteur du pole. Dans le cas des *Fig.* 32 & 33, les deux astres sont de même part du méridien ; il en seroit de même si les deux astres étoient de différens côtés de ce cercle, l'erreur dans la position de Z, pourroit n'influer que sur la détermination de l'heure, ou que sur celle de la hauteur du pole, ainsi que je l'ai avancé. Quant à ce que j'ai dit que l'erreur résultante de celles des observations n'est que *médiocre*, je l'entends dans ce sens, que la distance des points $Z\Sigma$ est moindre que la somme des erreurs des deux observations. On doit bien appercevoir maintenant, & sans que je le montre plus expressément, que la rencontre des *Fig.* 32 & 33 est moins avantageuse que celle de la *Fig.* 31, requise par la premiere regle, pour le cas où l'on demande conjointement l'heure & la hauteur du pole.

Si dans cette hypothese des *Fig.* 32, 33, l'observation de la hauteur d'un des astres étoit exacte, celle, par exemple, de l'astre E, la ligne $Z\varsigma$ tomberoit en $\varsigma'\Sigma$, & le point Z en ς', en sorte que le zénith putatif seroit également éloigné du méridien, & du premier vertical, sçavoir des quantités $\varsigma'\delta$, & $\delta\Sigma$, moindres chacune que l'erreur $\varsigma'\Sigma$, commise par excès, ou par défaut, sur la hauteur de l'astre E' $\varsigma'\Sigma$ étant de 15 minutes, $\varsigma\delta = \delta\Sigma$, seroit d'environ 10 minutes & demie.

Supposons 3°, que les azymuths des deux astres font un angle très-différent d'un droit, & que ces azymuths, ou du moins l'un d'entre eux, sont beaucoup plus près du premier vertical que du méridien, *Fig.* 34. Cette rencontre approche de celle que recommande la regle que j'ai donnée, pour le cas où l'on désireroit avoir seulement l'heure, & elle est rejettée par les deux regles du cas où l'on chercheroit conjointement l'heure & la hauteur du

pole : auſſi eſt-il viſible, que le zénith putatif Z eſt fort éloigné du vrai zénith Σ, lorſque les erreurs des obſervations auxquelles ſont égales les arcs $\varsigma\Sigma$, $\varsigma'\Sigma$, ont des influences contraires à l'égard de l'heure, & que cet éloignement des points Z, Σ, cauſe une erreur notable ſur la détermination de la hauteur du pole, erreur qui eſt d'autant plus grande, le reſte étant égal, que le point Z eſt plus voiſin du méridien.

Pour ſupplément à ce que j'ai dit ſur le cas où l'on chercheroit ſeulement l'heure par les obſervations des hauteurs de deux aſtres, j'ajoûte que quand les branches d'azymuth où ils ſe trouvent, font un angle très-aigu, & que l'un des deux eſt à une hauteur médiocre, il faut que l'autre ſoit à une hauteur différente. La raiſon de cette regle eſt plus aiſée à appercevoir par la confection d'une figure qu'autrement. Elle dépend, cette raiſon, de ce que les arcs $Z\varsigma$, $Z\varsigma'$, des cercles qui ont les deux aſtres pour poles, & les complémens de leurs hauteurs pour amplitudes, ont leurs concavités tournées en même ſens dans la premiere ſuppoſition, &c. Dans le cas de la même recherche, & lorſque les branches d'azymuth où ſont les aſtres, font auſſi un angle très-aigu, ou bien en font un fort obtus, il faut encore que les aſtres ne ſoient pas tous deux très-bas, s'ils ſont à quelque diſtance du premier vertical, &c. En un mot, il faut communément que les deux aſtres par les hauteurs deſquels on prétend déterminer l'heure ſans la hauteur du pole, & indépendamment de la connoiſſance qu'on peut avoir de cette hauteur par eſtime, ne ſoient pas bien voiſins (le Lecteur ſuppléera aiſément les raiſons de cette aſſertion). Et de-là il ſuit, que lorſqu'un ſeul aſtre ſe préſente à l'Obſervateur, il faut qu'il y ait certain intervalle entre les momens où il prendra deux hauteurs de cet aſtre, afin qu'il puiſſe en déduire l'heure avec quelque juſteſſe.

Je crois qu'on apperçoit déja, par les *Fig.* 31, 32, 34, l'utilité que le Navigateur tireroit d'un planifphere, pour découvrir les limites de l'erreur, que les vices inévitables de fes obfervations peuvent jetter en certaines rencontres dans la recherche qu'il veut faire, foit de l'heure, foit de la hauteur du pole, foit de l'angle azymuthal d'un aftre. Et pour juger par-là fi fes obfervations méritent ou non dans ces rencontres, qu'il prenne leur réfultat par la voie du calcul; après avoir déterminé le point du zénith putatif Z, il n'auroit qu'à opérer enfuite fur des fuppofitions qui différaffent de fes obfervations, autant que celles-ci peuvent s'écarter de la réalité: il formeroit ainfi une figure, dans laquelle le point du vrai zénith feroit enfermé, & il verroit jufqu'où ce point peut être éloigné pour le plus, foit du méridien, foit du premier vertical putatif, qui paffent par Z. Le Navigateur n'auroit pas même abfolument befoin de faire cette figure en entier, ni de la conftruire toûjours avec une fcrupuleufe précifion.

Qu'il décrive, par exemple, dans le cas du Probleme fecond, des arcs σs, $s\sigma$, &c. *Fig.* 35, des cercles qui ont les deux aftres pour poles, & pour amplitudes refpectives les complémens de leurs hauteurs obfervées, plus & moins les quantités dH, dH', dont on peut fe tromper dans ces obfervations: ces arcs compoferont autour de Z, un quadrilatere $s\sigma s\sigma$, dans lequel fera contenu le point du vrai zénith. Or comme le vertical de l'un ou de l'autre des aftres, divife ce quadrilatere en deux portions qui font à peu près égales & femblables, il n'eft pas néceffaire de le former en entier, il fuffit d'en faire une moitié, & même la partie de cette moitié où eft la limite du plus grand écart où l'on puiffe tomber à l'égard du méridien, ou du premier vertical. Il n'eft pas néceffaire non plus, de chercher les centres propres des arcs $s\sigma$,

σs, &c. On peut opérer ſur ceux qui ont ſervi pour la détermination du point Z, en changeant ſeulement l'ouverture du compas. On peut en un mot, prendre bien des licences, & faire cette eſpece d'opération très-promptement.

Voici un autre exemple. Si l'on eſt dans le cas du Probleme VII, où la hauteur du pole étant donnée, & deux aſtres étant réputés vûs au même vertical, on cherche l'heure. Soit, *Fig. 36*, $ENE'Z$ le grand cercle ſur lequel ces deux aſtres ſont ſitués; PZ le complément de la hauteur polaire donnée : le vrai zénith peut ſe trouver à quelque diſtance de part ou d'autre du grand cercle $ENE'Z$. Soient donc décrits des arcs $s\sigma$, $s\sigma$, de cercles paralleles à $ENE'Z$, & qui en ſoient autant éloignés, que l'on préſume que ce grand cercle peut être écarté du vrai zénith : puis du centre P, ſoient décrits d'autres arcs ss, $\sigma\sigma$, de cercles qui aient pour amplitudes le complément de la hauteur polaire ſuppoſée, plus & moins la quantité dont on a pû ſe tromper dans l'obſervation, ou l'eſtime de cette hauteur, & l'on aura un quadrilatere $\sigma s s \sigma$, où le point du vrai zénith ſera enfermé.

On doit remarquer maintenant, ſi on ne l'a fait déja, que les rencontres que j'ai dit être avantageuſes pour la recherche de l'heure & de la hauteur du pole, ont la plûpart ce caractere, ſçavoir que les lignes qui doivent être tirées ſur le planiſphere, pour la ſolution des Problemes touchant ces choſes, ſe coupent dans ces rencontres perpendiculairement, ou à peu près. J'ai dit, par exemple, que quand on veut obſerver deux aſtres dans un même vertical, ce qui eſt ſuppoſé aux Probl. VII, XI, &c. il faut que l'un des aſtres ſoit très-élevé, & l'autre fort bas; c'eſt à-dire, que l'intervalle de ces aſtres approche de 90 degrés : & il eſt viſible que cela étant, les deux arcs

de cercle qu'il faut décrire pour trouver ſur le planiſphere le pole *Q* du grand cercle, ſur lequel les deux aſtres ſont ſitués, & pour avoir ainſi le moyen de tracer ce grand cercle, feront des angles approchans d'un droit.

J'ai dit pour le cas du Probl. VII, que le vertical où les deux aſtres ſont obſervés, doit être fort voiſin du méridien; & il eſt viſible que cela étant, le cercle $Zi\zeta$, décrit autour du pole, *Fig.* 25, avec un rayon équivalent au complément de la hauteur donnée de ce point, coupera le vertical des aſtres ſous un angle approchant d'un droit. J'ai dit pour le cas du Probl. XVII, où l'on ſuppoſe donné l'angle des azymuths de deux aſtres, avec la hauteur de l'un d'eux; que lorſqu'on cherche conjointement l'heure & la hauteur du pole, cet angle doit être fort petit: & l'on peut voir que cela étant, on tirera des lignes preſque perpendiculaires dans l'opération graphique, par laquelle on déterminera la poſition de l'aſtre dont la hauteur n'eſt pas obſervée, &c.

Au contraire, les rencontres déſavantageuſes, & les plus déſavantageuſes, au moins à quelque égard, ont cette qualité que les lignes qui doivent être tracées pour la ſolution des Problemes dont il s'agit, ſont inclinées l'une à l'autre, & fort inclinées.

Or, quand des lignes ſe coupent perpendiculairement, ou à peu près, leur point d'interſection eſt facile à diſcerner, & ce point ſeroit au contraire difficile à reconnoître, ſi les lignes qui ſe croiſent, étoient fort inclinées reſpectivement.

Donc 1°, lorſque les interſections des lignes tracées ſur le planiſphere pour la détermination de l'heure & de la hauteur du pole, feront difficiles à diſcerner, le Navigateur peut de cela ſeul conclurre pour l'ordinaire, que la rencontre où il a fait ſon obſervation, ou ſes obſerva-

tions, eſt déſavantageuſe au moins à quelque égard, en ſe ſervant même du calcul.

2°. Puiſque les interſections des lignes tracées ſur le planiſphere, pour les Problemes dont il s'agit, ſont faciles à diſcerner dans les rencontres avantageuſes, on doit en conclurre que l'uſage du planiſphere eſt peu défectueux dans ces rencontres, & qu'il ne le ſeroit notablement, que dans celles qui doivent être rejettées. Cette conſéquence eſt peut-être aſſez évidente, cependant pour ne rien négliger, je vais l'appliquer à un exemple.

Soient deux aſtres réputés vûs dans un même vertical; quelque ſoit leur poſition, on ſera, je l'avoue, expoſé en opérant ſur le planiſphere, à mettre un peu à côté de leur vraie place, les arcs dont l'interſection doit indiquer le pole du grand cercle qui paſſe par les aſtres, parce qu'on peut faire les rayons de ces arcs un peu trop grands ou trop petits. Or ſi les deux aſtres étoient fort voiſins, on ſeroit d'ailleurs expoſé à prendre, au lieu du vrai point d'interſection de ces arcs, bien ou mal placés, un autre point qui en ſeroit éloigné: ainſi on riſqueroit de placer fort mal le pole putatif du grand cercle des deux aſtres, & d'en décrire un autre qui en ſeroit fort écarté par quelques endroits, entre leſquels pourroit être la région du zénith. L'uſage d'une opération graphique ſeroit donc, j'en conviens, défectueux dans cette rencontre où les aſtres ſont voiſins: mais auſſi elle eſt déſavantageuſe, cette rencontre, puiſqu'on y ſeroit expoſé à réputer les aſtres dans un même vertical, en quelque moment où le grand cercle ſur lequel ils ſont ſitués, ſeroit fort écarté du zénith. Mais ſi l'un des aſtres eſt fort élevé, & l'autre fort bas, en ſorte que leur intervalle approche de 90 degrés, on diſcernera très-bien le vrai point d'interſection des arcs tracés pour l'invention du pole du grand cercle où ſont

les deux astres : ainsi on ne risquera pas de se tromper notablement dans la fixation de ce pole, & le cercle qu'on décrira par les deux astres, en conséquence de cette fixation ne pourra s'écarter que peu de ce grand cercle, où ils sont réellement, principalement vers la région du zénith. L'opération graphique ne sera donc que peu défectueuse en cette rencontre.

Au reste, je crois qu'on voit assez pourquoi j'ai usé de restriction dans la remarque précédente. Il y a en effet des rencontres avantageuses à quelque égard, quoique le vrai point d'intersection des lignes tracées sur le planisphere soit difficile à discerner en ces rencontres. Ainsi celle qui répond à la *Fig.* 34, est favorable d'un côté pour la détermination de l'heure, quoique désavantageuse d'ailleurs pour l'invention de la hauteur du pole : & l'on peut voir encore que l'opération graphique a deux qualités différentes en cette rencontre, c'est-à-dire, qu'elle est peu défectueuse pour la détermination de l'heure, quoiqu'elle le soit beaucoup pour celle de la hauteur polaire : car la ligne qui joint les points *P*, *Z*, & qui est le méridien putatif, étant fort inclinée aux deux arcs *ˢZ*, *ˢ'Z*, il est aisé de reconnoître la vraie position de cette ligne, & l'on ne peut gueres s'en écarter, quoique le zénith putatif *Z* soit difficile à fixer, & que l'on puisse le placer notablement trop loin, ou trop près du pole. Il en est de même pour tout autre cas favorable, où les lignes tracées sur le planisphere seroient fort inclinées ; & il est vrai généralement & absolument, que les opérations graphiques ont toute la précision dont ce genre est susceptible, & qu'elles sont par conséquent peu défectueuses, dans toutes les rencontres favorables à quelque détermination, & relativement à cette détermination.

Pour conclusion de ce long Chapitre, je vais donner

le réſultat du calcul trigonométrique, à l'égard d'une hypotheſe priſe pour exemple, par un des premiers Membres d'une Compagnie très-ſçavante. Cela ſervira à montrer de plus en plus, l'importance des regles que j'ai établies. J'ai rapporté au Chapitre ſecond de la Partie précédente, que l'on a propoſé dans les Mémoires de l'Académie des Sciences, un procédé pour l'invention de l'heure, de la hauteur du pole, & de l'angle azymuthal. * Ce procédé me paroît très-bon, comme je l'ai déja dit: mais qu'il me ſoit permis d'ajoûter, que le cas particulier auquel on l'a appliqué, n'a pas été bien choiſi.

On ſuppoſe que l'on a obſervé deux hauteurs du Soleil, *à une heure d'intervalle ſeulement*, la déclinaiſon de cet aſtre étant de 13° 50′ du côté du pole élevé, & que l'une des hauteurs eſt de 36° 53′; & l'autre de 45° 53′. Les obſervations étant ſuppoſées parfaitement exactes, il en réſulte que la hauteur du pole eſt de 46° 45′; que l'angle horaire au moment de la premiere obſervation, eſt de 50° 10′ 4″, 4 (ce qui réduit en tems, donne cette obſervation à 8 heures 39′ 19″ 42‴ du matin); que l'angle azymuthal du Soleil au moment de la même obſervation, eſt de 68° 47′, & au moment de la deuxieme obſervation, de 53° 27′ 22″, en ſorte que l'angle de l'azymuth du Soleil avec le premier vertical, eſt de 36° 32′ 44″ en ce ſecond moment, & que l'angle des deux azymuths du Soleil, eſt ſeulement de 15° 19′ 38″.

Pour revenir à ce qui eſt ordinaire, ſuppoſons maintenant que les obſervations des deux hauteurs ſont erronées, Il y a, je l'avoue des combinaiſons d'erreur, dont la conſéquence n'eſt pas conſidérable; tels ſont les cas où ces obſervations pecheroient toutes deux en même ſens, ſoit

* C'eſt dans un Mémoire intitulé : *Réſolution d'une Queſtion aſtronomique, utile à la Navigation*, Pag. 255. des Mém. de 1736.

par

par excès, soit par défaut. Supposons, par exemple, qu'elles sont trop foibles chacune de six minutes, c'est-à-dire, que la premiere hauteur est réputée de 36° 47′, dont le complément est 53° 13′, & la seconde de 45° 47′, dont le complément est 44° 13′. D'ailleurs, faisons abstraction du déplacement de l'Observateur, tant en longitude qu'en latitude, pendant l'intervalle des observations, &c. Cet intervalle étant d'une heure juste, l'arc de grand cercle *EE′*, compris entre les deux lieux du Soleil dans son parallele, est de 14° 34′, & l'angle *PEE′* de cet arc avec l'horaire du Soleil, est de 88° 12′, selon le mém. cité. On trouve donc pour l'angle putatif *ZEE′* de cet arc, avec l'azymuth du Soleil au moment de la premiere observation, 47° 4′ 46″: ainsi l'angle putatif *PEZ* de cet azymuth du Soleil avec son cercle horaire, est de 41° 7′ 4″, & on trouve pour l'angle horaire putatif *EPZ* en ce moment 50° 18′ 23″, 45; (c'est environ 8′ 19″ d'excès sur le véritable, ou bien une erreur de 33″ 16‴ de tems) & pour la hauteur putative du pole, 46° 48′ 22″ (c'est 3′ 22″ d'excès sur la véritable), &c. Ces erreurs qui résultent de celles des observations sont, dis-je, légeres.

Mais il n'en seroit pas de même, si les observations des hauteurs péchoient l'une par excès, l'autre par défaut, ce qui est fort possible. Mettons seulement que l'une est trop foible, & l'autre trop forte de six minutes, ce qui n'est pas la moitié de toute l'erreur à laquelle on est exposé en mer, selon M. Bouguer, & supposons, par exemple, que c'est la premiere observation qui est foible, c'est-à-dire, qu'elle est de 36° 47′, dont le complément est 53° 13′, & que l'autre hauteur est réputée de 45° 59′, dont le complément est 44° 1′. On trouve pour l'angle putatif *ZEE′* de l'arc *EE′*, avec l'azymuth du Soleil au mo-

ment de la premiere obſervation 46° 8′ environ ; ainſi l'angle putatif *PEZ* de cet azymuth du Soleil avec ſon cercle horaire, eſt de 42° 4′ ; & on trouve enſuite pour l'angle horaire putatif *EPZ*, au moment de la premiere obſervation, 50° 40′ (c'eſt près de 30′ de degré, ou bien deux minutes d'heure d'excès ſur le véritable) ; pour la hauteur putative du pole 46° 4′ 35″ (c'eſt 40′ 35″ de différence par défaut d'avec la vraie) ; pour l'angle azymuthal putatif du Soleil au moment de la premiere obſervation, 69° 41′ (c'eſt 54 minutes d'excès ſur le véritable) ; pour l'autre angle azymuthal, 54° 34′ (c'eſt 66′ 38″ d'excès ſur le véritable) ; enfin pour l'angle des deux azymuths du Soleil 15° 7′, (c'eſt 12′ 38″ de différence par défaut du véritable : cette erreur eſt à peu près la même que la ſomme des deux erreurs commiſes ſur les hauteurs. Quant aux erreurs ſur les angles azymuthaux, je ne peux m'empêcher de remarquer en paſſant, qu'elles ſont très conſidérables par rapport à celles qui les produiſent, & qu'il eſt étonnant qu'on ait propoſé un cas où l'on ſeroit expoſé à de telles erreurs, ſurtout depuis l'édition du beau Mémoire de M. Bouguer, ſur la méthode d'obſerver en mer la déclinaiſon de la Bouſſole, qui eſt de 1731. Ce Sçavant prétend, Art. dernier de cette Piece, qu'*en déterminant les endroits du ciel où doivent être les aſtres, lorſqu'on veut découvrir en mer la variation de la Bouſſole, par une ſeule obſervation, il marque auſſi aſſez les endroits qu'il faut préférer, lorſqu'on en emploie pluſieurs.* Et il ajoûte cet avis, ſçavoir, qu'*on multiplie quelquefois mal-à-propos le nombre des obſervations, ſans penſer que c'eſt preſque toujours* *

* Ce mot, *preſque toûjours*, eſt peut-être exceſſif, à moins que l'Auteur ne parle d'obſervations faites en divers tems, car en multipliant les obſervations contemporaines, & les réuniſſant, la conſéquence de leurs erreurs doit ordinairement être plus légere [Au reſte, M. B. n'a peut-être pas marqué ſuffiſamment, comme il l'avance, tous les endroits du ciel avantageux pour la détermination

multiplier les occaſions de ſe tromper; c'eſt-à-dire, comme je l'entens, *ſans penſer* qu'on peut les combiner d'une maniere déſavantageuſe, & de grande conſéquence. C'eſt juſtement ce qui eſt arrivé dans le Mémoire cité de 1736.)

Il en ſeroit à peu près de même, ſi on ſuppoſoit au contraire la premiere obſervation trop forte de ſix minutes, & la deuxieme trop foible de la même quantité; c'eſt-à-dire, celle-là de 36° 59′ (compl. 53° 1′), & celle-ci de 45° 47′ (compl. 44° 13′) : car on trouve dans ce cas, pour l'angle putatif, ZEE' 47° 59′ 18″, 16; ainſi l'angle putatif PEZ, vaut 40° 12′ 41″, 84 : & l'on a pour l'angle horaire putatif au moment de la premiere obſervation, 49° 38′ 27″, 5, angle différent du vrai d'environ 31′ 37″, ou de 2 minutes 6″ 28‴ de tems par défaut; & pour la hauteur putative du pole, 47° 24′ 20″, hauteur qui excede la vraie de 39′ 40″, &c.

Pour donner un bon exemple de détermination des trois choſes propoſées dans le Mémoire cité, il eût fallu combiner deux obſervations, l'une faite vers midi, & l'autre environ ſix heures 53′ 40″ du matin, ou 5 heures 6′ 20″ du ſoir, momens où le Soleil paſſe au premier vertical, & ſe trouve à 19° 10′ de hauteur, lorſque ſa déclinaiſon eſt de 13° 50′, & la hauteur du pole de 46° 45′, comme il a été ſuppoſé ci-deſſus. Car quelque fût la

de l'angle azymuthal, dans le cas où l'on a beſoin de deux obſervations; ou du moins quelqu'un pourroit ne pas aſſez pénétrer cette conſéquence de ſa doctrine, & ſe méprendre : car il eſt avantageux pour la détermination de l'angle azymuthal, par une ſeule obſervation de hauteur, que l'aſtre ſoit voiſin du premier vertical; ainſi quelqu'un pourroit penſer qu'il eſt avantageux auſſi pour la détermination de cet angle de combiner deux obſervations de hauteurs priſes dans le voiſinage du premier vertical, mais c'eſt tout le contraire : la combinaiſon de ces obſervations ſeroit dangereuſe, quoique chacune ſoit favorable en particulier; c'eſt ce qu'on peut voir en prenant le réſultat de la derniere hypotheſe de ce Chapitre. Une bonne combinaiſon pour la recherche dont il s'agit, lorſqu'on a une obſervation de hauteur auprès du premier vertical, eſt d'y en joindre une priſe auprès du méridien, &c.

combinaiſon des erreurs des deux obſervations, l'erreur qui en réſulteroit ſur l'angle horaire, ne ſeroit que d'environ $8' 46''$ de degré, ou de $35'' 4'''$ d'heure, l'obſervation du Soleil auprès du premier vertical, étant ſuppoſée ſeulement erronée de 6 minutes, comme ci-devant, &c.

Peut-être dira-t-on que l'intervalle des obſervations qui excede 5 heures dans cette derniere hypotheſe, eſt trop conſidérable, & que non-ſeulement la déclinaiſon du Soleil varieroit ſenſiblement dans cet intervalle, mais que le vaiſſeau pourroit faire beaucoup de chemin, ſoit en longitude, ſoit en latitude, ce qui altere une ou pluſieurs circonſtances du Probleme, &c. (c'eſt apparemment par cette conſidération, que dans le mémoire cité on n'a mis qu'une heure d'intervalle entre les deux obſervations). Je réponds ſur cela, 1°. Que je ne conſeille pas abſolument de combiner des obſervations faites en des momens éloignés, je ne le fais que pour le cas où il n'y a qu'un ſeul aſtre qui ſe préſente à l'Obſervateur, & où il y a pluſieurs choſes à déterminer. 2°. Je remarque qu'il eſt aiſé d'avoir égard aux altérations cauſées par le mouvement du vaiſſeau, pourvû qu'on ſçache à peu près la direction & la longueur de ſa route, &c. 3°. Si l'on ne veut pas entrer dans cette diſcuſſion, on peut ſe contenter de chercher une ſeule de ces choſes à la fois, l'heure, ou la hauteur du pole, en ſe fondant ſur une obſervation favorable à cette choſe, & ſur la connoiſſance qu'on a de l'autre par eſtime. 4°. Enfin, ſi le Navigateur ſe défie trop de ſon eſtime, & qu'il veuille ne mettre qu'un petit intervalle entre les deux obſervations de hauteur, néceſſaires pour déterminer ou l'heure, ou la hauteur du pole, il faut qu'il choiſiſſe pour ces obſervations, des endroits du ciel moins éloignés du premier vertical, ou du méridien, que dans l'hypotheſe du Mémoire de 1736.

Pour trouver l'heure, par exemple, il faut prendre chacune des hauteurs du Soleil, lorſqu'il eſt dans un azymuth le plus voiſin qu'il ſe peut du premier vertical, en laiſſant un intervalle raiſonnable entre les deux obſervations; c'eſt-à-dire, qu'il faut prendre une des hauteurs avant que le Soleil arrive au premier vertical, & l'autre après qu'il y a paſſé. Suppoſons en conſéquence de cette propoſition, que le Navigateur étant, par la même latitude (46° 45′), & le Soleil à la même déclinaiſon que ci-deſſus, cet aſtre ſoit obſervé à ſix heures & demie, & à ſept heures & demie préciſes du matin (c'eſt le même intervalle que ci-deſſus), les deux hauteurs en ces deux momens doivent être 15° 7′ 44″, 7 & 25° 23′ 19″.

Or, ſi les deux obſervations pechent en même ſens; c'eſt le cas où l'erreur qui en réſultera ſur l'angle horaire ſera la plus grande, mais peu conſidérable cependant. Suppoſons, par exemple, les deux obſervations trop foibles chacune de ſix minutes, c'eſt-à-dire, que la premiere hauteur eſt réputée de 15° 1′ 44″, 7, dont le compl. eſt 74° 58′ 15″, 3; & l'autre de 25° 17′ 19″, dont le compl. eſt 64° 42′ 41″, on trouve pour l'angle putatif *PEZ*, au moment de la premiere obſervation, 44° 42′ 11″,44; & pour l'angle horaire putatif, au même moment, 82° 39′ 10″, angle qui excede le véritable de 9′ 10″, ou bien de 39″ 40‴ de tems. Cette erreur n'eſt que de très-peu plus grande que celle qui ſe trouve dans la combinaiſon d'une obſervation faite au paſſage même par le premier vertical, avec une obſervation de hauteur méridienne.

Suppoſons enfin que les deux obſervations pechent en ſens contraires; que la premiere hauteur eſt réputée, par exemple, trop petite, & la deuxieme trop grande, c'eſt-à-dire, que celle-là eſt réputée de 15° 1′ 44″,7

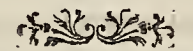
(compl. 74° 58′ 15″,3), & l'autre de 25° 29′ 19″, dont le compl. eſt 64° 30′ 41″, on trouve pour l'angle putatif *ZEE′*, au moment de la premiere obſervation 42° 24′ 18″,72, ainſi l'angle putatif *PEZ* de l'azymuth du Soleil, avec ſon cercle horaire en ce moment eſt de, 45° 47′ 41″,28; & on trouve pour l'angle horaire putatif *EPZ*, au même moment, 82° 27′ 55″,3, angle qui differe du vrai de 2′ 4″,7 par défaut, ce qui réduit en tems, ne revient qu'à 9″ 19‴, au lieu que dans la même combinaiſon d'erreurs des hauteurs, pour le cas du Mémoire de 1736, il réſulte 2 minutes, ou 120″ d'erreur ſur l'heure. On peut conclurre de ces derniers calculs, qu'une demi-heure d'intervalle entre les deux obſervations ſeroit encore ſuffiſante, pourvû qu'on prît les deux hauteurs des deux côtés du premier vertical. Je dis *ſuffiſante* pour la détermination de l'heure ſeulement, car on n'auroit qu'une détermination très-vicieuſe de la hauteur du pole, & de l'angle azymuthal par conſéquent, lorſque les deux obſervations pecheroient en ſens contraires.

Au reſte, on doit voir par ces exemples, quelle eſt la bonne maniere de trouver l'heure pendant le jour, lorſque le Soleil décline du côté du pole élevé, & qu'il eſt le ſeul aſtre viſible, principalement ſi l'horiſon eſt couvert par quelque brouillard, qui ne permette pas d'obſerver le lever ou le coucher de cet aſtre : car quand l'horiſon ſera net, on pourra encore prendre l'obſervation du lever ou du coucher du Soleil (ou plutôt celle du moment où ſon bord inférieur touche l'horiſon ſenſible), au lieu d'une obſervation de ſa hauteur lorſqu'il eſt auprès du premier vertical, parce que l'erreur propre à la premiere eſpece d'obſervation eſt moins grande, que celle à quoi eſt ſujette une obſervation de hauteur, & la conſéquence de celle-la ne ſera pas plus grande, que la conſéquence de celle-

ci, si ce n'est que la déclinaison du Soleil & la hauteur du pole fussent grandes.

Lorsque le Soleil décline du côté du pole abbaissé, & qu'il n'y a pas d'autre astre qui paroisse conjointement, c'est son lever ou son coucher qu'il faut, s'il est possible, observer par préférence, pour la détermination de l'heure; tout autre tems est moins favorable pour cette détermination par une observation de hauteur du Soleil, parce que cette observation seroit plus fautive, & que la conséquence de son erreur seroit plus grande. Et si l'horison est occupé par un brouillard, il faut observer le Soleil à la moindre hauteur qu'on pourra. Dans l'intervalle entre la premiere & la derniere apparition du Soleil, il faudra s'en rapporter à une montre réglée sur la meilleure observation précédente. Cependant, si l'on étoit dans une région où la déclinaison de la Boussole eût certaine constance, on pourroit, après l'avoir vérifiée par la meilleure & la plus récente observation, tenter encore vers midi d'observer l'angle azymuthal du Soleil, à l'aide de cet instrument, dans ce même cas de la déclinaison du Soleil du côté du pole abbaissé.

Quant au tems des crépuscules, il ne sera pas rare, si le ciel est serain, de découvrir alors quelques Planetes, & même plusieurs étoiles de la premiere grandeur, & ces astres pourront être dans une position avantageuse pour l'invention de l'heure. Mais de quelle méthode se servira-t-on dans ce cas, ainsi que pendant la nuit? C'est de quoi je vais traiter dans le Chapitre suivant.



CHAPITRE II.

Du choix entre les différentes méthodes, ou especes d'observations qui peuvent servir à trouver l'heure.

SI tous les avantages possibles se trouvoient réunis dans une seule méthode, le choix dont il s'agit ne seroit pas long à faire, & demanderoit peu de discussion : cette méthode mériteroit sans doute une préférence entiere & absolue. Mais les avantages paroissent dispersés ; telle méthode en a, ou paroît en avoir un, qui manque d'un autre : on ne peut donc, ce semble, établir de préférence générale & sans exception, & il y a lieu à quelque discussion, s'il faut péser & comparer les diverses qualités des différentes méthodes, & y assigner des rangs.

On peut regarder comme les deux principales especes d'observations, celle de prendre les hauteurs des astres, & celle d'en observer une couple à son passage par un même vertical, ce sont au moins les deux especes les plus familieres, & il est aisé de voir ce que les autres especes ont de commun avec celles-là. Or la premiere a cet avantage, par exemple, que l'on peut absolument l'employer en tout tems où les astres sont visibles, & qu'on peut profiter d'un instant rapide, où quelque astre perce au-travers d'un nuage ; mais aussi cette méthode requiert un instrument, & elle est difficile à exécuter pendant la nuit, surtout lorsqu'on ne découvre pas l'horison.

D'un autre côté, l'observation de deux astres à leur passage par un même vertical, a ce petit inconvénient, qu'on ne peut la faire en tout tems où les astres paroissent ; il faut,

il faut, à l'égard de chaque couple d'aftres, attendre certain moment, & on peut le manquer par quelque hafard : mais auffi en récompenfe, *cette opération fe peut faire facilement fur mer*, s'il en faut croire M. de Maupertuis, *pag.* 62 de l'Aftronomie Nautique, *& n'a befoin d'aucun inftrument ; car*, ajoûte-t-il, *on ne peut pas appeller un inftrument, un fil chargé d'un plomb, qui eft tout ce qu'il faut pour la faire.* Et dans fa Préface, *pag.* xxxij, M. de Maupertuis met cette obfervation de deux aftres dans un même vertical, après celle du lever ou du coucher d'un aftre, & avant toute autre, quant à la *fimplicité* & la *facilité*, infinuant au refte qu'on peut la faire avec *précifion* & *exactitude*, même fur mer. *Sur la mer*, dit-il, page fuivante, *un fil chargé d'un plomb fuffit.* A quoi il ajoûte, que *fi l'on vouloit fe contenter d'une moindre exactitude, on pourroit, à la vûe fimple, juger affez jufte, fi la ligne qui joint deux étoiles eft verticale, furtout fi l'on choififfoit deux étoiles affez éloignées l'une de l'autre.* L'autorité de M. de Maupertuis eft grande affûrément, mais elle fe trouve balancée, il faut l'avoüer, & un peu affoiblie peut-être, par celle d'un autre Sçavant, non moins verfé dans l'Aftronomie, lequel a blâmé la méthode dont il s'agit. Ce Sçavant eft M. Bouguer; je rapporterai fon jugement plus bas.

Il eft à propos, avant que d'entreprendre un examen régulier & pleinement décifif, des qualités des différentes efpeces d'obfervations, de faire quelques remarques.

1°. Quoique ces différentes efpeces puiffent être inégales en mérite abfolu, cette inégalité, quant à plufieurs, ne va pas, felon mon eftime, à un bien haut point, à un point tel que l'égalité de mérite relatif aux circonftances ne puiffe fe retrouver entre ces méthodes, & que celle même qui feroit moins bonne abfolument, ne puiffe prévaloir à raifon des circonftances, fur une meilleure.

2°. L'occaſion de mettre en pratique la préférence que quelque méthode pourroit mériter ſur les autres, en parité de circonſtances, ne ſe préſentera pas toûjours ; elle ne peut gueres ſe trouver, cette occaſion, que pendant la nuit, encore ne ſe préſentera-t-elle pas à chaque moment : car les circonſtances ne peuvent pas être toûjours favorables à l'uſage de chaque méthode, il n'y en aura qu'une pour l'ordinaire à employer en tel ou tel moment, ſçavoir celle qui conviendra le mieux aux circonſtances préſentes, & qui méritera à cet égard la préférence actuelle ſur une autre méthode, qui ſeroit meilleure en parité de circonſtances.

Le Navigateur doit donc être en état de faire uſage de plus d'une méthode ; il faudra qu'il emploie tantôt l'une, tantôt l'autre, ſuivant l'occurrence : il ſçaura, s'il eſt intelligent & attentif, tirer bon parti de la plûpart des eſpeces d'obſervations, recherchant toûjours la circonſtance la plus avantageuſe pour chaque méthode, il ſaiſira la premiere qu'il trouvera de cette qualité, & rarement il manquera d'en trouver quelqu'une, parce que la poſition des aſtres qui eſt la plus déſavantageuſe pour une méthode, eſt favorable pour une autre.

Par exemple, lorſque la hauteur du pole étant connue, on demande l'heure, s'il ſe préſente un aſtre auprès du premier vertical, il vaudra mieux pour la détermination requiſe, prendre la hauteur de cet aſtre, que d'attendre le paſſage d'une couple d'aſtres à un même vertical, ſi ce vertical fait un grand angle avec le méridien, ou ſi ces aſtres ſont peu éloignés l'un de l'autre. Et lorſqu'on demande conjointement la hauteur du pole, & l'heure, s'il ſe trouve deux aſtres dont les azymuths faſſent un angle droit ou approchant, il eſt à propos de prendre les hauteurs de ces deux aſtres, ce qui eſt la matiere du Pro-

bleme second, surtout si l'un est voisin du méridien, &c. Si au contraire, deux astres assez différens en hauteur, se trouvent en des azymuths très-obliques l'un à l'autre, il est à propos d'observer l'angle de ces azymuths, & la hauteur d'un des astres, ce qui est la matiere du Probleme XVII. surtout si les astres sont fort voisins du premier vertical, ou du méridien. Et dans le cas où, sans connoître suffisamment la hauteur du pole, on demanderoit seulement l'heure, si deux astres se trouvoient pareillement en des azymuths très-obliques l'un à l'autre, & au premier vertical, il ne faudroit pas négliger de prendre leurs hauteurs, & d'opérer suivant le Probleme second, &c.

3°. Si les circonstances sont parfaitement favorables au même moment, ou en des momens peu éloignés, à des procédés différens, par exemple, à quelqu'un de ceux où l'on se fonde sur l'observation de la hauteur d'un astre, & à quelqu'un de ceux où l'on se sert du passage de deux astres à un même vertical; au lieu de choisir entre ces différens procédés, & d'en laisser un, il paroît à propos de les employer conjointement : car on aura ce qui est désiré avec plus de sûreté, si leurs résultats sont conformes, ou avec moins d'erreur présomptive, en prenant un milieu entre ces résultats, s'ils sont différens.

On pourroit, ce semble, sur ces considérations, se dispenser de peser exactement les qualités des divers procédés : cependant comme l'intention de l'Académie paroît être que l'on porte la discussion jusqu'à assigner une maniere de trouver l'heure pendant la nuit, meilleure que toute autre, au cas qu'il y en ait une ; comme cette discussion est d'ailleurs curieuse ; enfin comme il faut du moins montrer sur quoi est fondée l'estime qui me fait dire, que l'inégalité de mérite entre divers procédés en

parité de circonstances, ne sçauroit être que médiocre; je vais tenter la recherche de l'erreur à laquelle on peut être exposé, en croyant saisir une couple d'astres à leur passage par un même vertical; car c'est cette erreur qu'il faut comparer avec celle à quoi est sujette l'observation de la hauteur d'un astre, pour connoître si l'une de ces observations prévaut sur l'autre, & je me bornerai à cet essai.

J'ai rapporté le témoignage de M. de Maupertuis, en faveur de l'observation de deux astres dans un même vertical, par le moyen d'un fil à-plomb : mais le jugement de M. Bouguer sur cette pratique est bien différent, on ne peut le dissimuler. M. Meynier l'avoit proposée dans une addition à son Mémoire sur la maniere d'observer en mer la déclinaison de la Boussole, *pag. 62*, & il l'avoit *limitée* à l'observation de l'étoile polaire, avec quelqu'une de celles qui l'environnent, à peu près comme il est enseigné dans le livre de la Connoissance des Tems. Ainsi M. Meynier avoit saisi une des circonstances favorables à cette espece d'observation, puisque le vertical de l'étoile polaire n'est jamais fort écarté du méridien, à moins que le pole ne soit bien haut. * Cependant M. B. a blâmé rudement ce procédé dans ses remarques sur le Mémoire cité. » M. Meynier supplée (dit-il *pag. 5*) une ma-» niere de trouver l'heure dans l'addition qu'il a mise après » coup à son Mémoire : mais il veut qu'on se serve pour » cela d'un fil à plomb, ne se ressouvenant pas d'en avoir

* Au reste, M. Meynier prétendoit découvrir l'heure par cette observation, sans calcul, à l'aide de je ne sçai quel planisphere qu'il a imaginé, & indépendamment de la différence des hauteurs du pole pour les différens lieux; & à cet égard il se trompoit lourdement. Mais M. B. qui dit n'avoir pas voulu rapporter toutes les *méprises* de M. Meynier, mais seulement *celles qui tirent le plus à conséquence, & qui se présentent les premieres*, a négligé de relever cette faute, & il ne traite la pratique dont il s'agit d'*imparfaite*, qu'à raison *de l'agitation continuelle du vaisseau*, laquelle doit causer des oscillations irrégulieres, au fil chargé d'un plomb.

» rejetté l'usage auparavant, à cause de l'agitation conti-» nuelle du vaisseau. Or, un moyen *si imparfait* de trou-» ver l'heure (ajoûte M. B.), fera qu'on se trompera *au* » *moins de* 15 *ou* 20 *minutes de tems*, ce qui produira en » suite des erreurs excessives dans l'azymuth ». Quinze ou 20′ de tems, répondent à 4 ou 5 degrés, erreur bien considérable sur l'angle horaire, si l'on y étoit effectivement exposé. D'ailleurs M. B. approuve, *page suivante*, & veut même qu'on détermine l'angle horaire d'un astre par l'observation de sa hauteur.

Voilà, je le répete, un jugement bien différent de celui de M. de Maupertuis. Et quel parti doit prendre dans un cas de cette espece, une personne dont les lumieres sont aussi bornées que les miennes, & si inférieures à celles des Sçavans qui se contrarient ?

Non nostrûm inter vos tantam componere pugnam.

Ces Messieurs sont plus capables que qui que ce soit, de discerner le point qui doit les concilier ; & j'aimerois beaucoup mieux attendre le jugement réfléchi porté par l'un ou par l'autre, que de le prévenir. Si j'ose parler sur ce sujet, ce n'est qu'avec répugnance, & à cause de la nécessité que paroît imposer l'énoncé du Programme de l'Académie. S'il faut donc que je m'en explique, je dirai, avec la permission de ces Messieurs, qu'on peut, ce semble, user de tempérament, & prendre un certain milieu entre les deux extrémités. L'observation de deux astres dans un même vertical, n'est peut-être pas susceptible d'autant d'*exactitude*, que l'insinue M. de Maupertuis ; d'un autre côté, je ne la crois pas sujette à autant d'*imperfection* que l'a avancé M. Bouguer. Je pense que cet Auteur, si judicieux ailleurs en tout, a été un peu trop loin à cet égard : c'est en passant, c'est dans un écrit fait

pour repouſſer un aggreſſeur téméraire, dans un écrit compoſé peut-être avec quelque précipitation, que M. Bouguer a blâmé la méthode dont il s'agit. On peut donc ſoupçonner qu'il s'y eſt un peu laiſſé emporter par l'ardeur polémique.

Venons au fait. Nous avons vû que l'erreur dE ſur l'heure, eſt $= \frac{r}{c}\ dH$, lorſqu'on la détermine par la hauteur d'un aſtre ſitué ſur le premier vertical, ce qui eſt la poſition la plus favorable pour cette détermination. Suppoſons pareillement que les deux aſtres E, E', qu'on prétend obſerver dans un même vertical, ſont ſitués le plus avantageuſement à l'égard du méridien, pour la même détermination, c'eſt-à-dire, que E l'un des deux aſtres, eſt ſur le méridien même véritable zPE, ou PzE, *Fig.* 37 & 38.

1°. C'eſt avec un fil chargé d'un plomb, que l'on propoſe de faire l'obſervation dont il s'agit, mais ce fil ne doit pas être extrêmement délié, il doit du moins être viſible, il faut qu'il ait par conſéquent certaine épaiſſeur (auſſi quelques-uns propoſent-ils de prendre une ficelle). Ainſi lorſqu'on regarde ce fil, les deux plans de rayons viſuels qui en raſent les côtés, font un certain angle qui eſt différent, ſelon que le fil eſt plus ou moins éloigné de l'œil. Soient l'arc qui eſt la meſure de ce petit angle, & ſon ſinus, nommés dM, dans le cas où l'on auroit placé ce fil à la diſtance de l'œil la plus convenable OH, *fig.* 52 pour y viſer ſelon une ligne horiſontale. Si l'on veut donc viſer à ce fil ſelon une ligne OB, oblique à l'horiſon, pour l'ajuſter ſur un objet élevé E', il me ſemble qu'il faut placer ce fil plus près de l'œil, comme en BC, le placer, dis-je, plus près de l'œil dans le ſens horiſontal, en raiſon du ſinus OC du complément de la hauteur de l'objet E',

au rayon OH, afin qu'il y ait même diſtance de l'œil à la partie du fil B, ajuſtée ſur l'objet, que dans le cas où on viſeroit horiſontalement au fil. Ainſi l'angle des deux plans de rayons viſuels qui raſent les deux côtés du fil, a pour meſure, & pour ſinus $\frac{r}{k'} dM$, k' étant le coſinus de la hauteur de l'objet E'. Soit donc cet angle répréſenté, *Fig.* 37 & 38, par l'angle ſphérique mzm', compris entre les deux quarts-de-cercle zm, zm', car il peut arriver qu'au moment où l'on croira le fil bien ajuſté ſur les deux aſtres, un d'entre eux réponde à un des côtés du fil, & l'autre aſtre à l'autre côté, en ſorte que la ligne $EE'Z$ qui joint les deux aſtres, & renferme le zénith putatif Z, ſoit oblique au fil.

Et je ne crois pas même qu'on puiſſe ſauver ou diminuer cet inconvénient, en affectant d'employer un fil très-délié, ou d'éloigner beaucoup le fil de l'œil; car on ſeroit alors expoſé, ce me ſemble, à une illuſion équivalente, qui ſeroit de juger les deux aſtres bien répondans au fil, en quelque moment où le fil ſeroit réellement entre deux, & à quelque diſtance des principaux rayons viſuels, dirigés à l'un & à l'autre. Une cauſe ſuffiſante pour cela, outre celles que je toucherai plus bas, c'eſt qu'on ne peut pas voir, comme chacun le ſçait, en même tems d'une vûe diſtincte, deux petits objets ſitués à des diſtances très-différentes de l'œil, tels que ſont le fil & quelque aſtre : car ſi l'on veut voir diſtinctement le fil, l'aſtre paroîtra double, & ſi c'eſt l'aſtre, qui, comme l'objet le plus éclatant, attache le plus la vûe, c'eſt le fil qui paroîtra double ou confus. Le plus ſûr eſt peut-être, que le fil employé pour l'obſervation, ait certaine groſſeur, ſçavoir telle qu'il puiſſe couvrir entierement l'aſtre le plus élevé.

2°. Il peut encore arriver qu'au moment où l'on croira

le fil bien à plomb, & les deux astres bien répondans au fil, ce fil soit incliné à la ligne verticale, en même sens que la ligne qui joint les deux astres est inclinée à ce fil même, ainsi qu'il est réprésenté, *Fig.* 37 & 38, où Σ est le vrai zénith, & Σm le vertical qui rencontre un des côtés du fil au point où il coupe l'horison, en sorte que l'angle $\Sigma m z$ est celui que fait le fil avec une ligne vraîment perpendiculaire. Je nomme le sinus de cet angle dI. En supposant donc PZ donné, & égal à peu près à $P\Sigma$, complément de la vraie hauteur du pole, le concours des accidens qu'on vient d'expliquer, peut faire que le zénith putatif Z se trouve éloigné du vrai zénith Σ, des deux petits arcs Σz, zZ; & PZ étant le méridien putatif, l'angle ΣPZ, qui répond au petit arc dE de l'équateur, est l'erreur sur l'heure.

Or, quand $\Sigma E'$, complément de la hauteur de l'astre supérieur, est considérable en comparaison de Σz, on peut regarder les deux arcs $\Sigma E'$, zE', comme égaux ou à peu près; à plus forte raison les deux arcs ΣE, ZE, sont aussi égaux entre eux. Cela posé, le triangle sphérique $mE\Sigma$, donne cette analogie: *Sin.* ΣE (k) : *sin.* Σm (r) : : *sin.* ΣmE (dI) : *sin.* ΣEm, ou $\Sigma Ez = \frac{r}{k}\, dI$. Le triangle sphérique zEE' donne cette autre analogie : *Sin.* EE' (δ) : *sin.* zE' (k') : : *sin.* EzE' $\left(\frac{r}{k'}\, dM\right)$: *sin.* $zEE' = \frac{r}{\delta}\, dM$. Or l'angle ΣEZ étant la somme des deux petits angles ΣEz, zEZ, son sinus est à peu près égal à la somme des sinus de ces angles partiels; & le triangle sphérique PEZ donne enfin cette analogie : *Sin.* PZ (c) : *sin.* ZE (k) : : *sin.* ΣEZ $\left(\frac{r}{k}\, dI + \frac{r}{\delta}\, dM\right)$: *sin.* EPZ ou ΣPZ $= dE = \frac{r}{c}\left(dI + \frac{k}{\delta}\, dM\right)$.

Telle

Telle eſt l'erreur qui peut réſulter ſur l'heure, des deux cauſes que j'ai marquées. Et cette formule, où il reſte à déterminer dI & dM, donne déja la confirmation de ce que j'ai dit ci-deſſus, ſçavoir que l'aſtre ſupérieur doit être fort haut, & que l'aſtre inférieur doit être fort bas, à moins que celui-là ne fût préciſément au zénith, ce qui n'eſt pas le cas le plus ordinaire : car tant que l'aſtre ſupérieur ſera ailleurs qu'au zénith, le ſinus δ de la diſtance des deux aſtres, ſera moindre que le coſinus k de la hauteur de l'aſtre inférieur; ainſi la fraction $\frac{k}{\delta}$ ſera d'autant plus petite, que ces quantités ſeront ſinus de plus grands arcs. On voit de plus, qu'il eſt à peu près indifférent que les deux aſtres ſoient du côté du zénith où eſt le pole élevé, ou qu'ils ſoient du côté oppoſé. Il paroît encore (& cela ſuit auſſi du principe général poſé ci-devant) que lorſqu'on veut obſerver l'étoile polaire dans un même vertical, avec quelqu'une de celles qui l'environnent dans les conſtellations de la grande Ourſe, du Dragon, de Caſſiopée, &c. il vaudroit mieux, ceſſant la difficulté que j'indiquerai bientôt, obſerver l'étoile polaire avec quelqu'une de ces étoiles, lorſque celle-ci eſt ſupérieure à la polaire, que lorſqu'elle eſt au-deſſous, car la fraction $\frac{k}{\delta}$ eſt plus petite dans le premier cas que dans le ſecond.

Il reſte, dis-je, à déterminer, ou plutôt à eſtimer les quantités dI & dM : mais il reſte auſſi deux cauſes d'erreur à conſidérer, & il faut peut-être joindre l'effet d'une de ces cauſes à dI. Cette cauſe eſt celle qui a ſinguliérement frappé M. Bouguer, je veux dire les oſcillations du fil, provenantes de l'*agitation continuelle du vaiſſeau*, oſcillations, il faut l'avoüer, incommodes & très-nuiſibles : car non-ſeulement elles peuvent faire que le fil ſoit

incliné en quelque inſtant où on le croira dans la poſition verticale, ce qui eſt l'erreur dont j'ai déja fait état, erreur qui naît de l'irrégularité à laquelle M. B. prétend que les oſcillations d'un pendule ſont ſujettes ſur mer, mais encore elles rendent difficile l'application du fil aux deux aſtres. A l'égard de l'aſtre ſupérieur, le mieux qu'on puiſſe faire pour y ajuſter le fil, c'eſt de viſer à cet aſtre par une partie du fil qui ſoit fort voiſine de ſon point de ſuſpenſion, encore pourra-t-on manquer de tems en tems cette jonction, à cauſe des ſecouſſes du vaiſſeau, pendant qu'on attendra le moment requis du paſſage de l'aſtre inférieur. Et à l'égard de celui-ci, les oſcillations du fil feront néceſſairement qu'il paroîtra tantôt à ſa droite, tantôt à ſa gauche, en ſorte qu'il faudra prendre pour le moment du paſſage de l'aſtre par le fil, celui vers lequel les excurſions du fil de part & d'autre de l'aſtre ſeront jugées égales. Or c'eſt en quoi il eſt facile de ſe méprendre, & ce qui ſuppoſe d'ailleurs que le fil répond toûjours à l'aſtre ſupérieur.

L'autre cauſe d'erreur a lieu dans le cas où la diſtance des deux aſtres qu'on prétend obſerver dans un même vertical, excede certain terme qui eſt d'environ 15 degrés: & ce cas eſt cependant celui que l'on doit rechercher, ainſi que je l'ai démontré plus haut, ſans quoi l'erreur * $\frac{k}{\delta} dM$ pourroit être conſidérable, quoique la quantité dM le fût peu. Cette cauſe conſiſte en ce que l'on ne peut voir en même tems d'une vûe diſtincte, deux objets qui ſont à l'œil un angle au-deſſus d'une certaine quantité; * mais ſi l'on a jetté d'abord un regard juſte ſur un de ces

* C'eſt un fait aſſez connu, ſur-tout par les Marins. Cela les empêche de prendre la hauteur des étoiles avec l'Arbaleſtrille ou le Quartier-Anglois, lorſqu'elles ſont fort élevées, & ils en regardent l'obſervation comme incertaine, quand l'aſtre eſt élevé d'environ 20 degrés.

objets, il faut mouvoir l'œil au moins, pour voir enſuite l'autre objet de la même maniere. Or, il peut arriver pendant ce mouvement & changement de direction de l'œil, que le fil par lequel on doit mirer ſoit un peu déplacé. Bien plus, ſi les deux aſtres ſont fort diſtans (ce qui eſt d'ailleurs le plus avantageux), il faudra mouvoir la tête même de haut en bas, & de bas en haut, pour porter la vûe ſucceſſivement & alternativement ſur chacun des aſtres, parce que le jeu de l'œil dans ſon orbite, eſt aſſez borné : or, ſans parler de la gêne qu'il y a à renverſer la tête, il peut arriver que pendant ſa converſion dans le ſens vertical, elle ſe jette un peu à droite ou à gauche de ſa ſituation précédente, & que l'œil ſe trouve par conſéquent dans un autre vertical avec le fil, quand même ce fil ſeroit fixe.

Cette derniere cauſe d'erreur me paroît aſſez conſidérable, & je penſe qu'il eſt à propos de chercher le moyen de s'y ſouſtraire, en faiſant l'obſervation dont il s'agit. Je propoſerai une idée ſur cela dans le Chapitre ſuivant : je ſouhaite qu'elle ſoit pratiquable, & qu'elle ne ramene point d'inconvénient, au lieu de celui que je veux ſupprimer.

Pour revenir aux autres cauſes d'erreur, je ne crois pas qu'on puiſſe s'en garantir entierement ſur mer, mais je ne ſuis pas en état de faire une eſtime préciſe de leur effet : je la laiſſe à ceux qui connoiſſent la mer par expérience. Je dirai ſeulement que ſi l'on parvient à éviter la derniere erreur que j'ai marquée, l'obſervation du paſſage de deux aſtres par un même vertical, prévaudra, ce me ſemble, ſur une obſervation de hauteur. Au reſte, je ne vois pas que la premiere eſpece d'obſervation puiſſe excéder extrêmement la ſeconde en mérite ; car pourquoi l'obſervation de la hauteur de quelque aſtre eſt-elle fautive ſur mer,

furtout la nuit, & lorfqu'on ne voit pas l'horifon ? C'eft, 1°, parce qu'il faut vifer à l'aftre par des pinnules qui doivent avoir quelque grandeur, & parce que l'inftrument peut être fautif. C'eft, 2°, parce que cet inftrument n'eft pas juftement à plomb, ou bien parce que le pendule qu'on y applique pour montrer la ligne verticale, fouffre des ofcillations : & ne retrouvons-nous pas de pareilles fources d'erreur dans l'obfervation de deux aftres à leur paffage par un même vertical ? Enfin, fi la hauteur d'un aftre eft difficile à prendre lorfqu'elle change fenfiblement, pareille difficulté ne fe rencontre-t-elle pas dans l'obfervation dont il s'agit, lorfqu'on veut faifir la circonftance la plus favorable à la détermination de l'heure, puifque l'angle des azymuths des deux aftres change promptement dans cette circonftance.

Il me refte une remarque fur la détermination de l'heure, qui trouve ici fa place ; c'eft que l'erreur dE qu'on peut commettre fur l'heure, eft d'autant plus grande que le pole eft plus élevé. En effet, nous avons vû qu'en la déterminant par la hauteur d'un aftre fitué fur le premier vertical, l'erreur $dE = \frac{r}{c} dH$; * & nous venons de voir $dE = \frac{r}{c} \left(dI + \frac{k}{\delta} dM \right)$, lorfqu'on détermine l'heure par l'obfervation de deux aftres, dans un même vertical putatif, voifin du méridien ; il eft aifé d'ailleurs de reconnoître que cette fraction $\frac{r}{c}$ doit entrer dans toute autre expreffion de l'erreur dont il s'agit. Mais quant à la détermination de la hauteur du pole, l'erreur qui peut s'y gliffer eft la même, quelle que foit cette hauteur. Auffi

* Je fuppofe dH conftante, ou plûtôt, comme il eft vraifemblable que cette erreur eft plus grande à mefure que le pole eft moins élevé, parce que la hauteur des aftres change plus promptement, & eft plus difficile à obferver ; je fuppofe que dH ne croît pas en raifon du cofinus de la hauteur du pole.

eſt-il également important au Navigateur, de connoître avec la même juſteſſe ſa latitude telle qu'elle ſoit, grande ou petite : mais il n'en eſt pas de même pour l'heure ; plus le pole eſt élevé, moins il eſt important de la bien connoître ſur mer. Car ſi on la cherche pour découvrir la différence de la longitude du lieu où l'on eſt, & de celle du lieu d'où l'on eſt parti, il importe moins de ſe tromper dans l'eſtime de cette différence, à meſure que le pole eſt plus élevé, parce que le moyen parallele entre les deux lieux eſt d'autant plus petit. Et ſi c'eſt pour ſervir à trouver la variation de la Bouſſole qu'on veut ſçavoir l'heure, il importe moins auſſi de la bien connoître à cet égard, à meſure que le pole eſt plus haut. En un mot, en ſuppoſant que l'erreur dans la poſition du zénith putatif à l'égard du vrai méridien eſt conſtante, c'eſt-à-dire, que la diſtance du zénith putatif à ce méridien eſt conſtante, il réſulte de-là, à la vérité, que l'erreur ſur l'heure eſt inégale, ſelon que le pole eſt plus ou moins élevé : mais l'erreur ſur l'arc du parallele où eſt l'Obſervateur, eſt à peu près la même en grandeur abſolue, c'eſt-à-dire du même nombre de toiſes, en ſuppoſant la terre ſphérique, & c'eſt à cette erreur que le Navigateur eſt, ce me ſemble, ſeulement ou principalement intéreſſé.



CHAPITRE III.

Des moyens de faire les obſervations qui ſervent à déterminer l'heure, &c.

§. I. *Des moyens de prendre la hauteur des Aſtres.*

LORSQUE l'horiſon eſt découvert, le Quartier Anglois eſt le meilleur inſtrument entre les anciens pour prendre la hauteur du Soleil : ce même inſtrument eſt encore propre pour obſerver la hauteur des aſtres qui ne jettent point d'ombre, s'ils ſont peu élevés. Le nouvel inſtrument propoſé par M. de Fouchy, dans les Mémoires de 1740, eſt très-propre dans le même cas de la viſibilité de l'horiſon, pour montrer la hauteur quelconque de tout aſtre. Mais lorſque l'horiſon n'eſt pas viſible, il faut employer un inſtrument qui prenne de lui-même ſa ſituation, ou qui ſoit garni d'un pendule, pour marquer la ligne verticale.

Les inſtrumens de la premiere eſpece ſont divers. On peut voir la deſcription des principaux & plus commodes, dans le Mémoire de M. Bouguer, touchant la méthode d'obſerver exactement ſur mer la hauteur des aſtres ; Piece qui a remporté le Prix de 1729.



§. II. *Des moyens d'obſerver deux aſtres à leur paſſage par un même vertical.*

LE moyen le plus ſimple eſt de ſe ſervir d'un fil à plomb. Ce moyen convient également à la circonſtance où l'on ne voit pas l'horiſon, & à celle où il ſeroit viſible : mais ſi l'on ſe trouve quelquefois dans celle-ci, on peut employer un moyen meilleur, en ce que l'on évitera l'incommodité des oſcillations du fil à plomb. Il faut appliquer à une piece ajoutée, & garnie de deux pinnules, un fil, de maniere que l'angle de ce fil, avec la ligne qui paſſe par les pinnules, differe d'un droit, d'une quantité égale à l'inclinaiſon de l'horiſon viſuel ; un Obſervateur y viſera par les pinnules, en tenant le plan de l'inſtrument dans une poſition à peu près perpendiculaire au vertical où les deux aſtres doivent ſe rencontrer ; ainſi le fil ſera dans ce même vertical, ou en ſera extrêmement voiſin, quand même il ſeroit un peu incliné à l'horiſon, conjointement avec le plan de l'inſtrument ; un ſecond Obſervateur viſera donc aux deux aſtres par ce fil.

J'ai déja remarqué qu'on ne peut viſer directement du même coup d'œil à deux aſtres, lorſqu'ils ſont éloignés. J'eſtime qu'il eſt à propos dans ce cas, de faire en ſorte qu'on voie l'aſtre le plus élevé par réflexion, car le rayon réfléchi venant de cet aſtre, pourra être rendu fort voiſin du rayon direct émané de l'autre. Soit EO, *Fig.* 53 ce rayon direct émané de l'aſtre inférieur ; $E'bO$ le rayon direct qui iroit de l'aſtre ſupérieur à l'œil de l'Obſervateur ; $E'M$ un autre rayon du même aſtre : ce rayon peut être renvoyé à l'œil de l'Obſervateur ſelon MO, de maniere que l'angle EOM ſoit fort petit : une petite piece M de miroir

plan, appliqué au fil, suffit pour cela. On donnera à cette piece une telle inclinaison à l'égard du fil, qu'elle en ait 30 ou 40 degrés à l'égard de l'horison ; & en tenant le miroir un peu au-dessus ou un peu au-dessous du rayon visuel de l'astre inférieur, on y pourra voir un astre dont la hauteur soit depuis 50 environ jusqu'à 80 degrés.

Mais quoique les deux astres puissent être vûs ainsi sur une même ligne verticale, cela n'est pas suffisant pour en conclurre qu'ils sont réellement au même vertical, il faut encore que l'œil soit avec le fil, dans un plan perpendiculaire à la piece de miroir, & cela suppose deux choses, sçavoir 1°, qu'il y ait, par exemple, un second fil *b m*, combiné avec celui (*BM*) auquel est appliquée la piece de miroir, & qui soit tendu par le même poids, d'où il résultera que ces fils seront toûjours dans un même plan, & que ce plan affectera la situation verticale, soit que les fils soient paralleles ou non. 2°. Il faut que la piece de miroir soit rendue exactement perpendiculaire au plan des deux fils. Cela supposé, si l'œil de l'Observateur est placé maniere que l'un des fils paroisse couvrir l'autre, & que les deux astres y répondent, ils seront alors dans un même vertical.

Ce moyen, comme on le voit, n'est rien moins que simple. C'est un vrai instrument que l'assemblage du miroir & des deux fils, & il faudra, je l'avoue, beaucoup d'attention & de dextérité de la part du constructeur, pour rendre le miroir exactement perpendiculaire au plan des fils. Je ne m'arrêterai point sur la maniere d'y réussir, je dirai seulement que le miroir doit être placé à demeure, & que le fil qui en sera armé, doit être incapable de se tordre. Le plus sûr seroit d'employer une lame au lieu d'un fil. Au reste, pour faire servir le miroir à l'observation d'un astre plus ou moins élevé, il s'agira seulement

d'incliner

d'incliner plus ou moins à l'horiſon le fil, ou plutôt la lame *BM* qui le portera. C'eſt ce qu'on exécutera aiſément dans le beſoin, en changeant l'application de cette lame au poids, ou autre corps qui tiendra le fil *bm* tendu, c'eſt-à-dire, en éloignant plus ou moins les extrémités inférieures de la lame & du fil, ſelon une droite tracée ſur ce poids, ſans changer la ſituation des parties ſupérieures.

Un autre moyen plus avantageux, mais de plus grand appareil, ſeroit de ſe ſervir de l'inſtrument propoſé en 1740, par M. de Fouchy, pour obſerver la diſtance de deux aſtres, & pour quelques autres uſages. Or pour mettre cet inſtrument à l'uſage que j'entends, on y appliquera un fil garni d'un plomb : un Obſervateur ſoûtenant l'inſtrument, ſuivra les deux aſtres, & un autre Obſervateur remarquera le moment où le fil à plomb étant en repos, ſera dans le plan de l'inſtrument, ou bien ſera en oſcillant des excurſions à peu près égales de part & d'autre du plan de l'inſtrument : c'eſt en ce moment que les deux aſtres ſe trouveront au même vertical.

§. III. *Sur l'obſervation de deux aſtres dans un même almicantarath.*

CETTE obſervation eſt fort ſimple, fort facile, & fort juſte ſur mer, lorſque l'horiſon ſenſible eſt l'almicantarath commun des deux aſtres, & qu'il eſt découvert : mais cette obſervation ceſſe d'être ſimple, & devient difficile, lorſque les aſtres ſont au-deſſus de l'horiſon, il faut alors au Marin un inſtrument.

Le meilleur de tous pour ce cas, eſt encore, ce me ſemble, celui de M. de Fouchy, en y ajoûtant une piece particuliere, ſçavoir une lame platte tournante ſur un axe perpendiculaire au plan de l'inſtrument, lame

qui soit par conséquent toûjours perpendiculaire à ce plan: cette lame portera un fil à plomb. Comme l'angle que font les deux astres à l'Observateur, est connu par la distance des deux astres, qui est donnée par les tables, ou par l'instrument même dont il s'agit, on disposera la lame de maniere qu'elle divise cet angle par le milieu: un Observateur soûtenant l'instrument, suivra les deux astres, en les joignant dans sa lunette; ainsi le plan de l'instrument sera dans celui du grand cercle, qui passe par les deux astres (ou si ces deux plans sont inclinés l'un à l'autre, à cause des réfractions, ce sera dans un sens indifférent à l'observation désirée), & lorsque ces astres seront parvenus au même almicantarath, la lame perpendiculaire au plan de l'instrument, sera dans le plan du vertical équidistant des deux astres; un second Observateur remarquera ce moment, qui est celui où le fil à plomb étant en repos, se trouvera dans le plan de la lame, ou bien fera en oscillant, des excursions à peu près égales de part & d'autre de ce plan.

§. IV. *Sur l'observation de l'angle des azymuths de deux astres.*

Il est à souhaiter que cette observation, qui seroit utile sur mer, n'y soit pas impossible; mais elle paroît difficile, je l'avoue, lorsque la mer est agitée, & que l'horison n'est pas visible. Je n'ai rien de précis à proposer touchant la maniere de l'exécuter avec certaine justesse; & c'est ici que je sens le plus mon insuffisance & ma stérilité pour l'invention: mais il y a des génies capables d'y suppléer, & peut-être quelqu'un voudra-t-il bien se prêter à cette recherche, ou décider si l'on n'en doit rien espérer.

Pourroit-on employer un ſecteur de cercle ſuſpendu de façon qu'il affectât la poſition horiſontale par ſon propre poids? Au-deſſus de cette piece ſeroient deux fils ſitués dans un même plan, & placés, ſçavoir l'un au centre du cercle, perpendiculairement à ſon plan, & l'autre à ſa circonférence, & au commencement de la diviſion du limbe. Un Obſervateur dirigeroit le plan des deux fils à l'aſtre ſupérieur, en y viſant par ces fils; un autre Obſervateur, tenant un fil à plomb auprès du limbe de l'inſtrument, viſeroit à l'aſtre inférieur par ce fil, & par celui du centre du cercle; enfin ce même obſervateur, ou pour le mieux, un troiſieme, remarqueroit le point moyen du limbe, auquel répondroit le fil à plomb, &c. Mais cette pratique ſeroit ſujette à un inconvénient non-leger, en ce que le principal inſtrument ſouffriroit des agitations, & le fil à plomb tenu par le deuxieme Obſervateur en ſouffriroit d'autres, ce qui ne permettroit peut-être pas de bien juger à quelle diviſion du limbe le fil à plomb devroit être réputé répondre. *

Si cette obſervation n'eſt pas pratiquable ſur mer,

* Si l'on réuſſit quelquefois à faire cette obſervation, il me reſte à avertir que ſi l'on veut opérer enſuite graphiquement au Probl. XVII, il y a une précaution à prendre, lorſque l'angle des azymuths des deux aſtres eſt fort aigu. L'opération graphique a deux parties: la premiere conſiſte à former en particulier le triangle $EE'Z$ par les élémens donnés, qui ſont la diſtance des deux aſtres, & la hauteur de l'un d'eux, outre l'angle EZE' dont il s'agit; & par-là on détermine la hauteur du ſecond aſtre, auſſi-bien que l'angle $EE'Z$; l'autre partie de l'opération conſiſte à décrire ce même triangle $EE'Z$ ſur le planiſphere, & c'eſt ce qu'on peut exécuter abſolument par deux voies différentes, ainſi qu'il a été enſeigné ci-deſſus; mais l'une de ces voies eſt déſavantageuſe dans le cas marqué. Cette voie eſt de former le triangle $EE'Z$ par le moyen de ſes trois côtés. Or, comme l'angle EZE' eſt ſuppoſé fort aigu, en ſe trompant tant ſoit peu dans cette deuxieme partie de l'opération ſur la grandeur de l'un ou de l'autre côté EZ, $E'Z$, on placeroit aſſez mal le point Z, & cela nuiroit ou à la détermination de l'heure, ou à celle de la hauteur du pole. Il faut donc, pour bien conſtruire le triangle en queſtion ſur le planiſphere, employer ſeulement l'autre procédé, c'eſt-à-dire, former ce triangle ſur la baſe EE', par le moyen du côté EZ, & de l'angle $EE'Z$ adjacent à cette baſe, lequel a été déterminé par la premiere partie de l'opération. Quand on ſe tromperoit un peu ſur cet angle, il n'en réſulteroit qu'une petite erreur dans la poſition du point Z.

lorsque l'horison est couvert, on pourroit tenter d'y en substituer une autre, dont je n'ai pas encore parlé, sçavoir celle de l'inclinaison du grand cercle où sont situés les deux astres à l'égard de l'horison : car cet élément étant donné, avec la hauteur de l'un des astres, on en déduiroit aisément l'heure & la hauteur du pole. Au triangle sphérique ZEx, *fig.* 54. où Zx est le vertical qui rencontre le grand cercle $EE'x$ des deux astres à son interfection en x avec l'horison, on auroit l'angle ExZ, complément de l'inclinaison de ce cercle $EE'x$ à l'horison, le côté EZ opposé à cet angle, côté qui est complément de la hauteur observée, & le côté Zx qui est un quart-de-cercle : ainsi on auroit l'angle ZEE', auquel ce côté Zx est opposé par cette simple analogie ; *sin.* EZ : *sin. tot.* :: *sin.* ExZ : *sin.* ZEE' ; & on poursuivroit, comme il a été prescrit ci-dessus (Partie deuxieme) pour le second Probleme.





AVERTISSEMENT
ET
ADDITIONS

Pour une Piece intitulée : Eſſai d'Horolepſe Nautique , *& marquée par ce vers :*

Nautam ne pigeat cœli convexa tueri ;

Dont la premiere Partie a été préſentée en 1744 , *& cottée* N° V, *&c.*



'EST depuis le mois d'Août 1744, que j'ai composé la ſuite de cette Piece, & il m'en reſtoit une petite portion à faire à Pâques 1745 : mais j'ai achevé cet Eſſai dans la même diſpoſition où je l'ai continué, c'eſt-à-dire, ſans aucune vûe ſur le Prix, ne ſçachant pas même qu'il avoit été remis. Ç'a été ſeulement pour vuider ma tête d'un reſte d'idées, en les conſignant par écrit, que j'ai travaillé ; & j'ai ſimplement ſuivi mon premier plan, tel que je l'avois formé au haſard, faute d'avoir ſçû démêler le vrai but de l'Académie. Enfin, j'avois envoyé à Paris, & fait préſenter la continuation de ma Piece, lorſque j'ai reçu le nouveau Programme pour

1747, par lequel j'ai appris que *les moyens méchaniques les plus sûrs pour faire en mer les observations dont on peut conclurre l'heure, faisoient le principal objet de la question proposée en* 1743, ce qui est fort différent de la supposition sur laquelle j'ai travaillé : car quoique j'aie raisonné sur la maniere de faire les observations d'où on peut déduire l'heure, je n'ai pas considéré ce point comme mon capital, mais comme un accessoire qu'il me suffisoit d'effleurer. Je dois même déclarer qu'un tel sujet demandant, pour être traité pleinement & avec succès, un talent & des connoissances dont je me sens mal pourvû, je me serois entierement abstenu de toucher à la question de l'invention de l'heure en mer, si j'eusse bien connu d'abord l'intention de l'Académie. Que si je reviens aujourd'hui sur cette question, c'est plutôt pour avouer ma foiblesse, & pour rendre raison de l'état où est la partie de ma Piece, présentée depuis la remise du prix, que pour essayer de satisfaire au desir du nouveau Programme.

J'AI proposé au dernier Chapitre de ma troisieme Partie, d'employer un pendule pour connoître la situation de l'instrument quelconque, par lequel on tentera de faire une observation pour la détermination de l'heure, lorsque l'horison ne sera pas visible, & je n'ai rien dit de l'usage des niveaux à liqueur : mais j'ai vû depuis, dans les Transactions Philosophiques, de la traduction de M. de Bremont, que les anglois ont eû recours depuis quelques années, à ce moyen proposé autrefois en France, dans des assemblées qui se tenoient chez M.......... & dont la proposition a été renouvellée & fort recommandée par M. de Radouay, dans ses remarques sur la Navigation, imprimées à Paris en 1727. * Ce moyen

* Cet Ouvrage est muni d'approbations, & d'un Privilege datés de l'an. 1724.

mérite effectivement attention, & je vais en parler sommairement.

Je remarque par préalable, que la forme du corps de l'instrument par lequel on doit prendre la hauteur d'un astre lorsque l'horison est couvert, ou faire quelqu'autre observation utile à l'invention de l'heure, n'est pas, à mon sens, le principal chef de la recherche proposée par l'Académie. On a atteint, ou peu s'en faut, la perfection à cet égard : on sçait appliquer une lunette au lieu de pinnules aux instrumens de mer, on sçait les diviser avec assez d'exactitude, & autant qu'il est nécessaire, soit par la méthode de *Nonius*, soit par d'autres, &c. La difficulté est, ce me semble, de trouver le meilleur moyen de déterminer la situation de l'instrument dirigé à l'astre par l'Observateur. Or, je crois qu'il n'y a qu'un pendule ou un niveau à liqueur, qui puisse être employé à cette fin : s'il faut donc opter, ce n'est qu'entre ces deux moyens.

Quant au pendule, il est sujet, comme je l'ai déja dit dans ma Piece, à des oscillations incommodes, & d'autant plus incommodes qu'elles sont plus promptes, & ont plus d'étendue. Mais 1°, on peut les rallentir tant qu'on veut, ces oscillations, sans donner pour cela une longueur excessive au pendule; car au lieu de le prendre simple, on peut le composer de deux poids *P*, *Q*, *fig.* 55. appliqués à une verge, soûtenue ou par un pivot qui soit dans la ligne des poids, ou par un double fil; en sorte qu'elle tende à la situation verticale, ou à la situation horisontale, ainsi qu'il est représenté dans la *Fig.* 55. 2°. On peut encore diminuer l'étendue des oscillations du pendule lorsqu'elle sera trop grande, en faisant frotter à discrétion quelqu'une de ses parties sur une houppe ou pinceau, planté dans le corps de l'instrument, & que l'observateur poussera de

fon doigt à la rencontre du pendule, mais qu'un petit reffort en éloignera, dès que le doigt l'aura quitté, afin qu'il refte un peu de jeu au pendule. Je crois qu'avec cette double précaution, il ne fera pas extrêmement difficile de reconnoître les limites de deux de fes excurfions confécutives de part & d'autre du vrai point de repos, &c. Au refte, je penfe que c'eft l'expérience qui doit décider fur la durée qu'il convient de procurer aux ofcillations dont il s'agit; il n'eft pas néceffaire d'obferver qu'il y a un inconvénient particulier à la rendre grande, parce que l'ofcillation eft fujette à devenir par-là d'autant moins réguliere, en forte que le milieu de l'arc décrit dans cette ofcillation, peut être différent du vrai point de repos.

Quant aux niveaux à liqueur, ceux de forme commune font fujets à des ofcillations, auffi-bien que les pendules, & par la même caufe. De-là naît le rapport connu des mouvemens alternatifs dont une liqueur contenue dans un tuyau eft fufceptible, à ceux d'un pendule. M. Newton a traité le premier ce fujet, & M. Dan. Bernoulli a amplifié cette théorie en différentes fections de fon Hydrodynamique. On fçait que les ofcillations de la liqueur font plus ou moins lentes, felon que le tuyau où elle eft enfermée a plus ou moins de longueur, &c. L'application d'un niveau à liqueur commun à un inftrument, eft donc fujette à inconvénient, auffi-bien que celle d'un pendule; cependant le niveau à liqueur a en ce point un petit avantage fur le pendule, n'étant pas expofé à l'impreffion du vent, & n'ayant pas befoin d'en être garanti comme celui-ci. J'ai déja remarqué que M. de Radouay a confeillé l'ufage de ce moyen. Il rapporte dans fon livre, que quelques Pilotes en avoient fait épreuve, & le goûtoient: mais je ne fçais point que cela ait eû de fuite en France. M. Jean Elton, Anglois, a eu plus de fuccès;

il

il paroît avoir introduit l'usage du niveau à liqueur, pour les observations de hauteur, parmi ceux de sa nation. Les Transactions Philosophiques de 1732, n° 423, contiennent la description de son instrument, qui a beaucoup de rapport avec le Quartier Anglois ordinaire. Deux niveaux y sont combinés, pour lui procurer une juste situation, soit pour l'observation en avant, soit pour l'observation en arriere ; & c'est un avantage dans l'usage de cet instrument. Il faut, après lui avoir donné sa situation, mouvoir l'alidade pour rencontrer l'astre, ce qui est une incommodité, parce qu'il est bien difficile de ne pas ébranler en même tems & déplacer l'instrument (on évite cette incommodité en se servant d'un pendule). Les niveaux de M. Elton sont de ceux où l'on ne laisse qu'un petit vuide ou bulle, & leur tuyau est représenté droit, & assez court dans la Figure : mais leurs proportions ne sont point marquées dans le discours, non plus que la grosseur de la bulle ; c'est pourquoi il n'est pas possible de juger de la quantité des balancemens auxquels la liqueur de ces niveaux doit être sujette. Quoi qu'il en soit, deux Navigateurs, qui sont le Capitaine Hoxton & M. Walton, témoignent avoir fait usage de l'instrument de M. Elton, & en avoir été assez satisfaits, les observations qu'il a fournies étant peu différentes les unes d'avec les autres, & de celles qu'on avoit par le Quartier ordinaire ou autrement. Les épreuves du Capitaine Hoxton sont de l'année 1730, dans un voyage à Maryland. On trouve dans les Transactions Philos. de 1733, au n° 429, un journal d'observations faites dans un voyage à la Baye d'Hudson, en 1731, par le Capitaine Middleton, par lequel il paroît que ce Navigateur a employé l'instrument de M. Elton avec utilité, lorsque l'horison étoit couvert. Enfin, les Transact. Philos. de 1736 contiennent au n° 442, un journal en-

core plus ample d'observations faites par le même Capitaine Middleton, dans un pareil voyage en 1735, où il s'est encore servi de l'instrument de M. Elton, tantôt seul, & tantôt en concurrence avec d'autres instrumens de nouvelle construction. Un de ces instrumens est de l'invention de M. Hadley : mais on a omis de marquer si cet instrument est celui qui suppose l'horison visible, & qui fait voir l'astre par réflexion, ou si c'est celui dont je vais parler dans un moment. Les deux autres instrumens sont attribués à M. Caleb Smith, & il paroît par l'explication qui termine le journal, qu'un de ces instrumens est propre à prendre hauteur, lorsque l'horison est embrumé, & qu'il demande une mer tranquille : mais je n'ai encore trouvé la description ni de l'un ni de l'autre de ces instrumens.

Voici une Table des observations de latitude, prises par l'instrument de M. Elton, concurremment avec d'autres.

Jours.	Instr. de M. Elton.		Instr. de M. Hadley.		1. Instr. de Smith.		2. Instr. de Smith.		Estime.	
Juin 19	61°	54'	61°	49'	61°	44	....		61	47
21	61	12	61	5	61	4	....		61	0
22	61	12	61	0	....		61	12	61	11
24	61	38	....		61	36	....		61	37
29	61	30	....		61	30	61	20	61	30
Juill. 5	61	44	....		61	33	61	43	61	39
25	61	14	....		....		61	17	61	15
27	59	34	....		59	36	....		59	39
Sept. 10	61	46	61	45	61	43	....		61	58

M. Jean Hadley, Vice-Président de la Société Royale, a enfin proposé pour l'observation de la latitude, un quart-de-cercle auquel est appliqué un niveau à liqueur de forme singuliere, dont la description se trouve dans les Transf. Philos. de 1733, n° 430. Ce qu'il y a de particulier à ce niveau, c'est 1° que son tuyau est courbé en

arc-de-cercle, en forte que la colomne de liqueur qui occupe une partie de ce tuyau, ayant la même courbure, le niveau de ses deux extrémités peut répondre à différens endroits du tuyau: par-là on obtient le même avantage que par l'usage du pendule, je veux dire que l'alidade de l'instrument ayant été placée sur une de ses divisions, y doit demeurer fixe pendant l'opération, & l'Observateur cherche l'astre, & y dirige l'alidade, en gouvernant tout l'instrument; cependant la liqueur joue, & montre enfin la situation de l'instrument, c'est-à-dire, la quantité qu'il faut ajoûter à celle que marque l'alidade, ou en retrancher.

2°. M. Hadley coupe, pour ainsi dire, le cours de la liqueur dans son tuyau, par une clef à laquelle il ne laisse qu'un petit trou (il fait ce trou d'un diametre dix fois plus petit que le tuyau; c'est pourquoi le filet de liqueur qui occupe ce passage, est cent fois plus petit que la colomne de liqueur, & cette colomne ne peut se mouvoir qu'avec une vitesse cent fois moindre que celle du filet: au reste, on n'est pas assujetti à employer précisément ces rapports). De-là suivent deux choses, l'une que la force qui peut produire le mouvement du filet de liqueur qui passe par le trou, étant peu considérable, le mouvement de toute la masse de la liqueur est fort lent. L'autre conséquence est, que quoique cette masse soit hors d'équilibre au commencement de l'opération, une de ses portions étant plus élevée que l'autre, la portion la plus haute descend & soûleve la plus basse, sans accélération sensible, de maniere que l'inégalité primitive de ces portions, n'entraîne point de balancement réciproque entre elles. *

* Pour reconnoître aisément qu'il ne doit pas y avoir d'accélération dans la descente de la plus haute portion de la liqueur, parce qu'elle passe par un petit trou, il faut comparer cette descente à l'évacuation d'un vaisseau qui n'a qu'une petite

C'eſt-là une des choſes que M. Hadley a eues en vûe, & il remarque qu'elle doit arriver; mais il va encore plus loin, il paroît prétendre que les ſecouſſes que l'agitation du vaiſſeau tranſmettra ſur l'inſtrument, & dont l'Obſervateur ne pourra le parer, quoiqu'il s'efforce de le tenir continuellement appliqué à l'aſtre, ne cauſeront pas non plus de balancement à la liqueur. *Elle traverſe lentement*, dit notre Auteur, *la clef du robinet, & ne fait aucunes vibrations ſenſibles; car le robinet qui ne la laiſſe paſſer que par une petite ouverture, non-ſeulement en réprime les mouvemens, & en arrête les vibrations* (c'eſt-à-dire, celles que la deſcente de la liqueur cauſeroit ſans cela), *mais il la défend encore de l'agitation qu'elle pourroit recevoir dans le tuyau, lorſque l'inſtrument eſt ébranlé. Au ſurplus*, ajoûte-t-il, *je n'ai point remarqué que le robinet empêchât la liqueur de deſcendre, & de s'arrêter à la partie du tuyau la plus baſſe.* Mais ſi les ébranlemens reçus par l'inſtrument, ébranlemens que M. Hadley ſuppoſe être quelquefois conſidérables, puiſque l'alidade peut, ſelon lui, être tantôt plus haute, & tantôt plus baſſe que l'aſtre de pluſieurs minutes, &c. Si, dis-je, de tels ébranlemens, ſi de tels mouvemens ne cauſoient aucune agitation dans la liqueur, comment une petite différence de poids entre ſes deux portions, qui ſont de part & d'autre de ſon point le plus bas, ſeroit-elle capable de la mettre en mouvement & d'opérer ſa deſcente? Je penſe donc que quand l'inſtrument de M. Hadley reçoit de certaines ſecouſſes, la liqueur de ſon tuyau doit ſouffrir par contre-coup une agitation réelle, nonobſtant l'interpoſition de la clef: cependant j'avoue que cette agitation n'aura pas un effet bien notable (& c'eſt peut-être ce qu'a

ouverture à ſon fond, telle qu'en une clepſydre. Or, bien loin que la liqueur qui s'échappe de la clepſydre, s'accélere à meſure que ce vaiſſeau ſe vuide, au contraire elle ſort de moins en moins vîte, &c.

voulu dire le ſçavant Auteur), parce que les ſecouſſes tranſmiſes à l'inſtrument ſe ſuccédant promptement & en ſens contraires, l'agitation qui en réſulte ſur la liqueur, ſe fait auſſi en ſens contraires, & ſes effets particuliers s'entredétruiſent perpétuellement. Plus le paſſage de la liqueur ſera petit, & moins les ſuites de l'agitation dont nous parlons feront ſenſibles; c'eſt ce que j'avoue bien volontiers, mais auſſi la deſcente de la liqueur en deviendra d'autant plus lente. Je crois au reſte que ce que je viens d'avancer n'a pas beſoin de preuve, & qu'il n'eſt pas queſtion de faire ici une diſſertation géométrique & complete, ſur les propriétés ou accidens du mouvement d'une liqueur dans un tuyau : M. Hadley lui-même ne s'eſt point arrêté à une telle diſcuſſion, mais, ſuppoſant les principes connus, il ſe contente d'avancer des faits; il a même négligé de marquer la grandeur du rayon de courbure qu'il a donné à ſon tuyau, grandeur qui ſerviroit à déterminer le tems de la deſcente de la liqueur par un eſpace donné; il nous dit ſeulement qu'il faut une demi-minute & plus à la liqueur pour traverſer le robinet, ſuivant que l'ouverture de la clef eſt plus ou moins grande, à proportion de la cavité du tuyau. Peut-être faudra-t-il une minute entiere à la liqueur pour parvenir à la ſituation déſirée, ſi on fait le trou de la clef aſſez petit pour amortir ſuffiſamment les vibrations de la liqueur.

Quant à l'uſage de cet inſtrument, il me ſemble fort propre à remplir la deſtination que ſon Auteur lui a donnée, c'eſt-à-dire, à faire connoître la hauteur méridionale d'un aſtre, ou bien la latitude, lorſque l'horiſon eſt couvert; car la lenteur avec laquelle la liqueur du niveau parvient à ſon point de repos ſenſible, n'eſt point un inconvénient par rapport à des obſervations de ce genre, puiſque la hauteur d'un aſtre qui eſt dans le voiſinage du mé-

ridien, ne change pas fort fenfiblement pendant quelques minutes, & que c'eft une telle circonftance qu'il faut faifir autant qu'on peut, pour les obfervations de latitude, ainfi que je l'ai remarqué dans ma Piece. Je crois même que l'inftrument dont il s'agit, eft encore bon pour prendre hauteur, c'eft-à-dire, que d'autres inftrumens ne font gueres meilleurs lorfque l'horifon eft vifible, mais imparfaitement. Au refte, j'ignore fi cet inftrument a été mis à l'épreuve, & fi on y a trouvé ou non des inconvéniens. Quoi qu'il en foit, il me femble qu'il eft un peu délicat pour le commun des marins, & je vois qu'il exige bien des attentions. Par exemple, le volume de la liqueur ne pouvant pas être déterminé, parce que cette liqueur fe raréfie par le chaud, & fe condenfe par le froid, pour ne pas dire qu'elle peut être fujette à s'évaporer, il faut avoir égard à cette variation de volume, & confidérer la fituation des deux extrémités de la colonne de liqueur, pour faire un bon ufage des divifions de l'échelle qui accompagne le tuyau, &c.

Mais fi l'on veut transférer l'emploi de l'inftrument ou bien du niveau de M. Hadley, aux obfervations qui font les plus convenables à la détermination de l'heure, il s'y trouvera un inconvénient non-leger, provenant de la lenteur de la marche de la liqueur. Suppofons, par exemple, que ce foit par une obfervation de la hauteur d'un aftre qu'on cherche l'heure, il faut faifir l'aftre, comme je l'ai montré, dans le tems où fa hauteur change le plus vîte. Suppofons donc encore que le Navigateur foit aux environs de la Ligne, & que l'aftre foit auprès du premier vertical, cet aftre s'élevera de quinze degrés ou environ en une heure, ou bien d'un quart de degré en une minute. S'il faut donc une minute, je le fuppofe, à la liqueur pour fe mettre de niveau, lorfque l'inftrument eft dirigé à un

point fixe, & que le tuyau peut être censé fixe, il pourra arriver lorsque l'instrument sera dirigé à l'astre placé comme je l'ai dit, que la liqueur se trouve éloignée de son niveau d'environ un quart de degré, après une minute de tems depuis qu'elle aura commencé à joüer, & ainsi de suite, parce que le tuyau aura été continuellement déplacé. Ce que je dis arrivera effectivement, lorsque le mouvement de la liqueur sera en sens contraire de celui de l'instrument. Ainsi dans ce cas, la liqueur aura un mouvement continuel, & la ligne qui passera par ses deux extrémités, sera toûjours en arriere du vrai niveau, d'une quantité difficile à estimer. Que si la liqueur se trouve tellement située au commencement de l'opération, que sa tendance à descendre soit en même sens que le mouvement qu'il est nécessaire de donner à tout le corps de l'instrument, pour suivre continuellement l'astre dans son cours en hauteur, alors il est vrai qu'il y aura un instant où la liqueur se trouvera de niveau, mais cet instant ne sçauroit être bien discerné, car la liqueur n'aura qu'un mouvement extrêmement lent, & paroîtra sensiblement arrêtée quelque tems avant & après cet instant. Ce second cas est peut-être moins désavantageux que le précédent, mais posé qu'il le soit, ce seroit toûjours une affaire assez délicate pour l'Observateur, que de placer tellement l'alidade avant le commencement de l'opération de viser à l'astre, qu'il se procurât la circonstance qui constitue le cas dont il s'agit, & ne la laissât pas échapper.

Pour revenir maintenant à la question proposée par l'Académie, quel moyen réputerons-nous le plus sûr, pour faire en mer les observations propres à déterminer l'heure ? Appploquerons-nous à l'instrument qu'il faudra diriger à un ou à deux astres, un pendule ou un niveau à liqueur ? Le pendule est sujet à des oscillations incommo-

des, le niveau à liqueur peut auſſi être ſujet à de pareilles oſcillations. Employerons-nous au contraire le moyen imaginé par M. Hadley, moyen par lequel on ſupprime, ou pour mieux dire, l'on diminue tant qu'on veut les balancemens de la liqueur d'un niveau ? Ce parti a auſſi des inconvéniens rélatifs au Probleme dont il s'agit, nous venons de le voir. Enfin, prendrons-nous un parti moyen, c'eſt-à-dire, propoſerons-nous l'uſage d'un niveau dont la liqueur n'eût pas un mouvement ſi lent que dans celui de M. Hadley ? car le degré de ce mouvement eſt en notre diſpoſition, en diverſifiant le rapport de l'ouverture par où la liqueur doit paſſer à la ſection du tuyau : mais nous n'éviterons pas ainſi tout inconvénient, la liqueur aura des vibrations plus ou moins ſenſibles. En un mot, s'il y a des inconvéniens dans les deux cas extrèmes & oppoſés, qui ſont celui de l'exemption des oſcillations, & celui de leur exiſtence avec promptitude, il n'eſt pas douteux qu'il n'y ait auſſi de l'inconvénient dans un cas moyen entre ces extrèmes. J'eſtime pour concluſion, qu'on pourroit appliquer tout-à-la-fois à un inſtrument, & un pendule, & un niveau du genre de celui de M. Hadley : car comme deux Obſervateurs ſont néceſſaires dans les obſervations qui ſe font la nuit, & lorſque l'horiſon eſt inviſible, l'un d'eux étant entierement occupé à viſer à l'aſtre & à le ſuivre, ſon ſecond feroit, ce ſemble, en état de faire attention en même tems, au pendule & au niveau à liqueur, & le réſultat de l'opération n'en feroit que plus ſûr, en prenant un milieu entre les indications de ces moyens différens. Au reſte, je ne peux m'empêcher de remarquer que la juſteſſe des obſervations convenables à la détermination de l'heure, dépendra toûjours beaucoup de l'adreſſe perſonnelle, & du génie des Obſervateurs : car mieux une perſonne ſçaura ſuivre un aſtre,
&

& y appliquer conſtamment ſon inſtrument de la même maniere, & moins cet inſtrument recevra de ſecouſſes & cauſera par conſéquent d'agitation irréguliere au pendule, ou à la liqueur du niveau dont il ſera armé. D'un autre côté, un homme intelligent fera toûjours attention aux différentes cauſes des erreurs qui ſont inévitables dans les obſervations, & il tâchera de ne s'y expoſer que le moins qu'il ſera poſſible, ou bien même il s'en formera une certaine eſtime, par laquelle il modifiera l'obſervation pure & ſimple. Mais quelque perfection qu'euſſent des moyens méchaniques propres aux obſervations qui fourniſſent l'heure, je crois que ſi ces moyens ſont maniés par des gens groſſiers, les déterminations qui en réſulteront, manqueront toûjours de juſteſſe & de ſûreté.

Comme j'adopte l'invention de M. Hadley, je crois qu'il me ſera permis de faire ici une remarque touchant la pratique, & même de propoſer quelques modifications ou changemens, dont cette invention eſt ſuſceptible.

1°. Le tuyau employé par M. Hadley, eſt un tuyau capillaire, n'ayant qu'un dixieme de pouce Anglois de diametre. D'ailleurs la liqueur que M. Hadley y met, eſt de l'eſprit-de-vin, il y a donc lieu de craindre que la liqueur n'ait plus d'adhéſion à une branche du tuyau qu'à l'autre, c'eſt-à-dire, à celle dans laquelle elle deſcend, qu'à celle où elle monte (ce qui dérangeroit beaucoup ſon mouvement); car on ſçait que la liqueur s'attache mieux, & quitte plus difficilement par conſéquent le verre déja mouillé, qu'elle ne s'attache & ne gliſſe ſur celui qui eſt ſec. Il eſt donc à propos, avant que de mettre le niveau en expérience, de faire en ſorte que ſes deux branches ſoient également humides dans les endroits où la liqueur doit paſſer, ſi on continue d'en employer une qui mouille le verre.

2°. Je ne fçai pas pourquoi M. Hadley a propofé l'efprit-de-vin plutôt que le mercure, pour la liqueur de fon niveau : il a eu apparemment fes raifons. M. Hadley auroit-il cru qu'il feroit trop difficile de former la clef par le trou de laquelle la liqueur doit paffer d'une branche dans l'autre, avec affez de jufteffe, & de telle matiere que le mercure, ne pût s'échapper hors du tuyau & fe perdre? Si cet inconvénient peut être fauvé, je confeillerois l'ufage du mercure : cette liqueur a l'avantage d'être moins dilatable que l'efprit-de-vin, & d'ailleurs comme elle ne s'attache pas au verre, fes deux extrémités feroient mieux terminées & mieux difcernables : ainfi on ne feroit pas obligé de prendre un tuyau auffi petit que l'a fait M. Hadley pour le corps du niveau, & la clef pourroit recevoir une ouverture un peu moins petite : il doit être difficile de percer un trou qui n'ait qu'un $\frac{1}{100}$ de pouce de diametre, &c.

3°. Il faut, dans l'ufage du niveau de M. Hadley, confidérer les deux termes auxquels répond la liqueur ; c'eft une petite peine & une double occafion d'erreur. Ne pourroit-on pas éviter cela ? Voici ce que j'imagine dans cette vûe : la liqueur n'eft pas fi précieufe qu'on ne puiffe en facrifier quelques gouttes, je voudrois donc qu'une des branches du niveau eût moins de longueur que l'autre, & fût terminée par un petit trou par lequel la liqueur fortiroit, tant qu'elle feroit pouffée par celle que contiendroit l'autre branche, c'eft-à-dire, que la liqueur ne s'éleveroit point dans la branche courte, & defcendroit feulement dans la longue. Il eft vifible que l'inftrument peut être toûjours difpofé pour l'obfervation, de maniere que la tendance de la liqueur foit vers l'orifice de la branche courte. La mefure de cette branche étant donc fixe & donnée, on auroit feulement à obferver l'extrémité de la liqueur dans la longue branche.

4°. Je suppose encore que l'on peut employer le mercure. Il est peut-être à propos que le mouvement de la liqueur, qui cherche toûjours son niveau pendant qu'on suit un astre qui change de hauteur, soit sensible, afin qu'on puisse discerner si ce mouvement est uniforme ou variable, &c. & tirer de-là des inductions. Or, c'est ce qu'on peut procurer sans exposer cette liqueur à des balancemens; c'est, dis-je, ce qu'on peut effectuer, en combinant avec le mercure une autre liqueur beaucoup plus légere, à peu près comme dans les barometres composés. Le tuyau qu'occupera le mercure aura certaine largeur, & sera joint à un tuyau uniforme beaucoup plus étroit, où l'autre liqueur s'étendra; c'est à côté de ce second tuyau, que sera appliquée une échelle qui marquera la situation de l'instrument. Je ne m'arrête point à marquer ce qu'il faudra pratiquer pour bien diviser cette échelle : si, par exemple, on donne 5 lignes de diametre au tuyau destiné à loger le mercure, & une ligne seulement au petit tuyau; la colomne de liqueur légere contenue dans ce tuyau, aura 25 fois plus de vîtesse que celle de mercure : mais nonobstant cette différence de vîtesse, les deux liqueurs n'auront guere plus de disposition à balancer, à cause de la différence des masses; & pour réprimer d'autant plus le balancement, on pourra donner seulement un tiers de ligne de diametre à l'ouverture par où le mercure passera d'une des branches du niveau dans l'autre. Ainsi le filet du mercure qui coulera par ce trou, sera plus de deux cens fois plus petit que les colomnes de cette liqueur. Cela posé, il y aura, selon mon estime, aussi peu de balancemens que dans le cas de M. Hadley, &c.

5°. Enfin, comme la lenteur avec laquelle la liqueur parvient au niveau, ou s'en approche, est incommode & nuisible, surtout quand on travaille à découvrir l'heure,

lorſque le paſſage par où file la liqueur, eſt auſſi petit que nous l'avons fait juſqu'ici, à proportion de la capacité du corps du niveau : je voudrois que l'aire de ce paſſage pût être diverſifiée à volonté, & cela paroît poſſible, ſi le corps du niveau a un diametre approchant de celui que j'ai marqué au n° précédent ; je veux dire qu'on pourroit faire une clef qu'on gouverneroit à diſcrétion, & cependant avec meſure, par un petit roüage ou une vis, & qui laiſſeroit à la liqueur un paſſage plus ou moins étroit. Je n'ai pas beſoin de dire qu'on laiſſeroit plus de liberté de ſe mouvoir à la liqueur au commencement de l'opération, & lorſqu'on la réputeroit aſſez éloignée du niveau, mais qu'on reſtraindroit cette liberté à meſure qu'on l'eſtimeroit plus voiſine de l'état déſiré. On pourroit auſſi avoir une deuxieme clef, qui ſeroit faite à l'ordinaire, & ſerviroit à arrêter entierement la liqueur lorſqu'on le jugeroit à propos.



Fig. 1.

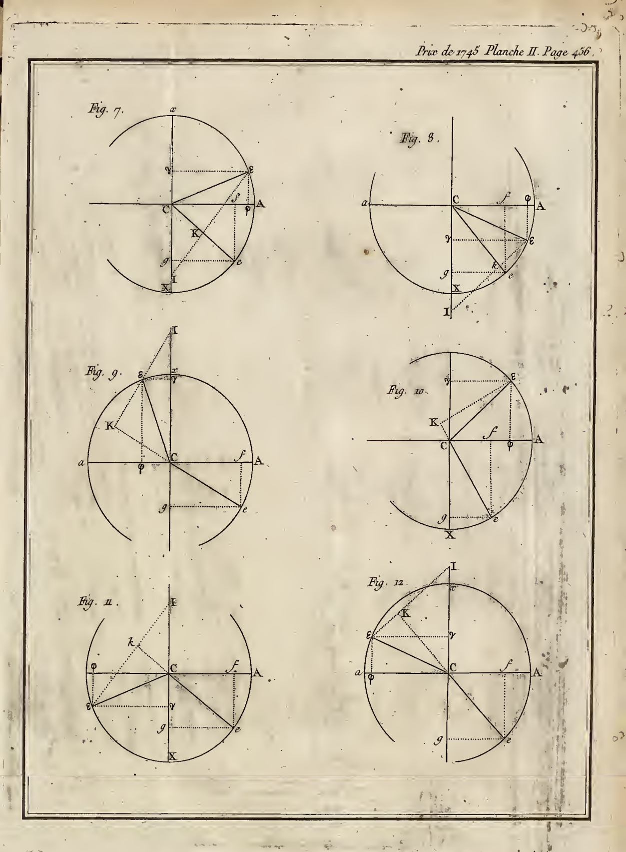
Fig. 2.

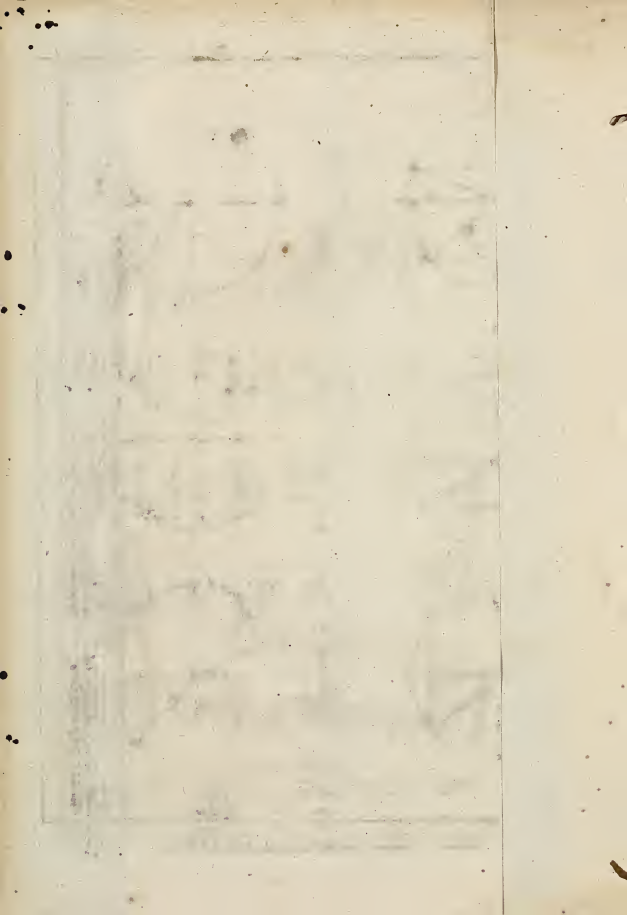
Fig. 3.

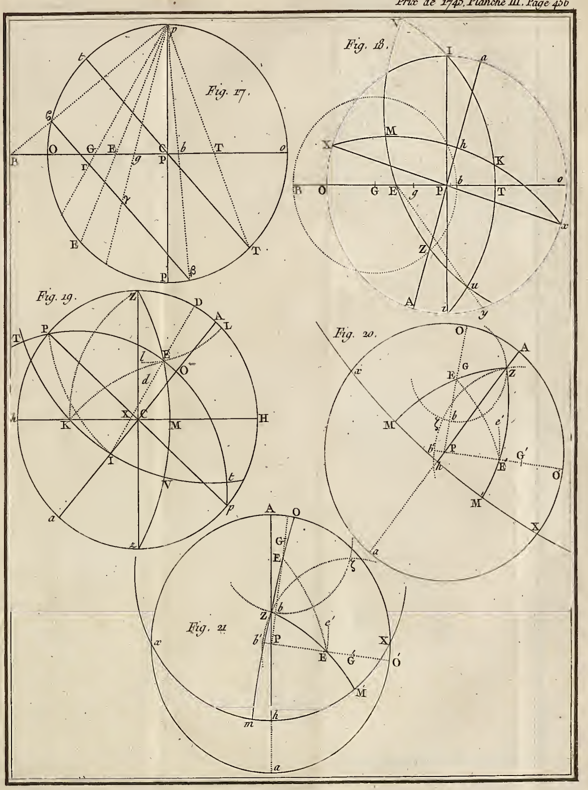
Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 6.


Fig. 7.
x
γ
ε
C
f
φ
A
K
g
e
I
X
Fig. 8.
a
C
f
φ
A
γ
ε
g
k
e
X
I
Fig. 9.
I
ε
x
γ
K
a
C
f
A
φ
g
e
Fig. 10.
γ
ε
K
C
f
φ
A
g
e
X
Fig. 11.
I
k
φ
C
f
A
ε
γ
g
e
X
Fig. 12.
I
x
K
ε
γ
a
φ
C
f
A
g
e




Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21

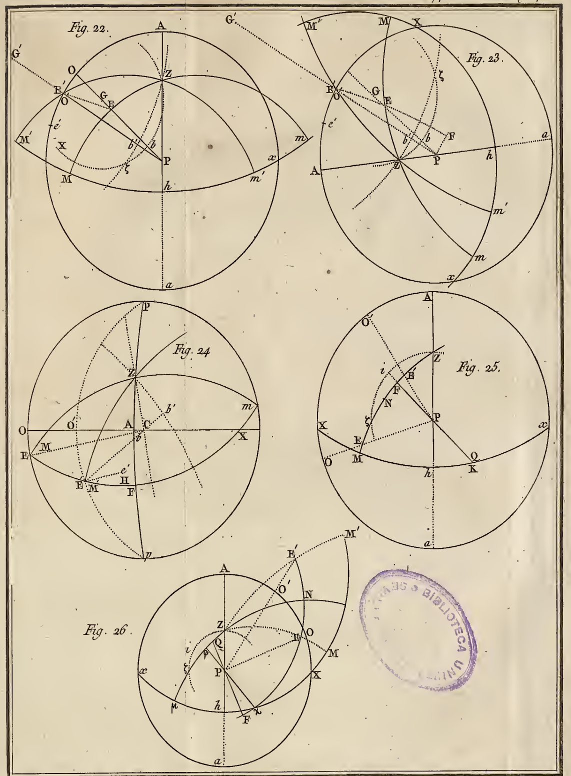

Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24
Fig. 25.
Fig. 26.

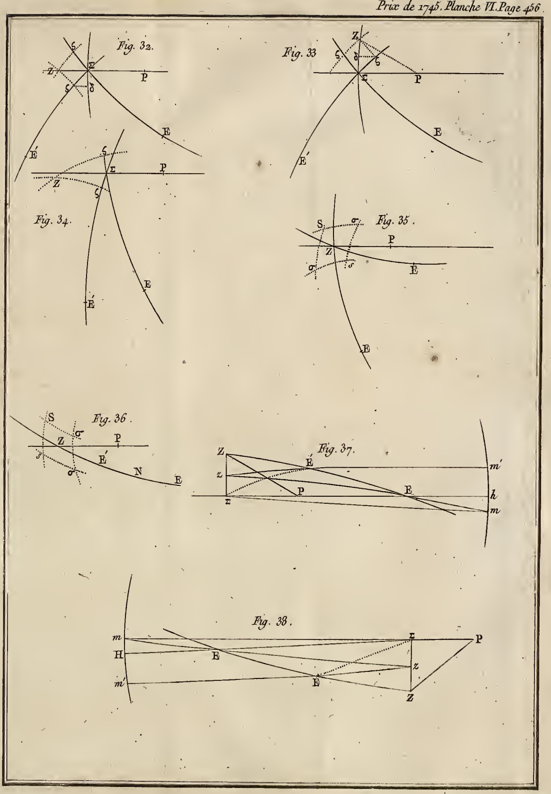
Fig. 27.

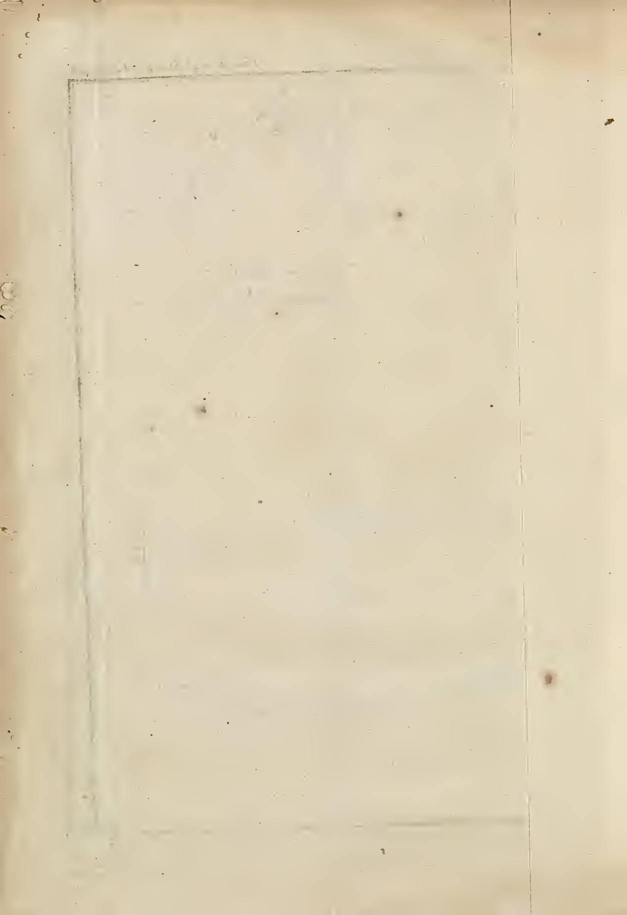
Fig. 28.

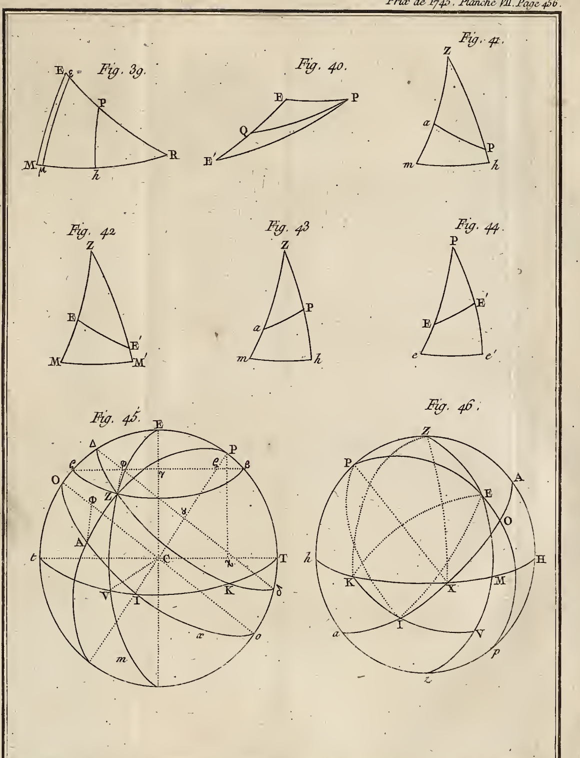
Fig. 29.

Fig. 30.

Fig. 31.


Fig. 32.
ζ
Z
Σ
P
ζ
δ
E
E′
Fig. 33
Z
ζ
δ
ζ
Σ
P
E
E′
ζ
Σ
P
Z
ζ
Fig. 34.
E
E′
S
σ
Fig. 35.
P
Z
σ
s
E
E
S
Fig. 36.
σ
P
Z
E′
s
σ
N
E
Z
Fig. 37.
E′
m′
z
P
E
h
Σ
m
Fig. 38.
m
Σ
P
H
E
z
m′
E
Z




Fig. 39.
E
ε
P
R
M
μ
h
Fig. 40.
E
P
Q
E'
Fig. 41.
Z
a
P
m
h
Fig. 42
Z
E
E'
M
M'
Fig. 43
Z
P
a
m
h
Fig. 44.
P
E'
E
e
e'
Fig. 45.
E
Δ
P
ς
φ
γ
ς
β
O
Φ
Z
δ
A
t
C
T
K
V
I
x
o
m
Fig. 46.
Z
P
A
E
O
h
H
K
X
M
I
a
V
p
z

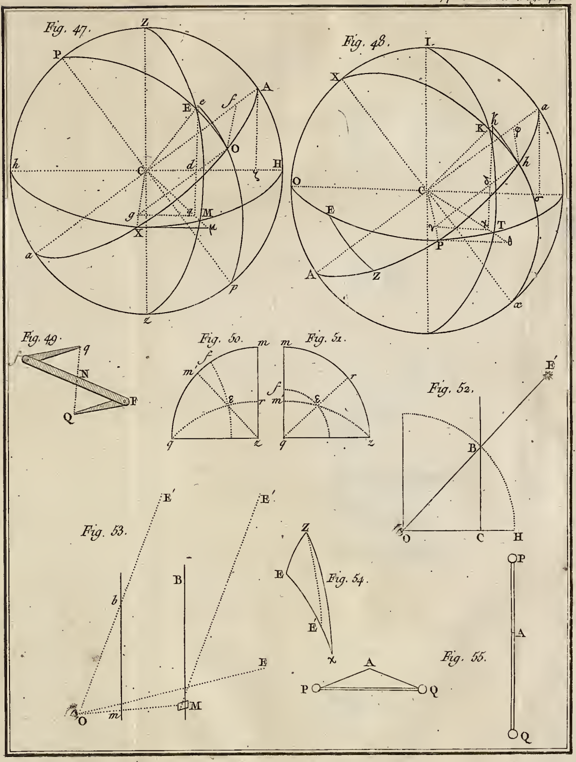
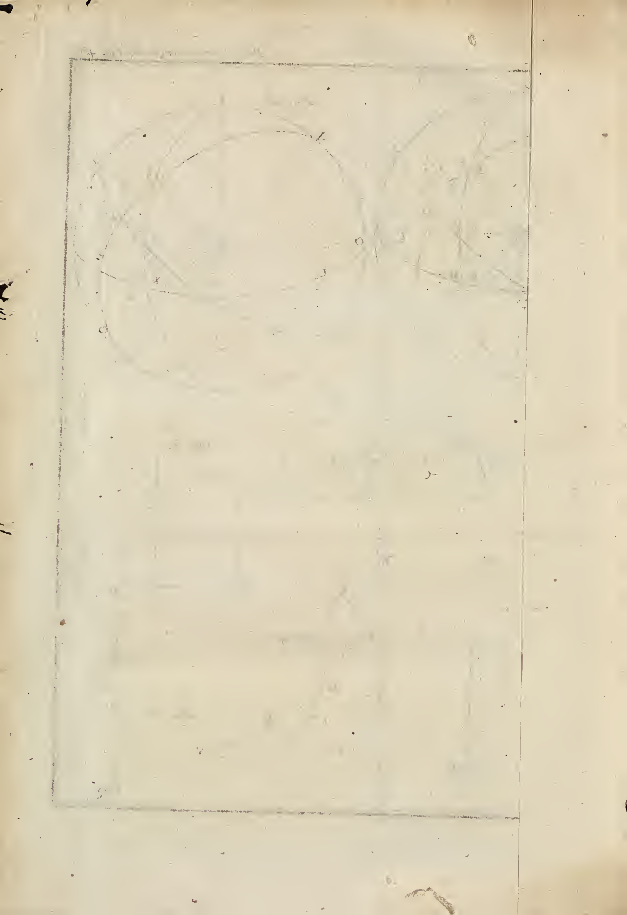


Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.



MEMOIRE

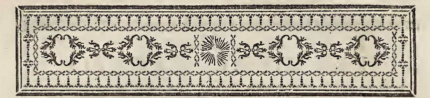
SUR LE

PROGRAMME

Pour le Prix de 1747.

La meilleure maniere de trouver l'heure en Mer, par obſervation, ſoit dans le jour, ſoit dans les crépuſcules, & ſur-tout la nuit, quand on ne voit pas l'horiſon.

Semper id melius eſt quod optimo propinquius eſt. Ariſt. lib II. de Cœlo.



MEMOIRE
SUR
LE PROGRAMME
Pour le Prix de 1747.

La meilleure maniere de trouver l'heure en Mer, par observation, soit dans le jour, soit dans les crépuscules, & sur-tout la nuit, quand on ne voit pas l'horison.

Semper id melius est quod optimo propinquius est... *Arist. lib. 2. de Cœlo.*



L'ACADEMIE Royale dans la même feuille, semble désirer uniquement qu'on fournisse aux Navigateurs les moyens *méchaniques* les plus sûrs, pour faire en mer, malgré l'agitation du vaisseau, les observations dont on peut conclurre l'heure.

C'est pour remplir cet objet, que je me suis uniquement attaché à la recherche des instrumens, & que j'aurai l'honneur d'en proposer deux, dont l'un pourra servir en tout tems, pendant la nuit & le jour, sans aucun recours au Soleil ni aux étoiles, & l'autre pendant tous les momens du jour, où le ciel sera pur, & le Soleil visible.

PREMIERE PARTIE.

AVANT que de décrire ce premier inftrument, je fupplie mes Juges de me pardonner quelques obfervations que je vais faire ici, touchant les horloges à *roüage*, uniquement pour leur prouver que c'eft avec connoiffance de caufe, quand je les abandonne pour chercher un moyen qui me paroît plus fûr.

Nos meilleures pendules ne fçauroient être d'aucun ufage fur mer, par la principale raifon que la fréquente agitation du vaiffeau feroit arrêter le pendule. Ce premier inconvénient fuffit pour en interdire l'ufage fur les bâtimens, fans avoir befoin de parler ici de l'allongement & raccourciffement des métaux; de la différence des vibrations dans un air plus ou moins pefant, des différens degrés de force des refforts, fuivant la différente température de l'air, & de l'*ufure* continuelle d'une infinité de pieces très-déliées; qui travaillent toutes avec force, & dont chacune en particulier ne peut pas fouffrir la moindre altération, fans que la jufteffe de la piece s'en reffente.

La montre de poche fe reffent moins de l'agitation du vaiffeau, ou pour mieux dire, ne reffent que les mouvemens de la perfonne qui la porte, & dans une montre *excellente*, ces mouvemens ordinaires ne la dérangent pas beaucoup, furtout quand elle eft dans fa premiere fraîcheur : mais l'avantage qu'elle a fur les pendules, fe trouve bien compenfé par la différence du *régulateur*; je parle de fon petit balancier, dont les vibrations trop multipliées, ne feront jamais comparables pour la jufteffe, à la longueur d'un pendule à *fecondes*.

L'invention

L'invention admirable du ressort spiral, est d'un grand secours pour entretenir pendant quelque tems la justesse dans ces petites machines: mais étant lui-même sensible aux changemens de l'air, nous sommes obligés de tems en tems, de le *bander* ou *lâcher*, par le moyen du rateau, afin de le remettre dans un état de force proportionné à l'action qu'il doit produire. Ce qu'il y a de fâcheux, c'est qu'on ne peut appercevoir ce dérangement que par comparaison à quelqu'autre piece sûre, ou à l'aspect des astres, & l'on n'a souvent sur mer, ni l'un ni l'autre de ces deux moyens.

Tout ce que je viens de dire ne doit s'entendre que d'une montre excellente à tous égards, & sortant depuis peu de la main de l'ouvrier. Mais en est-il beaucoup de ce nombre? Enfin, je suppose qu'il y en ait une parfaitement juste, il est impossible qu'elle le soit long-tems: les trous du *coq*, de la *potence*, & ensuite ceux des *platines* s'agrandissent insensiblement; les pivots prennent du jeu, & l'engraînage s'affoiblit; le peu d'huile qu'on y met seche, & rend les frottemens plus sensibles; les pointes de la roue de rencontre s'émoussent, les palettes du balancier se creusent, & les vibrations deviennent plus courtes; le grand ressort tire plus vivement dans certains tems que dans d'autres, & une infinité d'autres dérangemens que mes Juges connoissent mieux que moi, rendent la montre de poche si incertaine, qu'on ne peut pas raisonnablement se flatter qu'une bonne montre puisse aller quatre jours de suite, sans s'écarter de quelques minutes. Mais si une montre excellente dépend de tant de cas qui peuvent la rendre mauvaise, que sera-ce de celles qui ne sont que médiocres? D'où je conclus que toutes les pieces à *roüage* qu'on a trouvées jusqu'ici, & probablement

toutes celles qu'on imaginera dans la suite, seront insuffisantes pour donner l'heure exacte en pleine mer.

Je crois qu'on pourroit mieux réussir par le moyen du sable, si l'on s'appliquoit véritablement à chercher les défauts des *sabliers* ordinaires pour les corriger. La préférence que les Navigateurs ont toûjours accordée aux sabliers sur les autres horloges, malgré les défauts de ces premiers, est un préjugé qui m'a fait naître l'idée dont j'ai à rendre compte à Messieurs les Commissaires.

Observations sur les défauts des Sabliers ordinaires.

LE défaut le plus commun des *sabliers* consiste dans leur *inégalité*. Il est rare d'en trouver un, qui, comparé à une bonne pendule, ne fasse pas un écart sensible dans le passage d'une bouteille à l'autre, & souvent la même bouteille ne s'accorde pas avec elle-même. On a coutume d'attribuer cette variation aux changemens d'air, & je veux croire que dans certaines occasions l'air y entre pour quelque chose, mais dans le concours de plusieurs causes qui peuvent produire un même effet, il est aisé de prendre le change, en l'attribuant à l'une plutôt qu'à l'autre, quand on n'use pas de précaution.

Qu'une bouteille soit régulierement plus courte que l'autre, c'est une marque visible que le *trou* ou *stile*, n'est pas exactement cylindrique dans l'épaisseur de la feuille de métal, ayant un côté plus évasé que l'autre; mais qu'une même bouteille ne s'accorde pas avec elle-même, je crois à n'en pouvoir douter, que cela vient de l'*inégalité des grains du sable*. Je vais tâcher de me faire entendre.

Quoique tous les grains d'un sable bien criblé, paroiss-

sent égaux à nos yeux, dépouillés des secours de l'art, il est cependant certain, & les microscopes nous en convainquent, qu'il y en a de beaucoup plus gros les uns que les autres.

Imaginons maintenant un de ces gros grains placé sur le bord du *trou*, de telle façon qu'une petite partie de sa masse soit *en-dedans*, & l'autre plus grande *en-dehors* : ce grain ne passera pas, parce que les deux tiers de sa masse sont appuyés sur la plaque de métal, mais son autre tiers bouchera pendant tout l'écoulement une partie physique de ce trou, & plusieurs autres grains en faisant autant tout autour du trou, il se trouvera un peu resserré, & la bouteille sera plus long-tems à couler : mais si dans une autre occasion, il se trouve sur les bords un moindre nombre de gros grains, le trou sera plus libre, & la bouteille finira plutôt.

Voilà, MM., un défaut qui doit arriver très-souvent, & qu'on attribue à la secheresse ou humidité de l'air. Pour me convaincre de la vérité, j'ai percé dans une plaque de 3 lignes d'épaisseur, deux trous coniques opposés, dont les pointes se rencontrent au milieu de l'épaisseur de la plaque, & y ayant mis du sable d'Allemagne bien criblé, j'ai trouvé une grande justesse dans chaque bouteille en particulier (à cause que tous les gros grains qui entrent dans la base du cone, sont forcés de passer par la pointe, n'ayant plus de superficie platte où pouvoir s'arrêter); mais aussi je n'ai jamais pû parvenir à rendre les deux bouteilles parfaitement égales entre-elles, parce que probablement les deux pointes des deux cones ne sont pas parfaitement unies & égales.

Il arrive aussi que certains petits poils ou *atomes*, qui voltigent dans l'air, s'introduisent dans le sablier à la faveur du sable, à mesure qu'on le met, & que venant quel-

quefois à être couchés diamétralement fur le trou, ils féparent le *coulage* en deux, ce qui fait retarder confidérablement le fablier, & quelquefois arrêter : avec un trou conique, ce défaut ne doit arriver que très-rarement, parce que ceux de ces poils qui defcendent horifontalement, venant à toucher les parois du cone par un bout, l'autre bout du poil s'abbaiffe, & il arrive à la pointe du cone dans une fituation verticale, qui lui permet de paffer aifément.

EXPERIENCE.

SI vous mettez un, ou plufieurs fabliers des meilleurs, fur une planche horifontale, dont un bout fera appuyé fur une table, & l'autre fur une *roulette dentelée*, que l'on fera tourner avec une manivelle, cette roulette caufera un trémouffement à la planche, qui fera arrêter tous les fabliers : en voici la raifon phyfique. A force d'agitation, l'air qui fe trouve renfermé parmi les grains de fable dont la bouteille fupérieure eft pleine, fe dégage & gagne le haut de la bouteille, laiffant les grains de fable fi ferrés entre eux, après la féparation de l'air, qu'il fe fait au-deffus du bouton une petite *voûte*, & bien-tôt il ne coule plus rien, parce que l'air inférieur ne trouve plus de paffage pour traverfer le fable qui eft dans la bouteille fupérieure. Cette expérience que je découvris par hafard, prouve ce que j'ai dit plus haut, que l'air, dans certaines occafions, peut caufer du dérangement au fable; car de même qu'un fablier bien *trémouffé* s'arrête totalement, de même un autre moins trémouffé pourra couler plus lentement, fans toutefois s'arrêter, parce qu'il reftera encore affez d'interftice parmi le fable fupérieur, pour que l'air trouve un petit paffage.

Description d'un Sablier de 30 heures, propre à servir sur mer, marquant distinctement les heures & les minutes une à une, *& qui ne s'arrête pas dans le tems même qu'on le retourne.*

LE Sablier dont je vais avoir l'honneur de vous entretenir, & dont j'ai tout lieu de croire que l'idée est neuve, m'embarrasse presque autant à décrire sur le papier, qu'il m'a donné de peine à imaginer & à construire. J'espere cependant me faire entendre, à force de multiplier les figures, en attendant que le modele effectif acheve de présenter à vos yeux ce qui pourra manquer du côté de l'explication. Il est d'un assez grand volume, & fort pesant : mais si avec ces deux secours qui m'étoient nécessaires, je vous offre une Piece qui peut devenir excellente, j'espere que vous me pardonnerez l'un en faveur de l'autre.

Il est composé de fer & de bois. Le corps du sablier est une caisse *AB*, *Fig.* 1, de bois de noyer, quarré-longue, de 40 pouces de longueur, 12 pouces de largeur, & 7 pouces d'épaisseur extérieure. Elle est montée sur deux pivots qui sont au centre, lesquels pivots sont supportés à leur tour par une chape de fer *CD*, de 3 pouces de largeur & de 5 lignes d'épaisseur.

Cette chape est suspendue par une boucle *E*, pliante à tout sens, pour obéir à toutes les agitations du vaisseau. Le cadran & la quadrature qui est dessous, sont renfermés dans une boîte de fer extérieure *FG*, arrêtée solidement sur la chape : une aiguille marque les minutes une à une, & les heures, qui marchent en sautoir, paroissent successivement à travers l'ouverture *X*. Le tout est couvert d'une glace, comme aux pendules.

Quand on veut tourner le fablier, on leve un arrêt qui eft au haut de la chape, on prend le bas de la caiffe avec la main droite, qu'on fait tourner fuivant l'arc ponctué 1, 2, 3, 4, & dès que *B* eft arrivé en *A*, l'arrêt qui eft à reffort, accroche la caiffe, & cela fuffit pour 24 heures & plus, comme une montre de poche.

La *Fig.* 2 repréfente le profil du fablier, afin de faire remarquer les deux pivots *I*,*H*, fur lefquels tourne la caiffe. J'ai répété les mêmes lettres de la *Fig.* 1, pour qu'on retrouve chaque piece plus aifément. Il y a auffi dix lucarnes qui fe répondent, 5 de chaque côté : elles font garnies d'un morceau de glace, & fervent, fans beaucoup de néceffité, les unes pour connoître fi le fablier a befoin d'être monté, & les autres pour voir fi le fable coule net, & fans embarras, afin d'y remédier fur le champ, fuppofé que quelque matiere dérangeât le coulage, comme je le dirai plus bas. Voilà, MM, pour ce qui regarde l'extérieur de cette piece, l'intérieur n'eft pas fi facile à développer.

Les pieces intérieures du Sablier.

LA caiffe *KLM*, *Fig.* 3, qui forme le corps du fablier, eft ici repréfentée hors de la chape de fer, j'en ai auffi retranché la planche *du devant* & celle *du derriere*, pour laiffer voir la conftruction des entonnoirs : j'ai groffi cette figure pour y pouvoir détailler les petites pieces, mais c'eft la même marquée *A B* dans la *Fig.* 1, & dans la même fituation.... Cette caiffe eft divifée en trois parties, par deux fonds intermédiaires *NO*, *PQ*; les deux grandes parties *K* & *L*, tiennent la place des deux bouteilles des fabliers ordinaires, & la partie *M* peut être regardée comme le bouton des mêmes fabliers ordinaires.

Je leur donnerai ce nom pour abréger ma defcription.

Sur les fonds intermédiaires dont je viens de parler; vous voyez des pieces de bois attachées deffus & deffous, lefquelles forment la *coupe* ou *profil*, de 4 entonnoirs (2 droits, 2 renverfés), dont les autres pieces de complément tiennent aux deux autres planches, retranchées de cette troifieme figure.

La piece courbée *MR*, qui paroît ici ne porter fur rien, eft appuyée & fixe fur un fupport immobile, que je décrirai dans la *Fig. 6*: il fuffit de fçavoir ici, que cette piece eft une plaque de fer de 4 pouces de large, qui met à couvert la croix que vous voyez au-deffous, & qui outre cela, foûtient un cinquieme entonnoir immobile *RS*, qui eft le *couloir immédiat* par où tout le fable s'écoule. Je lui donnerai auffi ce nom, pour le diftinguer des 4 grands entonnoirs *mobiles* qui fuivent le mouvement de la caiffe quand elle tourne.

Après avoir montré la divifion du fablier en trois parties, il eft tems d'expliquer comment fe fait le paffage du fable, & l'effet qu'il produit. Suppofons donc que le fablier vient d'être tourné, & que la bouteille *K* eft pleine de fable. 1°. Il eft naturel que ce fable forte par la pointe *S* du grand entonnoir *KTSV*, & comme ce fable, en fortant du grand entonnoir, rencontre le *couloir RS*, qui n'eft qu'à deux lignes au-deffous, ce fable, dis-je, après avoir rempli le couloir *RS*, fait un petit tas au-deffus (que j'ai marqué par des points), & ce tas *engorge* le grand entonnoir, & ne lui permet de couler qu'à proportion que le *couloir* délivre le fable par le bas *R* : cela fe fait fucceffivement, fans que le fable puiffe fe répandre ailleurs.

2°. Le fable qui fort du couloir *RS*, rencontre au-deffous un des quatre creufets qui font attachés fur la *croix*

tournante. Il y coule pendant une *minute* précisément, après quoi ce creuset, perdant l'équilibre, fait faire un quart de tour à la croix; par ce moyen, le creuset verse le sable qu'il contenoit, & un second creuset se trouve précisément sous le couloir, pour continuer à recevoir le sable. J'expliquerai ailleurs ce qui détermine cette croix à faire précisément & invariablement un quart de tour à chaque minute.

3°. Le sable qui sort du creuset lorsqu'il se renverse, tombe dans le grand entonnoir *XM*, & passe par un tuyau *X* qui se trouve ouvert, parce que le clapet *Y* est renversé par l'effet de son poids & de sa situation, comme la figure le fait voir. La traînée de points qui représentent le sable, aidera à l'explication. C'est de cette façon que tout le sable de la bouteille *K* traverse le bouton *M*, & vient se loger dans la bouteille *L* pendant 28 ou 30 heures, après quoi il faut retourner le sablier, si l'on ne veut pas qu'il s'arrête.

4°. Quand on retourne le sablier, & que la bouteille *L* pleine de sable commence à prendre le dessus, le clapet *Y* se ferme de la même façon que vous voyez l'autre clapet *V*, & celui-ci s'ouvre de la même façon que vous voyez le clapet *Y* dans cette troisieme figure.

REMARQUE.

Pendant ce tems-là, le sable qui se trouve dans le couloir *RS*, continue de s'écouler sans perte de tems, & il y en auroit pour fournir plus de 4 *minutes*: la croix tournante fait par conséquent ses fonctions, & *la mesure du tems n'est point interrompue tandis qu'on tourne le sablier.*

Il faut cependant tourner ce sablier rondement, surtout quand la bouteille pleine commence à prendre le dessus,

deſſus, parce que le couloir n'étant pas alors ſous le grand entonnoir, le ſable ſort en pure perte, & retombe en-bas ſans toucher les creuſets, qui ſont à couvert. Il eſt vrai que le trou des grands entonnoirs n'étant que de 13 lignes de diametre, il ne ſe répand pas beaucoup de ſable dans cet inſtant, mais il convient de le tourner leſtement.

Explication détaillée du Couloir.

Le couloir, *Fig.* 4, que je n'ai pas pû détailler dans la *Fig.* 3, mérite de l'être ici en plus grand volume. Il eſt compoſé de 4 pieces, unies par un reſſort, leſquelles peuvent être ſéparées dans le beſoin, & réunies avec la même facilité. La premiere partie *MR*, dont j'ai déja parlé dans la troiſieme figure, eſt une large plaque qui met à couvert la croix tournante, & ſoûtient tout l'aſſemblage du couloir, ſçavoir la gorge 5, 6 qui eſt fixe; le tamis 1, 2 qui coupe le couloir en deux parties, & enfin le couloir proprement dit 3, 4, où il n'entre point de ſable qu'après avoir paſſé par le tamis 1, 2.

Le tamis 1, 2 de métal, *Fig.* 5, eſt percé de 350 trous, quatre fois plus petits que le trou du couloir, en ſorte que tout ce qui paſſe par un trou du tamis, ne peut occuper que le *quart* du trou du couloir, & par conſéquent le couloir ne peut pas arrêter. Au reſte, quand les parties groſſieres boucheroient les trois quarts du tamis, il reſteroit encore aſſez de jour pour fournir ſurabondamment au couloir. Cependant ce tamis qui ſe met en couliſſe, peut être retiré de ſa place quand on veut, par une porte fermée à clef, qui ſe trouve vis-à-vis; on jette les ordures qui peuvent s'y trouver, & on le remet en place ſur le champ.

Usage du Tamis ou Crible.

Outre que le tamis sert continuellement à arrêter tout ce qui pourroit embarrasser le couloir, il sert encore pour découvrir en très-peu de tems tout ce qu'il peut y avoir de parties grossieres ou détachées du bois : car on ôte de place le couloir 3, 4, ne laissant que le tamis 1, 2, qui passe & repasse tout le sable en très-peu de tems, & fournit l'occasion de retirer tout ce qu'il peut y avoir de grossier.

Remarque touchant la Porte.

Quelque nouvelle & dangereuse que paroisse une porte à un sablier, laquelle peut, par son ouverture, donner entrée à quelque atome funeste, il faut ici raisonner différemment, & ne point envisager ce sablier sur le pied des sabliers ordinaires. Car 1°, on ne doit pas s'embarrasser de la perte de quelque peu de sable, attendu que la mesure n'en est pas fixe. 2°. Le couloir est ici fort grand, & d'une figure conique, il est d'ailleurs précédé d'un tamis qui arrête les ordures, & par conséquent les atomes ne sont pas à beaucoup près si dangereux que dans les sabliers ordinaires : mais d'un autre côté cette porte est infiniment commode pour retirer toutes les parties grossieres qui pourroient se détacher du bois ou du métal, & même dans un cas extraordinaire, où le couloir seroit *engorgé*, on peut le retirer, & le remettre sur le champ, sans rien changer de la justesse du sablier.

D'ailleurs, outre que cette porte ne s'ouvrira qu'en cas de besoin, & presque jamais qu'après une certaine épreuve, je suppose qu'on aura pour lors attention de le faire dans un endroit à l'abri du vent & de la poussiere,

& qu'elle ne restera ouverte que *deux instans*, l'un pour retirer le tamis, & l'autre pour le remettre.

Explication du Support intérieur.

Ce qu'on a le plus de peine à concevoir dans ce sablier, quand on ne voit pas l'intérieur, c'est une piece *immobile* placée au milieu d'une caisse *mobile*, en sorte que dans le tems que tout le sablier tourne de haut en bas, il y a une piece intérieure dans son milieu qui ne tourne jamais, & au milieu de cette piece *immobile*, il y en a une autre *mobile*, qui est la croix des creusets, le tout sans être sujet au moindre dérangement.... Les trois cercles ponctués de la *Fig.* 3 peuvent servir à en donner une idée. Le plus petit des trois cercles renferme la croix des creusets, qui est mobile, puisqu'elle tourne d'une minute à l'autre : tout ce qui est renfermé entre le petit & le moyen cercle, est immobile ; enfin tout ce qui est en dehors du plus grand cercle est mobile, & tourne toutes les fois qu'on retourne le sablier : l'espace entre le plus grand & le moyen cercle, est le jeu qu'il y a entre les pieces *mobiles* & celles qui sont *immobiles*.

Pour rendre ceci intelligible autant que je le pourrai, il faut considérer dans la *Fig.* 6 la chape de fer *CD*, dont j'ai retranché la caisse ou corps du sablier. Au milieu de cette chape, il y a une autre piece de fer *EFGH*, forgée d'une seule piece, laquelle a deux forts tenons *E*, *F*, & un espace vuide *GH*, dans lequel vuide se trouve placée la croix des creusets de la *Fig.* 3 & 7, que je représente ici de profil dans la *Fig.* 6.

Les deux tenons *E*, *F* du support *EFGH*, sont *ronds* aux endroits *E*, *F*, & *quarrés* dans l'épaisseur de la chape *CD*, ce qui rend ce support immobile, c'est-à-dire, in-

timement lié avec la chape, & ne faisant pour ainsi dire qu'une même piece.... Ce support *EFGH* ne paroît du tout point quand la caisse du sablier est en place, comme à la *Fig.* 2, parce qu'il est tout intérieur, & cette caisse porte entierement sur les deux tenons *E*, *F*, qui sont les mêmes de la *Fig.* 2. *I*, *H*, & que j'ai dit être *ronds*, afin que la caisse puisse tourner sans que la chape *CD*, ni le support *EFGH* tournent le moins du monde.

OBSERVATION.

Quoique le plan du support *EFGH* paroisse ici parallele au plan de la chape *CD*, il faut cependant se souvenir que je ne l'ai représenté de cette façon que pour me faire entendre; mais le plan du support croise directement celui de la chape: les parties *G*, *H* sont de niveau, quoiqu'elles paroissent ici l'une au-dessus, l'autre au-dessous; en un mot le plan de la chape est *vertical*, & celui du support *EFGH* est *horisontal*. Voyez-en la coupe en *G*, *H*, *Fig.* 4, où les côtés *G*, *H* sont représentés de niveau l'un derriere l'autre.

Communication du dedans au-dehors.

Toute la communication du dedans au-dehors se fait, *Fig.* 6, par un trou rond d'environ 4 lignes de diametre, percé dans le tenon *F* suivant sa longueur, dans lequel trou passe une baguette de fer *KL*, de 3 lignes de diametre. Cette baguette, que j'appellerai *baguette de communication*, sert d'arbre à la croix des creusets, *Fig.* 7 : elle a un pivot en *K* & un autre en *L*, sur lesquels elle tourne, emportant les creusets avec elle, comme ne faisant qu'une même piece. Cette baguette est appuyée du côté *K*

ſur le tenon *E*, & du côté *L* ſur un ſupport extérieur *MN*, que nous décrirons plus bas, en parlant de la roue des minutes.

Il faut encore ajoûter, que ſur le bout *L* de la baguette en queſtion, il y a une croix d'acier arrêtée ſolidement ſur ladite baguette, en ſorte que trois pieces n'en font qu'une, ſçavoir 1°. La baguette qui tient depuis *K* juſques à *L*. 2°. La croix des creuſets, *Fig.* 7, qui ſe trouve dans l'intérieur du ſablier au vuide *GH*. 3°. La croix d'acier fixée ſur l'autre bout de la baguette *L*, qui ſe trouve dans la quadrature, & par conſéquent hors du ſablier; l'un ne peut pas tourner ſans l'autre, & la croix d'acier repréſente dans la quadrature toutes les ſituations des creuſets qui ſont dans l'intérieur du ſablier.

Explication de la Quadrature.

La piece *A*, *Fig.* 8, eſt cette même croix d'acier dont je viens de parler, qui ſe trouve intimement unie avec la croix des creuſets, par le moyen de la baguette qui leur ſert d'arbre commun, en ſorte que l'une ne peut pas tourner ſans l'autre. Cela ſuppoſé, nous pouvons, pour la facilité de l'explication, prendre la croix d'acier *ACK* que *nous voyons*, pour la croix même des creuſets que *nous ne voyons pas*: chaque bras de cette croix repréſentera un creuſet.

Imaginons-nous maintenant que le ſable coule ſur le bras *K* (ou ce qui eſt le même, dans le creuſet qui lui répond), il eſt viſible que bien-tôt le poids de ce ſable chargeant le bras *K*, ébranlera la croix pour la faire trébucher; mais l'autre bras *C* qui lui eſt oppoſé, rencontrant le contre-poids *BCDE*, &c. (mobile au point *B*, & ſoutenu par la conſole *N*), toute la croix ſera retenue juſqu'à ce que

le ſable qui coule ſur le bras K puiſſe vaincre la réſiſtance du contre-poids BCD, &c. alors le bras K trébuchera, & viendra en L; les trois autres bras auront tous changé de place; le bras M ſera ſous le couloir, & le bras L ſous le contre-poids BCD, &c. & la croix reſtera dans la même ſituation, juſqu'à ce que le ſable puiſſe ſoûlever de nouveau le contre-poids BCD, &c. & ainſi de ſuite; de ſorte que le ſable & le contre-poids ſe diſputant mutuellement l'équilibre, il y aura un *repos* plus ou moins long, ſuivant que le contre-poids ſera plus ou moins peſant.

Explication du Contre-poids.

Un des principaux avantages de ce ſablier, eſt, ſans contredit, de pouvoir être *avancé* & *reculé*, de tant & ſi peu que l'on veut, ſans toucher au trou du couloir, qui demeure toûjours le même; & coule toûjours également. Cette facilité vient du contre-poids, qui ſe rend plus *peſant* ou plus *leger*, comme on veut, par le moyen d'un petit quarré qu'on peut tourner avec une clef, à droite, ou à gauche, de la même façon qu'on le pratique dans les montres de poche. En voici la conſtruction.

Il y a une vis DH montée ſur deux ſupports CD, GE, de telle façon qu'elle peut bien tourner en tout ſens ſur ſes deux pivots, D, E, mais non pas avancer ni reculer, ce qui eſt cauſe que l'écroue F (aſſez peſante) avance vers D, ou recule vers E, à meſure que la vis tourne. Cette vis a une tête HI aſſez large, & diviſée en 20 dents, leſquelles engraînent dans une vis ſans fin, que je ne ſçai pas repréſenter ici, mais dont le quarré perce à travers le cadran, entre les 17 & 18 minutes..... Quand on tourne à droite, l'écroue F ſe retire vers EG, & le contre-poids devient plus léger, & plus facile à ſoûlever: il

faut par conséquent moins de sable dans le creuset pour trébucher, & l'aiguille marche plus vîte, quoique le sable coule toûjours également : & quand on tourne à gauche, l'écroue *F* s'avance vers *CD*, le contre-poids devient plus pesant, il faut plus de sable dans le creuset pour pouvoir lever, & le sablier retarde, quoique le sable coule toûjours également.

Il faut remarquer en passant, qu'on peut faire avancer & reculer l'écroue d'un espace *presque infiniment petit* : car comme la tête de la vis *HI* est divisée en 20 dents, & que la vis sans fin n'en fait passer qu'une à chaque tour, il s'ensuit qu'un demi-tour de clef ne fait avancer l'écroue que de la 40me partie d'un filet de la vis, &c.

Explication de la Surprise.

Je l'avouerai ingénûment : je m'étois flatté que le contre-poids de la *Fig.* 8 seroit suffisant pour retenir les creusets dans la situation convenable pour bien agir ; mais je fus fort étonné, lorsque mon sablier étant presque fini, je reconnus le contraire. Le sable qui s'accumule dans le creuset pendant une minute, le fait trébucher avec tant de force, quand une fois il a soûlevé le contre-poids, qu'il faisoit un demi-tour au lieu de ne faire qu'un quart ; il passoit deux bras tout de suite, ou bien il ne restoit pas précisément sous le contre-poids, & pour lors le creuset n'étant pas directement sous le couloir, la machine ne tournoit plus. J'étois trop avancé pour reculer ; il fallut trouver un expédient, & j'en vins à bout : le voici aussi simple que solide.

La piece *ABC*, *Fig.* 9, étant mobile au point *B*, & plus pésante dans sa partie *A* que dans sa partie *C*, se remet d'elle-même dans la situation où elle est actuelle-

ment, sitôt qu'on la laisse à sa liberté. La piece *DEF* représentant *une jambe & un pied*, est mobile au point *E*: elle porte une cheville *F*, qui se trouve engagée dans la fente *FG*, de maniere qu'elle peut couler tout le long, autant que le jeu le demande. Au seul aspect de la figure, on connoît que la piece *ABC* ne peut pas remuer qu'elle ne communique un mouvement contraire à la jambe *DEF*, par la communication de la cheville *F*. Ainsi quand le bras de la croix d'acier part avec force pour trébucher, il rencontre 1°, la partie *C*, qu'il chasse vers *H*, & dans le même tems le pied *D* s'avance vers *I*.... 2°. Le bras ayant achevé de glisser le long de la partie *C*, il rencontre le pied *D* au-dessous, qui s'oppose à son passage, & l'arrête tout court. Mais 3°, dans le même instant la partie *C* qui n'est plus gênée, se remet par son propre poids dans sa premiere situation, & par une suite nécessaire, le pied *D* se retire aussi de-dessous le bras de la croix, & celui-ci trouve le passage libre, comme si rien ne s'y étoit opposé: il ne lui reste que le contre-poids à soûlever, & toutes les fois qu'il échape, le pied *D*, que j'appelle *la surprise*, ne manque pas de l'arrêter au premier instant, & de se retirer tout de suite pour laisser le passage libre.

Explication de la Roue des minutes.

J'ai dit plus haut que je ferois voir le support qui soûtient le pivot *L* de la *Fig. 6*. Ce support est une traverse de fer *LM*, *Fig.* 10, arrêtée solidement avec deux vis dans la boîte ou quadrature *NOPQ*, distante du fond d'environ 4 lignes, pour laisser le jeu nécessaire à la croix d'acier *KC*.... Le pivot *L* qui est le bout de la *baguette de communication*, porte 4 chevilles, lesquelles engrainent dans la roue *RST* de 60 dents; de sorte que le pivot *L* faisant

faisant son tour en 4 minutes, après 15 tours de ce pivot, la roue des minutes aura fait un tour, & par le moyen du contre-poids dont nous avons parlé à la *Fig.* 8, il est facile de la faire aller aussi juste qu'on voudra. L'arbre *R* de la roue *RST* qui passe au-travers du cadran, porte une aiguille qui marque les minutes, sautant tout-à-coup de l'une à l'autre, à mesure que le creuset trébuche.

PREMIERE OBSERVATION.

Comme on pourroit s'imaginer que le peu de force qu'il faut pour mener cette roue, pourroit cependant en certaines occasions retenir le creuset plus long-tems qu'il ne faut, & causer du dérangement, il est bon de faire remarquer que les chevilles du pivot *L* n'agissent sur les dents *S* de la roue, que lorsque le creuset a déja trébuché en partie, & qu'il est dans toute la force de *sa chûte*, & par conséquent cette roue ne peut porter aucun obstacle à la liberté que doivent avoir les creusets.

II. OBSERVATION.

Outre que cette roue est fort libre, j'ai eu attention de faire une aiguille, laquelle quoique grossiere, ne pese pas plus d'un côté que de l'autre.... Enfin sous la queue de cette aiguille, il y a une cheville, qui, à chaque tour, fait passer une *dent* d'une étoile de 24, laquelle porte les heures, & les laisse voir à travers une ouverture quarrée qui est au bas.



Réflexions sur la justesse qu'on peut se promettre d'un pareil Sablier, exécuté par un habile Ouvrier.

Le modele que j'ai fait de ce sablier, suivant toutes ses proportions, & qui sera présenté à l'Académie, ainsi que celui de l'autre instrument, auquel je travaille sans relâche: ce sablier, dis-je, n'est pas exécuté, à beaucoup près, avec toute la justesse dont il est susceptible. 1°. Parce que la premiere exécution d'une nouveauté est toûjours fort imparfaite, mais *inventis addere facile est.* 2°. Parce qu'il y a peu de pieces qui n'ayent été retouchées deux ou trois fois, suivant les inconvéniens que je trouvois en chemin; & quand il s'agissoit de pieces principales, j'ai fait servir les mêmes, pour ne pas multiplier la dépense, qui est déja assez considérable, eû égard à l'incertitude du dédommagement. 3°. Parce qu'à l'exception des pieces de forge, & du boisage, j'ai généralement fait tout le reste par la lime, vis en fer, vis en bois, pieces en fer-blanc, &c. Cette voie m'a paru la plus praticable, soit par la difficulté qu'il y a de se faire bien entendre des ouvriers, soit par la crainte d'exposer trop son secret, soit enfin pour diminuer la dépense; & l'on sent bien que je ne dois pas avoir la dextérité d'un ouvrier qui travaille d'habitude. Par exemple, les deux pivots sur lesquels roule la croix des creusets, ont plus d'une ligne de diametre, tandis qu'un bon ouvrier, en les passant sur le tour (ce que je n'ai pas fait), ne leur auroit pas donné demi-ligne, & qu'ils seroient par-là beaucoup plus libres, & ainsi de tout le reste. Cependant, malgré toutes ces imperfections, ce sablier égale la justesse de nos pendules à ressort.

I. *Réflexion.* Si l'on met dans ce sablier la quantité de sable nécessaire pour couler au-delà de 24 heures, que ce

fable foit d'ailleurs homogene, & paffé par le crible des fabliers ordinaires, il eft plus que probable qu'il coulera toûjours par le couloir d'une maniere égale : car 1°, le trou eft fort grand, puifqu'il délivre 25 onces par heure poids de marc. 2°. Il eft fait en entonnoir, & cela ôte toute idée du féjour de certains gros grains, qui pourroient en boucher une partie. 3°. Le tamis qui eft au-deffus, arrête tout ce qui pourroit mettre obftacle à l'uniformité du coulage. 4°. Le paffage de l'air ne fait point ici la même réfiftance que dans les fabliers ordinaires; car dans ceux-ci, l'air & le fable fe difputent mutuellement le paffage, & lorfque l'air eft plus ou moins épais, il en doit réfulter une différence : mais dans le fablier que je propofe, l'air n'a rien à démêler, pour ainfi dire, avec le fable, parce qu'il a une libre communication, comme on le verra dans le modele, & comme on le conçoit à la *Fig.* 3, où le couloir eft environné d'air de tout côté. C'eft pour cette raifon que dans mon fablier, le fable forme un filet uni comme un filet d'eau, tandis que dans les fabliers ordinaires, ce filet eft continuellement & vifiblement interrompu par le paffage de l'air. 5°. Le fable eft toûjours à une même élévation au-deffus du couloir, lequel eft toûjours également fourni. 6°. Quand l'humidité colleroit enfemble plufieurs grains de fable, ils refteroient fur le tamis, & le refte couleroit toûjours.

II. *Réflexion.* Si le fable coule uniformément, les creufets trébucheront uniformément; c'eft-à-dire, que les 4 enfemble feront leur tour dans une égale durée : car il y a dans mon modele 2 ou 3 fecondes de différence d'un creufet à l'autre (ce qui provient de la mauvaife exécution), mais cela fe retrouve dans le tour entier, & cela fuffit pour la jufteffe en général. Une habile main évitera facilement ce défaut dans un autre fablier, en obfervant

mieux les proportions, que je n'ai pû le faire moi-même.

III. *Réflexion.* Quoique la longue defcription que je viens de faire, préfente une grande quantité de pieces, qui forment en apparence une machine fort compofée, il faut faire attention que toutes ces pieces font fixes, à l'exception de la principale, qui eft la piece des creufets; c'eft la feule dont les pivots pourront s'ufer par la fuite, mais il faudra bien du tems, car la réfiftance eft peu de chofe : à l'égard des pieces qui font dans la quadrature, outre qu'il y en a peu, on fçait bien que nos horloges à roüage ne manquent gueres par-là, parce que la lenteur du mouvement & la façon *inverfe* dont ces pieces agiffent, contribuent également à leur durée.... La piece des creufets, qui doit être regardée tout-à-la-fois, comme le *premier & dernier mobile*, n'eft pas à beaucoup près fi fatiguée que le dernier mobile des pieces à roüage. Ainfi ce fablier une fois bien réglé, doit fe foûtenir beaucoup plus long-tems qu'une piece à roüage.

IV. *Réflexion.* La propriété qu'a ce fablier, de marquer même pendant le tems qu'on le retourne, eft un avantage pour la jufteffe qui doit faire plaifir, & fa durée pendant un jour entier eft encore bien eftimable.

V. *Réflexion.* La maniere dont ce fablier marque les minutes, a quelque chofe de plus précis que celle d'une pendule ordinaire, par le bruit qui fe fait à chaque minute, lequel s'entend très-diftinctement, & détermine précifément *la fin de la minute & le commencement de l'autre*; au lieu qu'on eft toûjours incertain, fur les cadrans ordinaires, du véritable inftant où commence & finit chaque minute.

VI. *Réflexion.* Les agitations du vaiffeau ne fçauroient caufer le moindre dérangement à mon fablier, parce qu'il eft fort pefant & bien fufpendu : tout balance à la

fois, & rien ne se dérange. C'est ainsi que certaines personnes adroites, mettent un verre plein d'eau dans un cerceau qu'elles tiennent à la main, elles l'agitent peu à peu, le font ensuite tourner entierement sens-dessus-dessous, & l'eau qui est dans le verre ne se répand pas, quoique le verre se trouve en passant dans une situation tout-à-fait renversée. J'ai souvent fait balancer mon sablier par des vibrations de plus de deux pieds, qui duroient plus d'un quart-d'heure, sans que cela ait rien changé à la justesse.

REMARQUE.

Il faut observer en passant, que si l'on retournoit le sablier dans le tems que le creuset va trébucher, on le feroit trébucher plutôt; c'est pourquoi on ne doit le tourner qu'après que la minute a frappé, car pour-lors il n'y a rien à craindre, quelques secousses qu'on lui donne. On en doit faire de même pour avancer ou reculer, quand on tournera avec la clef le quarré du contre-poids, observant toûjours que ce soit dans le commencement de la minute, & non sur la fin.

Derniere Réflexion. Quand j'ai fait mon sablier de plus de 24 heures, ç'a été dans le dessein que si je ne méritois pas le Prix, cette Piece pût servir à quelque particulier, & que mon déboursé pût me revenir, & un particulier ne voudroit pas d'un sablier qu'il faudroit tourner deux fois par jour: mais comme dans un vaisseau on a des personnes attentives pour veiller à ces sortes de choses, si l'on réduisoit ce sablier à 13 ou 14 heures, en laissant subsister la même quantité de sable, il couleroit la moitié plus gros; l'aiguille feroit deux tours par heure, chaque minute du cadran deviendroit une demi-minute, & ce sablier seroit totalement à l'abri de toute sorte d'arrêt &

d'inégalité de coulage. Le poids du ſable détermineroit plus ſubitement la chûte de chaque creuſet, & je penſe que la juſteſſe ſeroit plus aſſûrée : il ne faudroit pour cela qu'un ſecond couloir, qu'on mettroit à la place de l'autre. Si j'ai du tems, j'en ferai l'épreuve.

Si de tels commencemens peuvent mériter l'attention de mes Juges, il y a tout lieu d'eſpérer que cette Piece ſera un jour portée à la perfection qu'on peut déſirer pour le ſervice de la marine.



SECONDE PARTIE.

SUIVANT la premiere Partie de ce Mémoire, je viens d'exécuter en grand ce qui ne se fait ordinairement qu'en petit volume : & dans cette seconde Partie, je vais donner les moyens de réduire en petit volume (& sans diminuer les proportions), une chose qui paroît ne pouvoir être exécutée qu'en trés-grand volume.

I. PROBLEME.

Trouver le moyen de faire un Cadran Solaire équinoctial & universel, dans un cercle de 29 pouces de diametre, *marquant* 1°, *les heures.* 2°. *Les minutes une à une.* 3°. *Les secondes de* 5 *en* 5 *très-distinctement, de sorte que l'image du Soleil parcoure réellement & visiblement* $2\frac{1}{2}$ *pouces par minute, ou* $2\frac{1}{2}$ *lignes par* 5 *secondes, ce qui, suivant les proportions ordinaires, ne paroît pouvoir s'exécuter que sur un cercle de* 100 *pieds de diametre.*

Comme cette proposition paroît impossible & chimérique, je crois devoir avertir en passant, que je ne suis pas novice dans la théorie & dans la pratique de toute sorte de cadrans solaires ; ainsi l'on peut suspendre son jugement jusqu'aux preuves, & si je ne me fais pas assez bien entendre, il y sera suppléé par le modele que je fais exécuter, & qui partira avec celui du sablier.

DESCRIPTION.

C'est à la *réfraction* & à la *réflexion* des rayons du

Soleil, qui font connues de tout le monde, que je dois l'idée de ce cadran, lequel, à ce que je crois, n'eft encore connu de perfonne; car fuppofé qu'une pareille idée fût venue à quelqu'un avant moi (ce que j'ignore), il feroit moralement impoffible que nous nous fuffions entierement rencontrés dans l'exécution.

La principale piece de ce cadran, eft une boîte quarré-longue *ABCD*, &c. *Fig.* 11, formant une efpece de *chambre obfcure*, de 22 pouces de long *AC*; de 12 pouces de large *AB*, & de 8 pouces de hauteur *AG*. Le dedans eft tout peint en noir, à l'exception du fond *DCH*, qui eft blanc, & le dehors eft tout verd, pour la propreté feulement. Il n'y a d'autre ouverture que celle marquée *EF*, d'environ deux pouces de largeur, pour pouvoir obferver les minutes & les fecondes; car pour les heures on les voit ailleurs.

Pour abréger l'explication, j'appellerai cette chambre obfcure la *chambre* tout court. Le fond d'en bas fera *CHLD*; l'oppofé *BAG* fera celui d'en-haut. *ABDC* s'appellera le deffus; le deffous *GHL*, & les côtés feront *GIEH*, & *KFDL*. La chambre eft foûtenue fur deux pivots *I*, *K*, placés au milieu des deux côtés; fur lefquels elle peut tourner à volonté du Sud au Nord, & du Nord au Sud.

L'intérieur de la Chambre obfcure.

La *Fig.* 12 repréfente la *Chambre* couchée fur une table, n'ayant ni le deffus, ni les côtés, mais feulement le deffous *LMN*, avec les deux fonds, dont *NP* eft le fond d'en-bas, & *OM* le fond d'en-haut.... *QR* eft une lunette d'*approche* ou de *longue-vûe*, d'un pied de long. L'objectif *Q* eft tourné vers le Soleil-levant *S*, que nous fuppoferons au véritable équinoxe, car ce jour-là, à 6 heures précifes,

cises, la chambre doit être dans la situation de la *Fig.* 12; l'oculaire par conséquent de la lunette, est tourné vers le fond d'en-bas *NP*.

1°. Le rayon *RT*, après avoir souffert plusieurs réfractions dans la lunette, rencontre une petite glace de miroir *TN*, de deux pouces de large, & un peu inclinée, pour que le rayon ne retourne pas dans la lunette. 2°. La glace *TN* renvoie ce rayon sur une seconde glace *VY*, attachée au fond d'en-haut, & plus large au double que celle d'en-bas. 3°. Enfin, la glace *VY*, réfléchit ce même rayon sur le fond d'en-bas à l'endroit *Z*, où l'image du Soleil marque, par son mouvement, les minutes & les secondes, comme nous l'expliquerons plus bas.

Il faudroit absolument voir l'effet que produit *cette lunette avec ces deux miroirs* pour pouvoir s'en former une idée. L'image du Soleil, qui n'a gueres que 6 lignes de diametre au point *T*, en a près de 30 au point *VY*, & 5 pouces au point *Z*. Son mouvement de *trépidation* imite celui qu'on voit dans les grandes Eglises, quand les rayons percent à-travers un trou de vitre, & elle parcourt ici $2\frac{1}{2}$ pouces par minute.

La *Fig.* 13 est une répétition de la 12, présentée dans un autre sens. Dans la *Fig.* 12, j'ai représenté les choses *en profil*, & dans la 13 je les présente *de face*; & comme le dessous de la chambre étant présenté de face, les deux fonds d'en-haut & d'en-bas seroient vûs en profil, & que je ne pourrois pas désigner les figures qui y sont tracées; j'ai pris le parti d'*applatir* ces deux fonds, pour les mettre dans un même plan avec le dessous de la chambre. Ainsi *MN* est le dessous de la chambre, *NP* est le fond d'en-bas *applati*, & *OM* est le fond d'en-haut aussi applati, comme s'il y avoit des charnieres aux jointures *M* & *N*.

Reprenons maintenant chaque chose en particulier.

Dans cette *Fig.* 13 *QR* eſt la lunette arrêtée ſolidement au-milieu du *deſſous* de la chambre, à 4 ou 5 lignes d'élévation parallele... *T* eſt le premier miroir, *VY* eſt le ſecond miroir... *R* 1 2 3 *Y* 4 5 6, & *R* 7 8 9, *V* 10 11 12, ſont deux rayons extrêmes, entre leſquels il faut en imaginer une infinité d'autres qui ſe ſuccedent; ou bien, ſi l'on veut, on peut s'imaginer que le premier & le ſecond ſont les mêmes, qui ne different entre eux que par la poſition locale, & pour-lors il faudra s'imaginer que depuis *AB* juſqu'à *CP*, ils ont paſſé ſucceſſivement par tous les points imaginables.

I. *Suppoſition.* Je ſuppoſe que la longueur *AP* eſt de 12 pouces & demi, quoiqu'elle ne ſoit réellement que de 12 pouces. J'expliquerai plus bas ce que devient ce demi-pouce ſuppoſé.

II. *Suppoſition.* Je ſuppoſe que l'image du Soleil *S* parcourt $2\frac{1}{2}$ pouces par minute. Cette ſuppoſition eſt d'autant plus admiſſible, qu'il ne s'agit que d'*allonger* ou *raccourcir* la chambre, pour avoir cette proportion à ſouhait.

III. *Suppoſition.* Je ſuppoſe l'eſpace *AP* partagé en 5 parties égales de $2\frac{1}{2}$ pouces chacune, qui feront 5 minutes, & chaque partie en 12 autres de $2\frac{1}{2}$ lignes, qui marqueront les ſecondes de 5 en 5.

IV. *Suppoſition.* Je ſuppoſe que la chambre étant bien placée, l'image du Soleil, qui eſt d'environ 5 pouces de diametre, remplira ſucceſſivement tout l'eſpace renfermé entre les deux bornes *AP*, *CB*; & que pour peu que cette poſition de la chambre ſoit changée, l'image du Soleil franchira l'une ou l'autre des deux bornes, & cette image paroîtra tronquée.

V. *Suppoſition.* Parmi une infinité de rayons qui peignent l'image du Soleil, je n'en prends qu'un de ceux qui peignent le limbe *antérieur*.

VI. *Suppoſition.* Je ſuppoſe qu'il eſt préciſément 11 heures 55 minutes, & que la chambre étant bien placée, le rayon *R* 1 2 3 *Y* 4 5 6 arrive au point 6.

PREMIERE OPERATION.

Suivant cette derniere ſuppoſition, à 11 heures 55 minutes, l'image du Soleil étant totalement hors de la chambre, le limbe antérieur commencera à ſe montrer au point 6, & s'avançant ſucceſſivement, ce même limbe marquera en paſſant les ſecondes de 5 en 5, & les minutes 1 à 1... Il eſt certain, ſuivant la deuxieme ſuppoſition, qu'à midi précis, le limbe antérieur arrivera au point 5 12 5, (l'image du Soleil étant alors toute entiere dans la chambre obſcure.

PREMIER COROLLAIRE.

Nous venons de voir l'opération de ce cadran pendant 5 minutes d'heure, il n'eſt plus queſtion que de trouver un moyen ſûr de répéter la même opération toutes les fois qu'on voudra, par des *obſervations ſuivies ou non ſuivies*, de 5 minutes chacune, pendant tout le tems que le Soleil ſera ſur l'horiſon.

Pour rendre cela praticable, il faut ajoûter à la *chambre obſcure APMQR*, de la 14e *Fig.*, un cercle *BCD*, qui repréſentera l'équateur. Ce cercle ſera partagé en 24 parties égales, qui répondront aux 24 heures du jour, chacune de 15 degrés. Il faut faire dans les 24 diviſions autant de coches égales, & tracées avec préciſion... Il faut encore ſoûdiviſer ces 24 parties en 12 parties chacune, pour les minutes de 5 en 5, & y faire de ſemblables coches, avec la même juſteſſe. La petiteſſe de la figu-

re ne me permet pas de tracer ici toutes ces coches, qui sont au nombre de 288 sur toute la circonférence.

L'espace d'une coche à l'autre tant plein que vuide, vaudra 1 degré 15 minutes, qui est la portion de l'équateur que le Soleil parcourt dans 5 minutes d'heure... Au-dessus de l'équateur, doit être une piece coudée *EF*, mobile au point *F*, dont le talon *E* remplira exactement le vuide de chaque coche.

Sur le plat de l'équateur, j'ai marqué les 24 heures en chifres *Romains*, dans un ordre renversé; & de 3 en 3 coches, il y a ces nombres marqués, 15, 30, 45, qui signifient les minutes pour le *quart*, la *demie*, & les *trois quarts* de l'heure. Les 60 ne se marquent pas, parce que le chifre Romain y supplée : je ne marque pas non plus les chifres intermédiaires, 5, 10, 20, 25, &c. parce que la chose n'est pas nécessaire.

II. OPERATION.

Pour l'intelligence de ce que j'ai à dire, il faut reprendre la chose où nous l'avons quittée dans la premiere opération. Nous avons vû qu'à 11 heures 55 minutes, le Soleil étoit au point *A*, *hors de la chambre*, & à midi précis au point *P*, *dans la chambre*. Je dis au point *A* & au point *P*, parce que j'ai employé dans cette 14e *Fig.* les mêmes lettres qui servoient dans la 13e pour plus grande facilité.

Si, après avoir vû arriver le limbe antérieur du Soleil au point *P* (qui faisoit midi précis), nous faisons tourner le cercle *BCD* de la valeur d'une coche, ou de la 288e partie du cercle, & que nous mettions le talon *E* dans cette seconde coche *D*, il arrivera 1°, que la chambre *APMQR*, qui est attachée sur l'équateur, aura aussi tour-

né de la valeur d'une coche, qui eſt 1 degré 15 minutes de l'équateur, ou 5 minutes d'heure. 2°. Puiſque l'eſpace *AP* eſt de 5 minutes d'heure, ſuivant la troiſieme ſuppoſition, le cercle de l'équateur ayant *devancé* la marche du Soleil de la valeur de 5 minutes d'heure, le rayon du Soleil aura *reculé* d'autant, & au lieu de ſe trouver en *P*, où il étoit arrivé, il ſe retrouvera en *A* comme dans la premiere opération, & continuera ſa marche de *A* vers *P* pendant 5 minutes d'heure, de ſorte que quand le rayon ſera arrivé préciſément en *P*, il ſera préciſément midi & 5 minutes.

III. OPERATION.

Devançons encore la marche du Soleil, en mettant le talon *E* dans une troiſieme coche *G*; le rayon ſe retrouvera encore au point *A*, d'où il marchera vers le point *P* pendant 5 autres minutes, & lorſqu'il y ſera arrivé, il ſera midi & 10 minutes.... On pourra continuer de devancer la marche du Soleil, de 5 en 5 minutes, en mettant ſucceſſivement le talon *E* dans les coches *H*, *I*, & ainſi de ſuite, auſſi long-tems qu'on aura envie d'obſerver le Soleil.

PREMIERE OBSERVATION.

Je ſuppoſe toûjours que c'eſt le jour des équinoxes, auquel jour la chambre peut être conſidérée comme étant dans le plan de l'équateur. Nous parlerons plus bas des moyens de ſuivre la déclinaiſon du Soleil.

II. OBSERVATION.

Je ne crois pas qu'il ſoit beſoin de prouver que chaque coche de l'équateur fait revenir le rayon au point *A* préciſément ; car, puiſque nous ſuppoſons d'un côté que le rayon parcourt l'eſpace *AP* dans 5 *minutes d'heure*, & que de l'autre côté, nous ſçavons que le Soleil parcourt 1 degré 15 minutes dans 5 *minutes d'heure*, il eſt clair que ces deux eſpaces *équivalent l'un à l'autre*, & par conſéquent, l'on ne peut pas faire avancer l'équateur d'une coche, ſans faire rétrograder le Soleil de tout l'eſpace *PA*... Si cependant cela paroiſſoit douteux, faute d'explication de ma part, on peut s'en rapporter aux expérienriences que j'en ai faites, en attendant que le modele le faſſe voir clairement.

III. OBSERVATION.

Il n'eſt pas néceſſaire, pour la juſteſſe de l'obſervation, de changer la coche préciſément au moment que le rayon eſt arrivé en *P*: on peut le faire à ſon aiſe, ſans ſe preſſer, & ſans qu'il puiſſe en arriver la moindre erreur, parce que le Soleil fait toûjours ſon chemin; & au lieu que le rayon ſe ſeroit trouvé préciſément en *A*, ſi l'on avoit changé la coche ſans aucune perte de tems, le même rayon ſe trouvera d'autant plus avancé ſur la marche de *A* vers *P*, que l'on aura mis plus de tems à changer la coche, marquant toûjours avec la même juſteſſe ſur les diviſions des minutes.

Il en ſeroit de même ſi l'on changeoit la coche avant que le rayon fût arrivé en *P* ; il ſeroit quelque tems ſans ſe montrer en *A*, après quoi il y paroîtroit au moment

précis qu'il auroit dû y paroître, si l'on avoit changé la coche dans l'instant précis.

IV. OBSERVATION.

C'est pour cette raison que le demi-pouce qui manque à la largeur *AP*, suivant la premiere supposition, ne cause aucune erreur, parce que ce demi-pouce est censé hors de la chambre; il faut seulement commencer les divisions des 5 minutes au point *P*, donnant à chacune 2 $\frac{1}{2}$ pouces, & la derniere du côté *A*, se trouvera plus petite d'un demi-pouce, qui sera censé hors de la chambre, & pour la perte du tems qu'on met à changer la coche.

V. OBSERVATION.

C'est à présent qu'on conçoit comment l'image du Soleil peut parcourir un espace de 150 pieds en 12 heures de tems, ou 12 pieds & demi en une heure de tems, dans un cercle qui n'a que 29 pouces de diametre : c'est en répétant souvent sa marche sur le même espace. Deux moyens concourent à cela : l'un est la *réfraction* & *réflexion* des rayons qui grossissent les intervalles de la marche du Soleil, & l'autre est cette maniere aisée de *devancer* la marche du Soleil, pour lui présenter 12 fois par heure le même espace à parcourir.

VI. OBSERVATION.

Ce Cadran, qui n'est encore décrit qu'en partie, est d'un usage immanquable sur terre, & chacun peut se donner sur la plus petite terrasse un *Observatoire raccourci*, qui, à cet égard, équivaudra à la méridienne de l'Observatoire même de Paris, ou de S. Sulpice, avec cette différence que la chambre obscure marquera toutes les heures du jour : car si l'on donnoit seulement 3 pieds à la chambre

obſcure, ou ſi l'on y employoit une meilleure lunette, on auroit une image beaucoup plus grande, & qui parcourroit de beaucoup plus grands eſpaces.

VII. OBSERVATION.

Dans tout ce que je viens de dire juſqu'ici, je ſuppoſe un équateur dont les poles ſoient fixes ſur terre, & l'on ne peut me faire d'autre difficulté, que l'inégalité qui pourroit ſe trouver dans les diviſions de cet équateur : mais la choſe n'eſt pas impoſſible, diſons même ſi difficile, ſurtout aux habiles ouvriers ; & quand une fois cet équateur ſera bien diviſé, il ne peut plus arriver de dérangement; s'il eſt bon un jour, il ſera bon toûjours. Nous verrons de quelle façon je compte pouvoir l'employer ſur mer.

De la déclinaiſon du Soleil.

Pour que ce Cadran puiſſe ſervir toute l'année, il faut que la *chambre obſcure* puiſſe imiter les deux mouvemens du Soleil. Elle imite ſon mouvement diurne, en ſuivant le mouvement de l'équateur à meſure qu'on *change les coches*, & par-là elle tourne, comme cet équateur, ſur les poles du monde. Il faut encore qu'elle imite ſon mouvement annuel, & pour cela il faut qu'elle ait deux autres poles aux deux points de *6 heures*, c'eſt-à-dire, au véritable *levant* & véritable *couchant.*

La *Fig.* 14 nous ſervira encore pour expliquer une partie de ce ſecond mouvement. A côté de la chambre *APMQR*, vous voyez deux traverſes *KL*, *NO*, qui ſont arrêtées avec des vis ſur le cercle de l'équateur... Au milieu de ces deux traverſes il y a deux autres vis *S*, *T*, qui ſoûtiennent la chambre *APMQR*, & lui ſervent de poles;

les ; en ſorte que cette chambre roulant ſur ces deux vis, peut faire un angle avec le plan de l'équateur (tant vers le Sud que vers le Nord), de la même quantité de degrés que la plus grande déclinaiſon du Soleil.

ADBC, *Fig.* 15, repréſente le profil de la chambre obſcure : elle eſt mobile du Nord au Sud, & du Sud au Nord au point *I*, qui eſt ſon centre. *CD* repréſente le plan de l'équateur, que je ſuppoſe dans une élévation de 45 degrés... *F*, *E* ſont les deux poles de l'équateur; *F* eſt le pole Méridional, & *E* le pole Boréal... Sur le haut de la chambre *AD*, eſt fixé un arc de Méridien *GADH*, de 47 degrés, pour la déclinaiſon du Soleil vers l'un & l'autre pole. Cet arc, dont le diametre eſt d'environ 22 pouces, eſt diviſé en 23 degrés de chaque côté, avec une coche à chaque diviſion.

Voilà de quoi ſuivre la déclinaiſon du Soleil degré à degré ; mais comme cette déclinaiſon n'augmente pas, ni ne diminue pas préciſément d'un degré par jour, il faut encore pouvoir partager chaque degré en 60 parties, afin de pouvoir imiter parfaitement la déclinaiſon du Soleil minute à minute, telle qu'elle eſt marquée dans les Tables dreſſées par les Aſtronomes.

Chaque degré de l'arc *GADH*, n'étant que d'environ $2\frac{1}{4}$ lignes, il feroit impoſſible de le diviſer en 60 parties ſenſibles : cependant, comme la chambre obſcure groſſit les objets, & qu'une très-petite partie du méridien produit un changement ſenſible dans cette chambre, il faut uſer d'expédient pour rendre cette diviſion ſûre & ſenſible tout-à-la-fois.



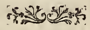
Minutes de degrés pour la déclinaison du Soleil.

La *Fig.* 16 ne differe de la 15 que par quelques additions qu'il faut expliquer séparément. La premiere addition est la piece *NPOQR*, qui sert pour marquer les minutes de la déclinaison du Soleil. Cette piece est mobile au point *P*, où elle tient par une vis qui lui sert de centre. Depuis le centre *P* jusques en *O*, elle a 15 lignes; & depuis le même centre *P* jusques à l'arc *QR*, elle a 18 pouces 9 lignes, sa longueur totale étant d'environ 20 pouces. Il y a au point *O* une cheville par-dessous, qui entre dans les coches de l'arc *GADH*, & en remplit exactement la largeur... A-travers l'arc *QNR*, qui ne fait qu'une même piece avec *NPO*, à-travers, dis-je, l'arc *QNR*, on voit une ouverture *QR*, d'environ 30 lignes de long. Dans cette ouverture est une vis fixe *N* (servant d'*index*), laquelle, ainsi que la vis *P*, est arrêtée sur la traverse *LM*, dont nous parlerons bien-tôt. Le long de l'ouverture *QR*, sont marquées 30 divisions, un peu inégales sur les extrémités, dont chacune vaut 2 minutes de degré, avec une suite de chifres qui commencent en *R*, & finissent en *Q*.

La deuxieme addition consiste dans les deux traverses *EF*, *LM*, qui forment une croix, à laquelle répond une autre croix pareille qu'il faut imaginer *cachée* derriere celle-là. Ces deux croix sont à environ 9 pouces de distance l'une de l'autre, ayant entre deux la chambre obscure *ADCB*, à laquelle elles servent de support. La traverse *LM* est la même que vous voyez en *NO*, *Fig.* 14... Cette traverse *LM*, & celle qui lui répond, soûtiennent l'équateur, dont le plan est ici caché sous la même traverse; & la traverse *EF*, avec celle qui lui répond, servent de po-

les au même équateur. Elles sont liées par les deux bouts, comme vous voyez à la *Fig.* 17, ayant au milieu deux tenons *E*, *F*, qui servent de poles à l'équateur.... Dans la même *Fig.* 17, le cercle ponctué *LMTS*, représente l'équateur, & l'autre ponctué *EBFC*, représente le méridien.

La troisieme addition est le cercle *LEMF*, *Fig.* 16, qui est le méridien divisé en 360 parties, avec un petit trou de deux en deux divisions, dont je n'ai marqué ici que quelques-unes, par rapport à la petitesse de la figure. Ce méridien (qui n'est pas encore fait) sera composé de deux cercles égaux, arrêtés parallelement l'un à côté de l'autre, à une distance d'environ 8 degrés, affermis d'ailleurs par des traverses d'espace en espace. Cette précaution m'a paru nécessaire, parce que s'il n'y avoit qu'un cercle pour le méridien, son épaisseur intercepteroit les rayons du Soleil tous les jours précisément à midi, en sorte que l'heure du jour la plus remarquable, seroit celle qu'on ne trouveroit jamais sur ce cadran : mais au moyen de deux méridiens paralleles, distans de 8 degrés, la lunette se trouvera entre deux, & marquera un quart-d'heure *avant*, & un quart-d'heure *après* midi, sans interruption. Les deux méridiens intercepteront les rayons, le premier un peu après 11 heures & demie, & le second un peu avant midi & demi, & tout le reste du jour sera à découvert, comme on peut voir, *Fig.* 14, où les deux méridiens sont ponctués en *vx*, *yz*.



Minutes de degrés pour le Méridien.

Pour rendre ce cadran univerſel, il faut pouvoir le ſuſpendre 1°, par chaque degré du méridien. 2°. Non-ſeulement par chaque degré, mais encore par chaque minute de degré. Le premier cas eſt facile, parce que chaque degré ayant un peu plus de 3 lignes de large, on peut percer un trou à chaque diviſion, & par le moyen de ces trous, on le ſuſpendra par le degré que l'on voudra. A l'égard du ſecond, la choſe n'eſt pas ſi aiſée, eu égard à la petiteſſe de l'inſtrument. Je crois avoir trouvé deux moyens de le faire; je vais les expliquer ſéparément, & je me déterminerai dans la ſuite pour celui qui ſera le plus facile à exécuter.

Le premier que j'ai imaginé, conſiſte dans une piece de fer *ABCDE*, *Fig.* 18. Les deux trous *A*, *B*, ſont percés à la diſtance préciſe de trois degrés du méridien, & peuvent être changés d'un degré à l'autre, au moyen de deux chevilles qui paſſeront par les trous *A*, *B*, & par ceux du méridien... *CD* eſt une vis ſans fin, aſſujettie dans les deux côtés *AD*, *BC*, en ſorte qu'elle peut tourner ſans avancer ni reculer. Chaque filet de cette vis doit avoir l'épaiſſeur préciſe d'un degré du méridien, & l'anſe *E* doit avoir un trou *fileté*, & proportionné à la vis *CD*... La tête *C* de la vis *CD*, doit être faite en forme d'*index*, pour marquer les minutes ſur un petit cadran, que je ſuppoſe tracé ſur le côté du ſupport *BC*; de cette façon, la vis *CD* faiſant un tour entier, fera avancer ou reculer l'anſe *E*, de la valeur d'un degré du méridien, & l'*index C* en marquera chaque minute ſur le petit cadran dont je viens de parler.

L'autre moyen eſt une plaque de fer *FGHK*, *Fig.* 19;

de 8 ou 10 pouces de longueur, plus ou moins, à volonté, ſur laquelle on marquera les minutes 2 à 2, ou 1 à 1, à proportion de la longueur qu'on donnera à la plaque. Il y aura en bas deux trous *F*, *G*, qui comprendront exactement deux degrés du méridien. Sur cette plaque, on prolongera les diviſions des degrés, depuis *F* juſques en *H*; depuis *L* juſques en *I*, & depuis *G* juſques en *K*.... On tirera en ſuite deux lignes tranſverſales, depuis *F* juſques en *I*, & depuis *L* juſques en *K*... Si l'on partage ces deux lignes en 30 parties égales, où l'on percera autant de trous, chacune vaudra deux minutes; & ſi on les partage en 60, chacune ne vaudra qu'une minute. L'inſtrument ſuſpendu par le trou *I*, par exemple, ſera dans la même ſituation que s'il étoit ſuſpendu par le trou *L*, qui eſt le degré complet; & chaque trou entre-deux, produira une ſuſpenſion proportionnée au nombre de minutes qui ſeront écrites à côté.

Uſage de cet Inſtrument ſur Terre.

Il faut commencer par les opérations faciles, & nous viendrons en ſuite aux plus difficiles. Je m'étendrai beaucoup ſur cette premiere application de l'inſtrument, parce que la plûpart des choſes ſerviront pour les explications ſuivantes.



PREMIER PROBLEME.

Connoissant la hauteur du pole & la déclinaison du Soleil, connoître l'heure qu'il est par Minutes & Secondes.

Supposons que nous sommes à l'élévation de 45 degrés, & au 6 Juin 1746 (deuxieme année après les Bissextes), auquel jour la déclinaison du Soleil est marquée de 22 *degrés* 40 *minutes*. Choisissons la 16[e] *Fig.* 1°. Je mets l'anse *K* au 45[e] degré du méridien, car l'instrument étant suspendu par cet endroit, le pole *E* sera élevé de 45 degrés au-dessus de l'horison. 2°. Je prends sur l'arc *GADH*, la coche du 22[e] degré, & j'y mets la cheville *O*, de la piece *OPQNR*. 3°. Prenant l'arc *QNR* avec la main, je le pousse à gauche, jusqu'à ce que l'extrémité *R* (qui est zéro) touche la vis *N*; & dans cet état, la piece *OPQNR* marquera 22 degrés précisément : & comme la déclinaison du 6 Juin est de 22 degrés 40 minutes, je retire à droite l'arc *QNR*, jusqu'à ce que la vis *N* se trouve vis-à-vis de 40 *minutes*; après quoi je serre la vis, pour que l'arc ne remue plus. Voilà l'instrument réglé pour marquer pendant tout le jour 6 Juin 1746. 4°. Que ce soit sur une terrasse, dans une basse-cour, ou à la campagne, il faut avoir un point d'appui pour suspendre l'instrument. 5°. L'instrument étant suspendu, il faut l'orienter d'une maniere approchante. Je dirai plus bas ce qu'il faudroit faire, si l'on ne sçavoit pas de quel côté est le midi approchant. 6°. Quittons la *Fig.* 16 pour prendre la 14. Je suppose que l'équateur *CBD* est à peu près bien pour ce qui regarde les 4 points cardinaux du monde, sans sçavoir toutefois si cette situation de l'instrument décline vers le Levant ou le Couchant. 7°. Comme on

ne peut pas connoître les petites parties de l'heure, sans connoître l'heure courante, il faut avoir recours au *guide*, dont j'ai différé l'explication jusqu'ici.

Explication du Guide.

Le Soleil parcourt de si grands espaces dans ce petit cadran, que pour peu que l'instrument sorte de sa véritable position, les rayons du Soleil n'entrent plus dans la chambre obscure. Il faudroit souvent tâtonner l'espace de plusieurs minutes, sans pouvoir rencontrer le point de les y introduire. C'est pour cette raison que j'y ai pratiqué un *guide* pour la prompte exécution... Ce *guide* est un petit trou &, *Fig.* 13, qui répond au *circuit ponctué Z*, *même Fig.* L'image du Soleil qui passe à-travers ce trou, est bien différente de celle qui passe par la lunette. Comme elle est beaucoup plus petite, elle est aussi beaucoup plus tranquille, & un écart de plusieurs degrés, n'est pas capable de la faire sortir du fond *CBPA*.

Usage du Guide.

L'Equateur *CDB*, *Fig.* 14, étant orienté, comme j'ai dit, d'une maniere approchante, il faut d'une main tenir l'arrêt *EF élevé*, & de l'autre faire tourner l'équateur, jusqu'à ce que l'image & rentre dans le circuit *Z*, *Fig.* 13; & dès-lors la grande image du Soleil paroîtra infailliblement dans la chambre obscure, & marquera la minute courante. Reste à sçavoir à quelle heure appartiendra cette minute, ce que nous connoîtrons par la coche ou se trouvera le talon *E* de l'arrêt *EF*... Chaque heure ayant 12 coches, celle qui sépare une heure d'avec l'autre, est tout-à-la-fois la fin de l'heure précédente, & le

commencement de la fuivante ; la deuxieme coche vaut 5 minutes, la troifieme 10, & la quatrieme 15, qui font marquées, & ainfi de fuite.

Une fois que vous fçaurez *captiver* la grande image du Soleil dans la chambre obfcure, par le moyen du guide &c, il ne vous fera pas difficile d'orienter cet inftrument de la maniere la plus jufte : car pour peu que les poles de l'équateur ne foient pas dans la véritable méridienne, cette image fortira des bornes *CB*, *PA*, ce qui vous donnera occafion de tourner davantage l'inftrument, jufqu'à ce que l'image *S*, *Fig.* 13, marche exactement entre les deux bornes *CB*, *PA*, fans en fortir.

PREMIERE REFLEXION.

Tout ce que je viens de dire jufqu'ici, deviendroit inutile pour un inftrument domeftique, orienté d'une maniere fixe. Il faudroit feulement ajufter la déclinaifon du jour, & changer les coches dans le tems de l'obfervation, ce qui eft tout fimple : mais comme cet inftrument eft auffi deftiné pour changer fouvent de latitude & de fituation en toute façon, il a fallu entrer dans un plus grand détail.

II. REFLEXION.

Ce Cadran eft infiniment avantageux fur terre, pour trouver une méridienne fûre & à toute heure du jour ; car comme le Soleil parcourt 12 $\frac{1}{2}$ pouces par chaques 5 minutes, fi l'on fait feulement trois opérations de fuite (ce qui ne comprend qu'un quart-d'heure), l'image du Soleil aura parcouru 37 $\frac{1}{2}$ pouces, & pour peu que l'inftrument foit déplacé, cette image aura franchi plufieurs fois les bornes qui lui font prefcrites, ce qui aura porté l'Obfervateur

vateur à le détourner, pour le ranger dans la place convenable.

II. PROBLEME.

Connoiſſant la déclinaiſon du Soleil, trouver la latitude d'un lieu donné, par degrés & minutes.

Comme la déclinaiſon eſt la même pour toutes les parties du globe terreſtre, ſi nous voulons (le 6 Juin 1746) ſçavoir au juſte la latitude du pays où nous ſommes, il faut ajuſter la déclinaiſon comme il a été dit Probleme I, Articles 2° & 3° ci-deſſus; après quoi l'inſtrument étant ſuſpendu par *quelques degrés plus ou moins que la juſte élévation du pole*, il faut le tourner horiſontalement, juſqu'à ce que le *guide* ſe montre dans la chambre obſcure: que ſi le *guide* ne s'y montroit pas, on verroit aiſément ſi l'élévation peche par *trop*, ou par *moins*, ou bien ſi l'équateur n'eſt pas aſſez tourné pour l'élévation actuelle du Soleil: dans l'un ou l'autre de ces deux cas, ou il faudroit ſuſpendre l'inſtrument par un degré *moyen*, ou bien changer quelque choſe de l'équateur en avant ou en arriere... Quand le guide ſe montrera dans la chambre obſcure, on changera la ſuſpenſion, ou les coches de l'équateur, juſqu'à ce que le même guide tombe dans le *circuit Z*, *Fig.* 13... Enfin, quand le guide tombera dans le circuit *Z*, on obſervera la marche de la grande image du Soleil; & ſi quand elle arrivera au milieu de l'eſpace *AP*, *Fig.* 13, (également éloignée des deux extrémités *A* & *P*) elle remplit exactement les deux bornes *CB*, *PA*, c'eſt une marque que l'inſtrument eſt bien ſuſpendu, & tout eſt fait. Si au contraire cette image franchit ſes bornes d'un côté ou d'autre, on changera la ſuſpenſion par le moyen de la *Fig.* 19, & quand on ſera parvenu à rendre l'image

complette au milieu de ses deux bornes, on sera sûr d'avoir trouvé la véritable latitude de l'endroit. On prendra le nombre des degrés sur le méridien, & les minutes sur l'angle *HIKFLG*, Fig. 19.

REMARQUE.

Cette maniere de trouver la latitude est d'autant plus agréable, qu'on peut le faire à toute heure du jour : du moins n'est-on pas obligé d'attendre midi precis, où le ciel peut n'être pas pur : d'ailleurs, comme cet instrument produit l'effet d'*un cercle de* 100 *pieds de diametre* : on sent bien que les quarts-de-cercles des Astronomes, n'ont pas, à beaucoup près, cette étendue, ni par conséquent cette précision.

Dans ces sortes d'instrumens, en multipliant les divisions, on les rend extrèmement petites, & c'est de l'attention infinie de l'Observateur, que dépend la justesse de l'opération : mais dans celui-ci, les divisions sont grandes, quoique multipliées, & c'est le Soleil par sa marche précipitée, qui en fait tous les frais.

III. REFLEXION.

Cet instrument demande, à la vérité, beaucoup de justesse dans l'exécution, soit pour l'égalité des divisions, soit pour celle du calibre des pieces, afin qu'elles ne pesent pas plus d'un côté que de l'autre, & que le centre de *gravité* soit toûjours au centre de l'instrument, quelque situation qu'on puisse lui donner : mais aussi, cela supposé, il sera d'une grande commodité pour quantité d'opérations.

Je sens bien que cet instrument doit être exécuté en

laiton, mais quant au modele que j'en ai fait, il ne peut être que de fer, faute d'avoir le métal convenable, & un ouvrier capable de l'exécuter : il feroit même à fouhaiter qu'il n'y eût pas d'autres chofes à redire ; mais quelque imparfait qu'il puiffe être, il fervira à éclaircir mon Mémoire, & c'eft tout ce que je demande.

III. Probleme.

Connoiffant la Latitude d'un lieu donné, trouver la déclinaifon du Soleil, qu'on ignore, pour un jour déterminé.

Cette opération ne differe prefque en rien de la précédente ; car ayant fufpendu l'inftrument fuivant la latitude ; il faut le faire tourner horifontalement, pour l'orienter d'une maniere approchante : il faut enfuite faire tourner l'équateur, pour chercher l'heure approchante, au moyen du *guide*, & enfin incliner la chambre obfcure, jufqu'à ce que l'image du Soleil rempliffe exactement fes deux bornes, étant à une égale diftance des deux extrémités *A* & *P*. On connoîtra alors la déclinaifon du Soleil, fçavoir les degrés fur l'arc *GADH*, & les minutes fur l'arc *QNR*, *Fig.* 16.

IV. Reflexion.

Cette méthode peut fervir fur terre pour corriger les fautes d'impreffion, qui peuvent quelquefois s'être gliffées dans les Tables de déclinaifon, ou pour en dreffer une foi-même fi l'on veut.

IV. PROBLEME.

Connoissant la déclinaison du Soleil, connoître la Latitude de l'endroit où l'on est, par les ascensions droites du Soleil jusqu'à midi.

Il faut 1°, arrêter la chambre obscure parallelement à l'équateur, dans la même situation où elle doit être le jour des équinoxes. 2°. Il faut suspendre l'instrument par le point du méridien où il est coupé par l'équateur, en sorte que cet équateur d'*incliné* qu'il étoit, devienne *vertical.* 3°. Il faut faire tourner l'instrument horisontalement, jusqu'à ce que le plan de l'équateur soit parallele aux rayons du Soleil. 4°. Il faut changer les coches, jusqu'à ce que le guide donne dans le circuit *Z*, *Fig.* 13. Alors la grande image y paroîtra aussi, & baissera bien-tôt, si c'est avant midi, ou haussera si c'est après. Mais comme elle travaillera incessamment à franchir ses bornes; il faudra l'y *captiver*, en tournant l'instrument horisontalement du *Levant au Couchant*, à mesure que le Soleil tournera aussi, en sorte que le plan de l'équateur soit toûjours parallele aux rayons du Soleil. 5°. Quand à force de baisser, l'image sera parvenue au point *PC*, *Fig.* 13, il faudra changer une coche, & le Soleil remontera au point *A.* 6°. Quand l'image ne descendra plus, il sera midi, & le cercle de l'équateur tiendra alors la véritable place du méridien, tandis que le plan du méridien sera parallele au Levant & au couchant. Je dis ceci pour faire comprendre le changement de cet instrument, étant suspendu par l'intersection du méridien & de l'équateur.

Lorsque le Soleil ne montera plus, on remarquera exactement le lieu de l'image dans la chambre obscure;

on regardera aussi la coche où se trouvera l'arrêt *E*, *Fig.* 14, & on notera le tout.

REDUCTION.

En comptant un degré 15 minutes pour chaque *coche* de l'équateur, on aura le véritable nombre des degrés; chaque minute de la chambre obscure vaudra 15 minutes de degré, & chaques 5 secondes vaudront une minute 15 secondes de degré... On fera la somme du tout, laquelle somme par l'*addition* de la déclinaison *méridionale* du Soleil, ou par la *soustraction* de la déclinaison *Septentrionale*, donnera la latitude exacte du lieu de l'observation.

II. COROLLAIRE.

Cette méthode est excellente pour avoir avec exactitude les hauteurs correspondantes du Soleil sur l'horison, à chaque moment du jour.

III. COROLLAIRE.

On peut aussi, par les élévations du Soleil sur l'horison, connoître l'heure qu'il est, quand on connoît la latitude.

V. PROBLEME.

Sans connoître ni la Latitude, ni la déclinaison du Soleil, connoître dans le moment si c'est avant ou après midi.

Ce Probleme n'est que l'application du précédent; car l'instrument étant *rangé & suspendu* comme dans le qua-

trieme Probleme, on n'aura pas plutôt préſenté la lunette vers le Soleil, que ſon image *hauſſera ou baiſſera* notablement dans la chambre obſcure, & fera connoître ſur le champ, ſi c'eſt avant ou après midi.

Uſage de cet Inſtrument ſur Mer.

Il eſt certain que les agitations du vaiſſeau, ſurtout par un grand vent, feront évanoüir une partie de la préciſion qu'on peut tirer de cet inſtrument ſur terre : mais il en reſtera toûjours beaucoup plus qu'on n'en a eu juſqu'ici. Le vent n'eſt pas toûjours violent, il eſt ſouvent médiocre, & quelquefois trop foible. Ainſi il y aura bien des occaſions où cet inſtrument pourra faire plaiſir, comme dans certaines iſles, où l'on relâche de gré ou de force, &c. Examinons la choſe de plus près.

Cet Inſtrument demande deux conditions eſſentielles, pour marquer avec exactitude. La premiere eſt l'*à-plomb*, qu'il prend par ſa propre peſanteur, quand rien ne l'en détourne; & la ſeconde eſt ſa *direction* par rapport à l'axe du monde, direction qu'on lui donne facilement, en *captivant* l'image du Soleil entre les deux bornes ſi ſouvent citées.

De l'A-plomb.

Pour ce qui regarde l'*à-plomb*, l'agitation ordinaire du vaiſſeau ne l'en écartera pas beaucoup; mais les agitations plus violentes, & l'impreſſion du vent ſur l'inſtrument même, le tiendront dans un balancement continuel, qui ne permettra d'obſerver que d'une maniere imparfaite. Voilà l'objection dans toute ſa force; voyons ſi l'on y peut répondre.

Premierement, le vent ne ſouffle que par boutade, &

il y a de tems en tems quelque relâche, pendant lequel l'inſtrument étant à-plomb, pourra donner lieu à un moment d'obſervation, d'autant plus utile qu'il ſera plus déciſif.

En ſecond lieu, quand même ces interſtices de vent ne ſuffiroient pas pour que l'inſtrument reprît ſon *à-plomb*, il eſt aiſé de le lui faire prendre. *Une perſonne attentive, qui employera ſes deux mains à propos pour arrêter les balancemens du cadran, & lui redonner ſon à-plomb, y réuſſira toutes les fois qu'elle voudra.* Nouvelles ſecouſſes du vent, nouveau ſecours de l'homme, juſqu'à ce qu'on ait vû ce qu'on vouloit voir. L'*à-plomb* eſt la ſituation la plus naturelle du corps peſant ſuſpendu librement; elle eſt auſſi la plus invariable & la plus réguliere, puiſqu'elle ſert de regle à preſque toutes les autres.

D'ailleurs, ſi les balancemens ſe faiſoient du Sud au Nord (ce qui peut arriver bien ſouvent), l'*à-plomb* n'eſt pas abſolument néceſſaire pour l'obſervation; parce que l'image du Soleil ſe fera voir en paſſant dans la chambre obſcure à chaque *allée* & *venue*; & comme l'eſpace qu'elle parcourt eſt d'un pied de long, en 5 minutes, on verra bien à peu près d'un pouce à l'autre, ou de deux en deux pouces, les progrès qu'elle fera.

Il n'en eſt pas de même des inſtrumens ordinaires. Suppoſons, par exemple, un anneau aſtronomique, ou un aſtrolabe de même calibre que ce cadran, de 30 pouces de diametre; le rayon du Soleil ne fera que 3 lignes par degré, c'eſt-à-dire, en 4 *minutes d'heure*, & pour peu que l'inſtrument balance, on perdra tout le fruit de l'obſervation; mais dans celui-ci, le rayon du Soleil fera 120 lignes par degré, ou en 4 *minutes d'heure*, & les balancemens n'empêcheront pas d'entrevoir une différence ſenſible d'un eſpace à l'autre.

De la Direction.

Quoique je ne connoiſſe la mer que pour l'avoir vûe du rivage, je ſuis bien perſuadé que les balancemens du vaiſſeau ne l'empêchent pas de ſuivre une ligne aſſez droite (excepté pendant la tempête), ſans quoi on ne pourroit pas naviger. Cela étant, une fois qu'on aura rangé l'inſtrument dans ſa véritable direction, il y reſtera ſans aucun écart; parce que l'anſe eſt faite de façon, que l'inſtrument, avec toute ſorte de liberté, n'a pas celle de tourner *horiſontalement* de lui-même; il faut que quelqu'un le tourne, & par conſéquent il reſtera dans la ſituation reſpective du vaiſſeau, ſans qu'il ſoit beſoin de le diriger à chaque obſervation. L'unique attention de l'Obſervateur ſera donc de changer les coches de l'équateur, & de redonner l'*à-plomb* en touchant l'inſtrument par le bas, pour rompre ſes balancemens.

II. Remarque.

Il ſeroit inutile de m'étendre davantage ſur les inconvéniens de la mer, & ſur les remedes qu'on peut y apporter. Je voudrois être à même de pouvoir en faire l'épreuve, je n'épargnerois rien pour cela, & peut-être que je trouverois des expédiens ſuffiſans. Après tout, ſi cette machine paroît à mes Juges pouvoir mériter quelque attention, l'expérience & le tems acheveront le reſte. Quant à moi, j'ai ſouvent expoſé au vent le modele que j'avois fait en bois, & dans le plus fort de l'agitation, je l'arrêtois tout-à-coup, & je retrouvois la minute ſans erreur, ce que je connoiſſois par une bonne montre à ſecondes, que je mettois d'accord avec l'inſtrument, avant que de l'expoſer au vent.

III.

III. REMARQUE.

Cet Inftrument peut fervir pour connoître la déclinaifon de l'aiman, dans les différentes régions où un vaiffeau peut fe trouver. Car tant que l'image du Soleil fe tiendra exactement dans fes deux bornes, & furtout pendant plufieurs opérations, on ne peut pas douter que le méridien ne foit parallele à l'axe du monde.... Difons mieux; cet inftrument tiendroit lieu de Bouffole pendant le jour, dans un cas de néceffité; car étant une fois placé relativement au vaiffeau, il eft impoffible que le vaiffeau change tant foit peu de direction, qu'auffi-tôt l'image du Soleil ne forte de fes bornes; & tant qu'il y reftera, c'eft une preuve que le vaiffeau fe foûtient dans fa direction.

DERNIERE REMARQUE.

Comme je ne fçaurois prévoir tous les inconvéniens qui peuvent diminuer les avantages de ce cadran, je ne fçaurois auffi prévoir tous les différens ufages qu'on en peut tirer, ainfi que les corrections qu'on y peut faire. Cette idée m'a paru finguliere ; les effets en font furprenans fur terre : c'eft aux connoiffeurs à décider de fes avantages & de fes défauts.

Il eft bien tems de finir un Mémoire qui n'eft déja que trop long, & qui peut-être, n'en fera pas plus intelligible. Permettez que ce foit en faifant remarquer que ces deux pieces femblent fe donner mutuellement la *main*, pour perpétuer la connoiffance de l'heure en mer. Si l'une & l'autre pouvoient être un jour exécutées avec toute la jufteffe dont elles font fufceptibles, elles ferviroient peut-être à la connoiffance d'une chofe non moins importante

que l'heure; je parle des longitudes ſur mer, qu'on ne connoîtra jamais qu'au moyen d'une *horloge* parfaitement juſte, & d'un *cadran ſolaire* excellent, pour pouvoir comparer l'heure du méridien de *départ* (marquée ſans ceſſe par cette horloge), avec l'heure de tout autre méridien (marquée par le cadran ſolaire dans le tems de l'obſervation)... Les découvertes les plus utiles ſont preſque toûjours ſi peu de choſe dans leur naiſſance, qu'on me pardonnera l'eſpece de conjecture que je viens de haſarder en faveur de ces deux-là. Je reconnois très-ſincerement que ce ne peut être qu'à force de correction : mais je ſerois toûjours trop flatté, ſi j'avois fait un premier pas dans cette carriere, laiſſant la gloire à quelque autre de la fournir juſqu'à la fin.





ADDITIONS AU MEMOIRE QUI A POUR SENTENCE:

Semper id melius est, quod optimo propinquius est.



A précipitation avec laquelle je fus obligé de dresser ce Mémoire, m'ayant fait oublier certaines choses qui méritoient d'y avoir place, j'ai cru devoir les mettre dans ce Supplément.

Méthode pour régler le Sablier.

Le petit bruit que fait à chaque minute la croix d'acier, en frappant sur la jambe *ED*, *Fig. 9*, est d'un secours admirable pour régler ce sablier. Je me sers d'un pendule libre à secondes; je le lâche au moment que la minute frappe, & je compte jusques à 240 vibrations, faisant 4 minutes, ou un tour complet de la croix des creusets. Car, comme j'ai dit, il y a une ou deux secondes de différence d'un creuset à l'autre, mais les tours entiers sont égaux entre eux.

Si la quatrieme minute frappe plutôt que la 240me vibration, je remarque de combien, & mettant la clef dans le trou du cadran, je tourne de gauche à droite deux ou trois tours au hasard, & je recommence mon expérience de 240 vibrations. Il est certain que le tour des creusets s'achevera quelques secondes plus tard, & continuant de tourner la clef de gauche à droite, j'attrappe en moins de demi-heure une justesse approchante : la même chose pour reculer, mais il faut tourner de droite à gauche.... Je l'observe ensuite pendant quelques heures sur ma pendule, & enfin je le mets sur un cadran solaire, pour voir l'effet de 24 en 24 heures.

Ce même pendule libre me sert de preuve de tems en tems, pour connoître si rien n'embarrasse le trou ; car pour peu qu'il y eût d'obstacle, les 4 minutes tiendroient beaucoup plus de 240 vibrations. On pourra s'en servir dans les rades ou autres occasions de repos : on pourroit même avoir un sablier ordinaire de 4 minutes (coulant bien gros pour être plus sûr), & s'en servir en route, pour vérifier la marche du sablier : car comme j'ai dit, le bruit des minutes rend ce sablier beaucoup plus facile à régler que les pendules ordinaires.

Il me semble qu'une cloche de verre fermée par le bas, ou une boîte factice de même matiere, étant suspendue avec la suspension marine, & placée dans l'endroit du vaisseau le plus tranquille, c'est-à-dire, au centre du mouvement ; il me semble, dis-je, qu'une pareille boîte transparente, pourroit contenir un pendule libre qui conserveroit quelque tems ses vibrations, malgré le mouvement du vaisseau, attendu que cette agitation ne changeroit rien à l'air renfermé dans la boîte. C'est une idée que je ne suis pas à portée de vérifier, & que je ne donne que par conjecture.

OBSERVATION.

J'ai bien du regret de n'avoir pas donné à mon ſablier autant de *profondeur* que de *largeur* ; car n'occupant preſque que la même place, il auroit contenu la moitié plus de ſable, & j'aurois pu le faire couler beaucoup plus gros, puiſque plus il coule gros, & plus j'y trouve de juſteſſe.

Bien plus, cela m'auroit fourni le moyen d'avoir deux ſabliers dans un ſeul, avec un peu plus de dépenſe, & l'un auroit ſervi de preuve à l'autre. Voici mon idée.

Le gros de la dépenſe conſiſte ſurtout dans les fers & la caiſſe de bois, & ſi mon ſablier avoit autant de profondeur que de largeur, j'aurois pû mettre un ſecond cadran au côté *H* de la *Fig.* 2, & partageant en deux l'eſpace *FE* de la *Fig.* 6 (qui auroit été plus grand de moitié), j'y aurois placé une ſeconde croix de creuſets, qui auroit marqué ſur le ſecond cadran dont je parle ; & le même entonnoir ayant deux *couloirs*, auroit fourni à tous les deux à la fois.

Il me paroît que cela auroit été très-avantageux ſur mer (où l'on peut charger une perſonne de veiller au ſablier) car un ſablier tel que le mien, étant une fois bien réglé, ne doit jamais *avancer*, mais il peut *reculer*, quand quelque poil ou autre choſe embarraſſe le trou. Or les deux cadrans du même ſablier étant également bien réglés, le premier qui retarderoit ſur l'autre, ſeroit celui qui feroit faute : on l'ouvriroit pour dégager le trou, & on le remettroit enſuite à la minute, par le moyen de l'autre, qui n'auroit point interrompu ſa marche.

De la Suſpenſion.

La ſuſpenſion de ce ſablier paroît ſuffiſante telle qu'elle eſt, car je le fais balancer par des vibrations de deux pieds (la ſuſpenſion juſqu'au plancher étant allongée de trois pieds), ſans que le pendule libre me faſſe voir aucune différence entre cet état d'agitation & l'état de repos. Cependant, quand MM. les Commiſſaires auront vû le modele, ils jugeront s'il conviendroit d'ajoûter à cette ſuſpenſion, la ſuſpenſion marine des bouſſoles.

De l'Humidité.

Quoique la caiſſe de mon ſablier ſoit faite de pluſieurs pieces de rapport unies les unes aux autres, j'oſe cependant avancer que l'humidité n'y pénétrera pas avec plus de facilité que dans les ſabliers ordinaires; car outre que les planches de la caiſſe ont 7 à 8 lignes d'épaiſſeur, elles ſont peintes en huile de pluſieurs couches, que l'eau même ne pénetreroit pas aiſément; & d'ailleurs, en cas de beſoin, on pourroit le revêtir d'une ſeconde boîte ou *ſurtout*, qu'on n'ouvriroit que pour tourner le ſablier, ce qui le mettroit au-deſſus de toute atteinte.

De la qualité du Sable.

Le ſable que j'ai employé dans mon ſablier, n'eſt pas tel qu'il devroit être; il n'eſt pas aſſez grainé, & entraîne beaucoup de pouſſiere avec lui. Je l'ai trouvé dans une forêt à une lieue de chez moi, & je ſuis forcé de m'en ſervir faute d'autre. Le ſable d'Allemagne eſt infiniment plus propre pour cela, mais il coûte ici 20 ſols la livre.

J'ignore si l'on pourroit trouver quelque autre matiere plus dure & aussi fluide que le sable : elle seroit préférable, à cause qu'elle seroit moins sujette à se réduire en poussiere. Cependant le sable d'Allemagne durera longtems, sans avoir besoin d'être changé.

EXPERIENCE.

J'avois mêlé parmi mon sable une certaine quantité de *poudre d'œufs*, pour le rendre plus agréable à la vûe, & quoique plus legere, je comptois que le mêlange la rendroit, pour ainsi dire, *homogene* avec le sable. Cependant je m'apperçûs que mon sablier (deux ou trois heures après avoir été tourné) avançoit sensiblement, & reculoit sur la fin. Je jugeai qu'il en étoit d'un sable plus pesant à l'égard d'un plus leger, comme des personnes plus robustes aux personnes plus foibles au sortir d'une presse ; c'est-à-dire, que le sable plus pesant gagnoit le bas avec plus de force, & obligeoit le plus leger à rester à côté, pour ne couler que sur la fin. Je retirai ce sable mêlé, j'y en mis d'autre tiré tout d'un même endroit, & le défaut a disparu : d'où j'infere qu'il faut employer du sable homogene.

II. EXPERIENCE.

J'ai éprouvé que non-seulement un trou conique fait couler le sable plus uniment, mais encore qu'il en coule beaucoup plus. Car ayant fait un couloir dont le trou étoit plat & mince comme du papier, j'enfonçai une broche dans ce trou plat, & dans un trou conique de 3 lignes d'épaisseur : la broche entroit un peu plus dans le trou plat que dans le trou conique, ce qui prouve que le premier étoit plus grand que le second, & cependant le trou

conique qui étoit un peu plus petit, délivroit la moitié plus de fable.... J'attribue cette différence aux petites colomnes de fable qui preffent pour la fortie. Le trou plat n'en a qu'une feule, & le trou conique en a plufieurs, qui, enfilant la bafe du cone, preffent de tous côtés pour arriver à la pointe.

Sur le Cadran.

En relifant l'article de mon Mémoire, qui a pour titre l'*intérieur de la Chambre obfcure*, j'ai remarqué que dans la *Fig.* 12 le rayon du Soleil ne paroît pas faire l'angle de *réflexion* égal à celui d'*incidence*. Si je ne me fuis pas étendu davantage là-deffus, c'eft parce qu'on verra dans le modele, que la pofition refpective des miroirs, corrige ce qui paroît n'être pas en regle: mais comme on pourroit examiner le Mémoire avant l'arrivée du modele, j'ai cru devoir expliquer cet endroit.

Méthode pour placer la Lunette.

Au moyen des expériences que j'ai faites, j'ai trouvé qu'avec la lunette dont je me fers, il me faut 58 pouces de diftance, depuis l'oculaire *R* jufques au point *Z*, *Fig.* 13, pour que l'image du Soleil ait cinq pouces, & qu'elle faffe 2 $\frac{1}{2}$ pouces par minute. C'eft pour cela que je fais fortir l'objectif *Q* d'environ 4 pouces hors de la chambre, pour qu'il refte 14 pouces depuis *R* jufques au premier miroir *T*... Depuis celui-là jufques à *VY*, il y en a 22, & 22 depuis *Y* jufques à *Z*; ce font juftement les 58 pouces dont j'ai befoin.

1°. J'ai fait une ouverture ronde au fond d'en-haut, pour recevoir la lunette, laquelle ouverture eft également éloignée des deux côtés de la *chambre*.

2°.

2°. Pour diriger l'oculaire *R* de façon que le rayon *RT* arrive naturellement ſur la ligne *TZ*, laquelle partage le fond d'en-bas en deux parties égales, j'arrête le bout de la lunette *R* autant au milieu que je le puis, au moyen de deux vis, en meſurant avec le compas.

3°. Ayant garni de papier l'eſpace *NCB*, j'expoſe l'objectif au Soleil, & je dirige la chambre de façon que le guide *&* donne préciſément ſur *Z* ; & pour lors je vois ſi l'image du Soleil eſt partagée bien également, par la ligne *TZ* ; & ſi je trouve de la différence, je pouſſe inſenſiblement l'oculaire *R* juſqu'à ce que la ligne *TZ* partage bien par le milieu cette image du Soleil, & je fixe la lunette en ſerrant les deux vis qui la tiennent. Vous trouverez ci-après une autre preuve du *bien-être* de la lunette.

L'horiſon de la Lunette.

La lunette étant fixée de la façon que je viens de dire, je change *un peu* la ſituation de la chambre, l'inclinant indifféremment de droite à gauche & en tout ſens, pour que l'image du Soleil change de place. Cette image, en changeant de place, rencontre un cercle *inviſible*, lequel ne devient *viſible*, que par la rencontre de l'image du Soleil... Ce cercle (dont on ne voit jamais qu'une portion à la fois) eſt d'une très-belle couleur bleu-céleſte. On peut le rendre viſible ſucceſſivement dans toutes ſes parties, en dirigeant l'image du Soleil tout-autour.

La principale propriété de ce cercle, eſt de *terminer* préciſément l'eſpace que le Soleil peut éclairer ſans changer la *ſituation* de la chambre : de ſorte que l'image du Soleil arrivant ſur ce cercle, qu'elle éclaire, elle commence à être tronquée, & ceſſe entierement de paroître dès qu'elle a franchi ce cercle, comme elle ne commence de

paroître qu'à mesure qu'elle entre dans l'intérieur de ce cercle. C'est ce qui m'a porté à l'appeller l'*horison*, puisqu'il marque, pour ainsi dire, le lever & le coucher du Soleil... Cet horison est toûjours proportionnel à l'image du Soleil ; leurs diametres sont environ comme 46 à 14.

Une autre propriété de cet *horison*, est d'indiquer la juste position de la lunette ; car si à mesure que le Soleil se rend visible, vous avez attention d'y marquer des points, & que vous le suiviez tout-autour, vous aurez un cercle *ponctué* & parfait, lequel doit être également éloigné des deux côtés de la chambre, ou bien la lunette est mal posée.

Poser le premier miroir.

Puisque le Soleil ne luit qu'autant qu'il est renfermé dans le cercle de l'*horison*, ce cercle désigne tout-à-la-fois & la grandeur que doit avoir le miroir, & la place où il doit être arrêté.

Ce miroir (quarré-long) est mastiqué sur une plaque de fer, laquelle est montée sur 4 pieds, imitant la figure d'une petite table. Les quatre pieds de cette table qui sont faits en vis, ont chacun *deux écroues*, dont une reste en-dedans de la chambre, & l'autre en-dehors ; & la *tole* qui forme le fond de la chambre, se trouve entre les deux écroues, ou pour mieux dire, entre les 8 écroues, 4 dedans, 4 dehors. Ces deux écroues à chaque vis, sont pour pouvoir fixer chaque pied dans l'élévation convenable ; elles serrent l'une contre l'autre (la tole entre deux).

C'est par le moyen de ces pieds, qu'on donne au petit miroir la situation nécessaire pour renvoyer en haut l'image du Soleil. Pour cela on couvre d'un papier le fond d'en-haut : l'image réfléchie va s'y peindre... Alors il faut de nouveau agiter la chambre, pour que cette *nouvelle*

image découvre encore fon *horifon* en-haut, comme nous avons dit pour le bas. Il faut ponctuer cet *horifon*, & fi étant achevé, il fe trouve également éloigné des deux côtés de la chambre, c'eft une marque que le premier miroir eft dans fa *jufte pofition* : finon il faut lever ou baiffer les pieds du petit miroir, jufqu'à ce que l'*horifon* d'en-haut foit à une égale diftance des deux côtés de la chambre.

Pofer le fecond Miroir.

Le fecond miroir ne differe du premier que par fa grandeur. Même nombre de pieds, même nombre d'écroues, & même façon de le placer, c'eft-à-dire fur l'*horifon* qu'on aura ponctué. Il faut tracer en-bas les deux bornes *CB, PA*, qui formeront le chemin où doit paffer l'image du Soleil... Comme on ne peut pas trouver un troifieme horifon en-bas, parce que cet horifon étant fort grand, fe trouve hors de la chambre obfcure, il faut avoir une planche bien dégauchie, qu'on mettra fur une ligne méridienne *à angles* droits. On inclinera cette planche vers le midi, de façon que fon plan réponde au *parallele* que décrit le Soleil ce jour-là dans le ciel.

Enfin aux approches de midi, on appliquera la chambre contre cette planche, & l'inclinant peu à peu vers le levant ou vers le couchant, jufqu'à ce que le guide *&* donne fur *Z*, on examinera fi l'image du Soleil occupe précifément l'efpace qui lui eft deftiné entre les deux bornes *CB*, *PA*; & fuppofé qu'il l'occupe, on examinera fi en avançant par le *propre mouvement* du Soleil, cette image ne fortira pas de fes bornes... Si elle fe maintient entre ces deux bornes depuis *A* jufques en *P* (la chambre étant toûjours appliquée contre la planche en queftion), c'eft une marque que le fecond miroir eft bien placé, ainfi que

tout le reste. Mais si au contraire on voit que l'image du Soleil ne marche pas entre ces deux bornes, on touchera aux pieds du grand miroir du côté qu'on jugera convenable, jusques à ce que l'image du Soleil se maintienne dans ses bornes *CB*, *PA*, *Fig.* 13.

Alors vous serez assûré que la lunette, le premier & le second miroir sont bien disposés, & que la chambre toute entiere est dans sa perfection, & en état d'être mise dans son équateur.

De la matiere des Miroirs.

Je pense qu'il y auroit quelque avantage à se servir de miroirs de métal, soit parce que l'étain des glaces peut s'ôter avec le tems, soit parce qu'elles sont fort fragiles, soit enfin parce qu'au milieu du grand miroir *VY*, on pourroit percer le trou du guide *&*, ce qui donneroit le moyen de diminuer la profondeur de la chambre d'environ deux pouces : mais je ne puis pas employer des miroirs de metal, ni même en faire la différence, n'ayant ni matiere ni ouvrier pour cela.

Ces miroirs de metal feroient absolument nécessaires ; si les angles que font les rayons dans la *chambre obscure*, étoient plus ouverts qu'ils ne sont, parce qu'alors une glace étamée (sur-tout si elle est bien épaisse) pourroit produire deux images à la fois, une sur l'étain, & l'autre sur la glace : mais ici les angles sont si aigus, que cet inconvénient n'est point à craindre.

De la Suspension.

Quoique les deux suspensions que j'ai proposées dans mon Mémoire, soient l'une & l'autre bien pratiquables,

j'ai cru devoir en employer une troisieme, qui me paroît plus avantageuse à plusieurs égards... J'ai fait sur les deux circonférences (en-dedans) de mes deux méridiens *accolés*, des entailles d'un degré à l'autre. J'y mets une anse pliante en tout sens, laquelle peut couler tout-au-tour du méridien (les poles exceptés), & suspend la machine par tel degré que l'on veut. Voilà pour ce qui regarde les degrés.

Quant aux minutes, elles sont marquées au bas de l'instrument, au moyen d'un poids de 12 à 15 livres, qu'on peut augmenter à discrétion. Ce poids, qui est renfermé dans une espece de cage quarrée, que je ne sçaurois bien figurer sur le papier, s'accroche par une anse au degré correspondant d'en-bas. Par exemple, si la suspension est en-haut au 50e degré, le poids sera mis en-bas, pareillement au 50e degré.

L'anse du poids est traversée par une forte vis *horisontale*, dont la longueur est parallele au plan du méridien. En tournant cette vis, on fait avancer ou reculer le poids de tant & si peu que l'on veut, ce qui chasse insensiblement toute la machine vers le Midi ou vers le Nord, d'autant de minutes qu'on souhaite. Car ce poids, en avançant ainsi, fait mouvoir un *micrometre*, qui marque les minutes sur l'extérieur de la cage.



Raisons de préférer cette derniere Suspension.

La premiere suspension, *Fig.* 18, présente deux grandes difficultés. 1°. Il n'est pas aisé, il paroît même très-difficile, de pouvoir faire des *pas* de vis qui soient exactement de la largeur d'un degré. 2°. Cette vis qui soûtiendroit tout le poids de la machine, ne tourneroit qu'avec peine, & s'useroit bien vîte.

La seconde suspension, *Fig.* 19, demande une plaque assez longue, pour qu'il y ait un certain espace d'un trou à l'autre, ce qui allonge la machine ; & d'ailleurs il y auroit bien de l'embarras, pour changer la cheville d'un trou à l'autre, parce que pendant ce changement, il faudroit soûtenir toute la machine par quelque autre moyen.

La troisieme suspension que je propose, est infiniment plus commode. 1°. Parce que l'anse de suspension peut couler d'un pole à l'autre sans démancher. 2°. Le poids qui est en-bas contribue à faire garder l'à-plomb à toute la machine. 3°. La vis qui tourne ne soûtient que le poids, & ne souffre pas beaucoup. 4°. Il n'y a point de sujettion pour les *pas* de la vis, parce que les minutes sont marquées d'après les *pas*. 5°. Et c'est ici le principal avantage, ce poids au bas de la machine est capable de *compenser* les inégalités qui pourront se trouver dans l'équilibre de chaque piece en particulier, & plus il sera pesant, & plus ces inégalités deviendront insensibles.

La suspension est faite actuellement, mais le poids ne l'est pas encore, ni ce qui le concerne. Je rendrai compte dans une critique qui accompagnera les modeles, je rendrai compte, dis-je, de la méthode que j'aurai suivie pour tracer les minutes avec justesse.

J'oubliois d'avertir que le poids, quoique mobile, quand il faut le changer de degré, n'a pas pour cela la liberté de balancer en *particulier*; il est fixe à cet égard, & ne fait, pour ainsi dire, qu'une même piece avec le méridien. Cette précaution me paroît nécessaire pour la mer, afin que le tout soit plutôt arrêté, à mesure qu'on touchera le poids avec la main pour rompre les balancemens de la machine.

Méthode pour vérifier l'Equateur.

Pour ce qui regarde la construction & l'emplacement de l'équateur, il suffit d'observer, 1°. Si le plan de cet équateur passe également & en même tems par les deux points de 90 degrés du méridien. 2°. Si toutes les parties de sa circonférence passent à une égale distance de ces mêmes points de 90 degrés... Celui que j'ai fait construire peche un peu dans ces deux cas: mais quand j'en ferois construire trente, ils auroient toûjours quelque défaut, parce que mon serrurier n'en sçait pas davantage; & quand il veut corriger un défaut, il en met ordinairement trois ou quatre opposés.

Quant à la division de ce même équateur, qui doit être en 288 parties, elle n'est pas si difficile, quoiqu'elle le soit toûjours beaucoup pour gens qui n'ont ni l'habitude, ni les instrumens nécessaires : mais il est à craindre que les défauts de construction n'influent un peu dans les divisions, quoiqu'elles soient justes d'ailleurs.

Pour connoître si ces divisions sont bien égales, on aura un *pendule libre*, ou une pendule à *secondes*; & après avoir orienté l'instrument avec soin, on observera le moment précis que le limbe antérieur du Soleil arrivera à la fin de

la *cinquieme minute*. Il faut pour cela deux perſonnes, l'une pour compter les ſecondes *tout haut*, & l'autre pour obſerver.

On changera enſuite une coche ſans ſe preſſer, & ſi le limbe antérieur du Soleil arrive à la fin de la cinquieme minute en 300 ſecondes préciſément, c'eſt ſigne que la diviſion eſt juſte : on pourra ſuivre les autres coches de la même façon. Je ſuppoſe qu'on eſt bien aſſûré de la juſteſſe du pendule libre, & que rien d'étranger ne la dérange. Une bonne pendule ſeroit plus commode.

Si au contraire on voit une différence en avant ou en arriere, il faudra limer la coche d'un côté, & la *battre* un peu de l'autre pour l'étendre. On pourroit avoir des coches mobiles, qu'on arrêteroit avec des vis : mais cet expédient n'eſt bon que pour les mauvais ouvriers, les habiles gens y ſuppléeront par une diviſion exacte.

Après tout, l'inexactitude de ces diviſions ne peut pas cauſer une grande erreur, parce que ce qui peut manquer à une coche, ſe trouvera ſur l'autre ; tout comme la mauvaiſe exécution de cette piece ne doit pas diminuer le prix de l'*arrangement & de l'invention*.

Emplacement de la Machine pour obſerver l'heure.

Cette machine n'a pas beſoin d'être toute à découvert pour trouver l'heure. Il ſuffit que l'objectif de la lunette reçoive les rayons du Soleil ; tout le reſte peut être à couvert, & du Soleil & du vent : elle peut même être entierement renfermée dans une chambre, pourvû que le Soleil y entre par une fenêtre ou une porte. On pourra donc ſur mer, la placer ſous le *gaillard*, ou ſous la *dunette*, & par-tout ailleurs où le vent lui ſera moins contraire.

Solution

Solution de deux cas où la Machine elle-même peut empêcher la Lunette de recevoir les rayons du Soleil.

Comme le Soleil change continuellement de déclinaison, il arrivera deux fois par an, que l'équateur se trouvera précisément entre le Soleil & la lunette, ce qui rendroit à chaque fois la machine inutile pendant deux ou trois jours.

Pour parer cet inconvénient, il faudra changer la suspension de place, la mettant *un* ou *deux* degrés en avant ou en arriere; & pour corriger ce que ce changement aura produit, on reculera la déclinaison de la *chambre obscure*, d'autant de degrés qu'on aura avancé la suspension; & lorsque le Soleil aura suffisamment changé de déclinaison, pour que l'équateur ne soit plus un obstacle, on remettra les choses à leur place. Voilà pour le premier cas.

Le second est moins considérable, mais il peut arriver plus souvent. Pour rendre mes deux méridiens bien solides, j'ai cru devoir mettre une *entre-toise* de dix en dix degrés, ce qui fait 36 pour tout le tour. Il y en a quatre par conséquent, qui, en certains tems de l'année, pourront intercepter les rayons depuis onze heures & demie jusqu'à midi & demi *seulement*, tout le reste du jour étant libre: car la déclinaison étant de 23 degrés & demi de chaque côté, il y a deux entre-toises de part & d'autre qui seront dans le cas, (la cinquieme qui se trouve à l'intersection de l'équateur, ne devant pas être comptée).

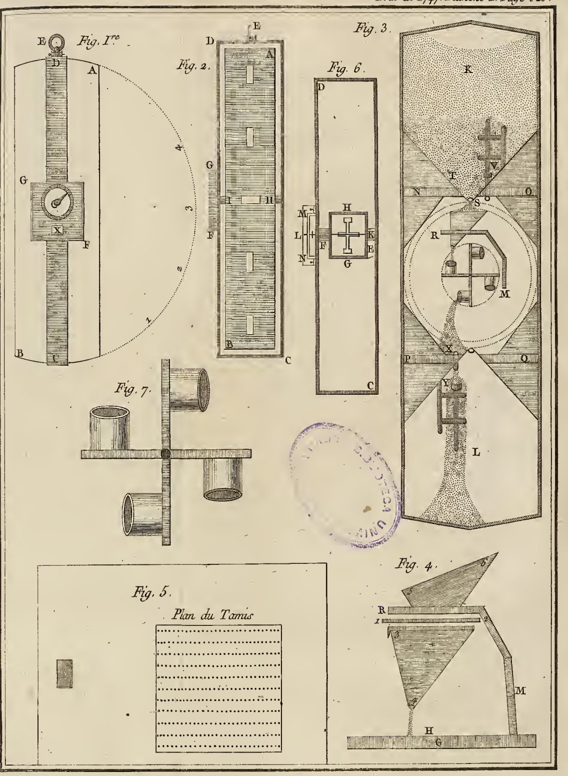
Il n'est plus tems que je songe à réparer cette faute sur mon méridien, mais on pourra l'éviter dans un autre, en faisant ces quatre entre-toises différentes des autres,

c'eſt-à-dire, qu'on les fera en vis, & qu'on leur deſtinera deux places à chacune, pour pouvoir les changer ſuivant que le cas l'exigera, en conſervant toûjours au méridien la ſolidité qu'il doit avoir.

Cependant on corrigera, *ſi l'on veut*, cet inconvénient, de la même maniere que le premier, en *avançant* la ſuſpenſion, & *reculant* la déclinaiſon de pareil nombre de degrés.... Je dis *ſi l'on veut*, parce que pouvant avoir les heures avant & après midi, on peut ſe paſſer de celle-là.

FIN.




Fig. Ire
E
D
A
G
X
F
B
C
4
3
2
1
Fig. 2.
D
E
A
G
I
H
F
B
C
Fig. 6.
D
H
M
L
K
F
E
N
G
C
Fig. 3.
K
V
T
N
S
O
R
M
X
P
Q
Y
L
Fig. 7.
Fig. 4.
R
1
2
3
M
H
G
Fig. 5.
Plan du Tamis

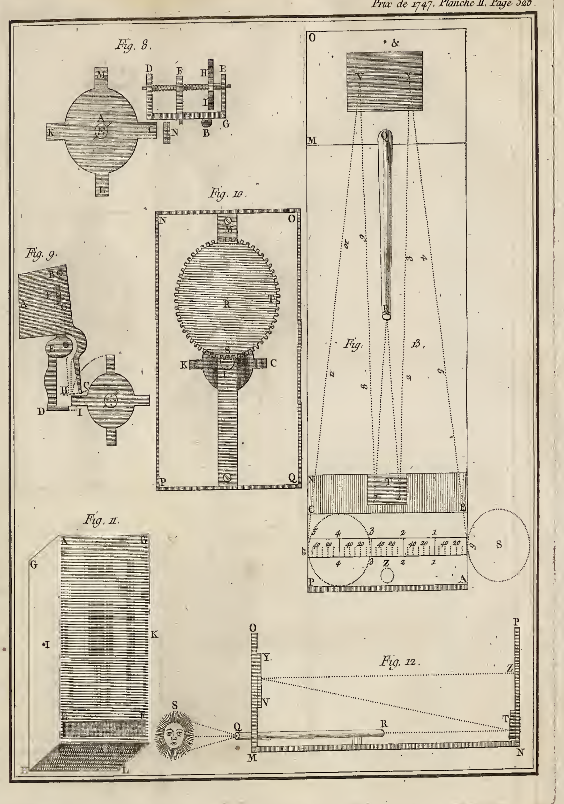
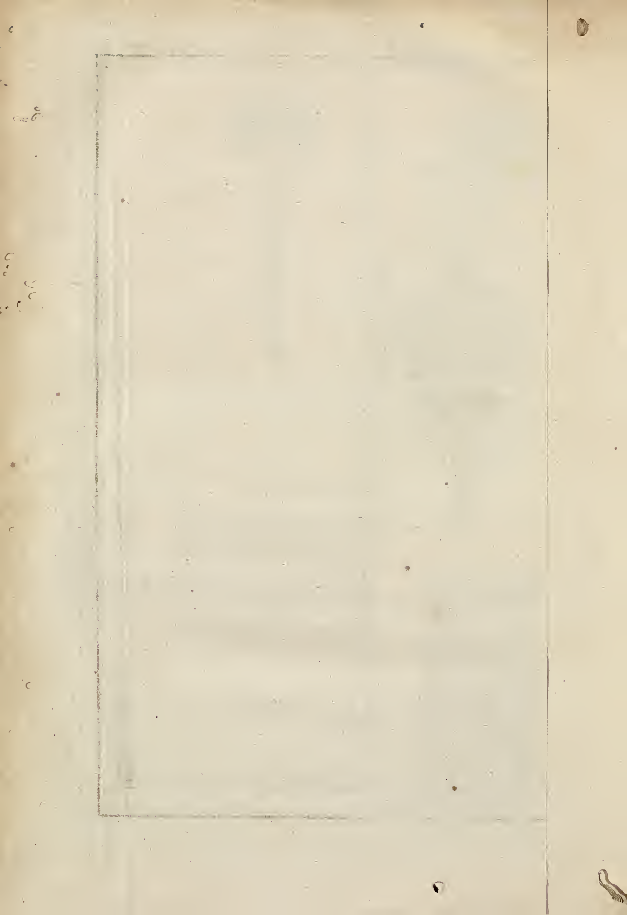
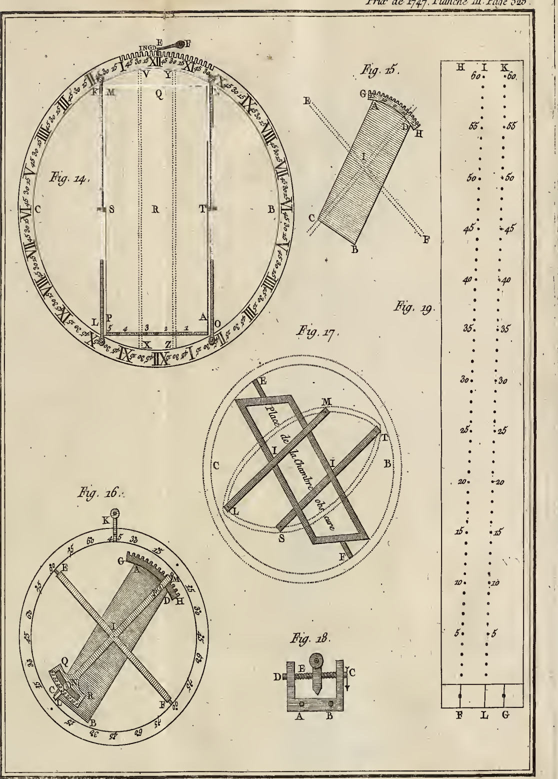
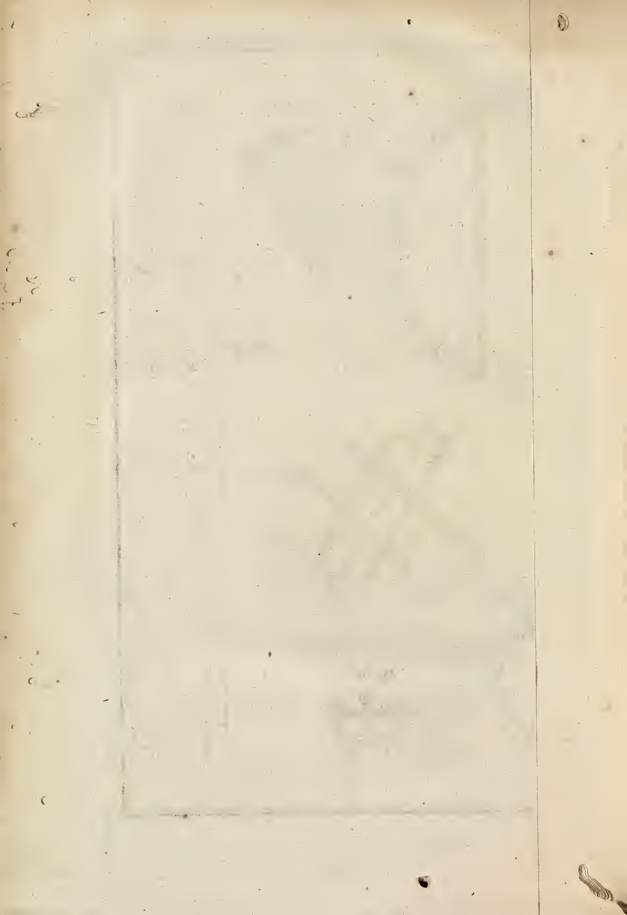


Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.




Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Place de la Chambre obscure



PIECE
QUI A REMPORTÉ
LE PRIX
DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES,
EN M. DCC. XLVIII.

Sur les Inégalités du Mouvement de Saturne & de Jupiter.

Selon la fondation faite par feu M. ROUILLÉ DE MESLAY, ancien Conseiller au Parlement.



A PARIS, rue S. Jacques.
Chez GABR. MARTIN, J. B. COIGNARD, & H. L. GUERIN, Libraires.

M. DCC. XLIX.



AVERTISSEMENT.

L'ACADEMIE avoit proposé pour sujet du Prix de l'année 1748, *une Théorie de Saturne & de Jupiter, par laquelle on puisse expliquer les Inégalités que ces deux Planetes paroissent se causer mutuellement, principalement dans le tems de leur Conjonction.* Elle a adjugé ce Prix à la Piece n° 3, qui a pour devise :

Ponderibus librata suis per inane profundum
Sidera, quò vis alma trahit retrahitque, sequuntur.

dont l'Auteur est M. Euler, de l'Académie des Sciences de Berlin.

La Piece qui a paru en approcher le plus, est celle n° 1, dont la devise est :

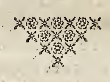
Labor improbus omnia vincit.

dont l'Auteur ne s'est pas fait connoître.

Quoique ces deux Ouvrages, & sur-tout celui qui remporte le Prix, soient remplis des plus profondes recherches, & dignes des plus grands éloges, il a paru à l'Académie que les Auteurs auroient pû tirer encore un plus grand parti de

leur travail, ſoit pour donner de nouveaux degrés de perfection aux ſolutions des Problèmes relatifs à la matiere propoſée, ſoit pour procurer, au moyen de ces ſolutions & d'un meilleur choix d'obſervations, de nouveaux ſecours à l'Aſtronomie, ou jetter un plus grand jour ſur le méchaniſme des corps céleſtes. Il ne ſuffit pas d'ailleurs, dans une matiere auſſi épineuſe, de ſe rendre ſeulement intelligible à ſes Juges ou à ceux qui ont déja réſolu les mêmes queſtions; il faut encore, pour contribuer de tout ſon pouvoir à l'avancement des Sciences, ſe mettre à la portée du plus grand nombre de Lecteurs qu'il eſt poſſible, en énonçant au moins les principaux raiſonnemens, & en indiquant les plus difficiles opérations des calculs.

Ces motifs joints à l'importance & à l'étendue de la matiere, ont engagé l'Académie à propoſer le même ſujet une ſeconde fois, pour le Prix de 1750; & elle croit devoir exiger des Auteurs qui travailleront déſormais pour les Prix, qu'ils entrent dans un détail ſuffiſant ſur la démonſtration des propoſitions qui ſerviront de baſe à leurs théories.



RECHERCHES

RECHERCHES
SUR LA QUESTION
DES
INÉGALITÉS DU MOUVEMENT
DE SATURNE ET DE JUPITER,

Sujet proposé pour le Prix de l'année 1748, par l'Académie Royale des Sciences de Paris.

Ponderibus librata suis per inane profundum
Sidera, quò vis alma trahit retrahitque sequuntur.

Par M. EULER, Professeur Royal de Mathématiques à Berlin, de l'Académie Impériale de S. Petersbourg, & des Sociétés Royales d'Angleterre & de Prusse.



RECHERCHES
SUR LA QUESTION
DES
INÉGALITÉS DU MOUVEMENT
DE SATURNE
ET DE JUPITER,

Sujet proposé pour le Prix de l'année 1748 ; par l'Académie Royale des Sciences de Paris.

Ponderibus librata suis per inane profundum
Sidera, quò vis alma trahit retrahitque sequuntur.

I.
EXPLICATION DU SUJET.

§.I. 'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES de Paris, propose pour sujet du Prix de l'année prochaine 1748,

Une Theorie de Saturne & de Jupiter, par laquelle on puisse expliquer les inégalités que ces deux Planetes paroissent se causer mutuellement, principalement vers le tems de leur conjonction.

Or dabord, il n'y a aucun doute, que l'Académie Royale n'ait en vûe la Théorie de Newton, fondée ſur la gravitation univerſelle, qu'on a trouvée juſqu'ici ſi admirablement bien d'accord avec tous les mouvemens céleſtes, que quelles que ſoient les inégalités qui ſe trouvent dans le mouvement des Planetes, on peut toûjours hardiment ſoûtenir, que l'attraction mutuelle des Planetes en eſt la cauſe. Donc ſi les Aſtronomes s'apperçoivent de quelques inégalités dans le mouvement de Saturne, on conclurra, avec bien de la vraiſemblance, qu'elles ſont cauſées par la force dont cette Planete eſt attirée vers le corps de Jupiter, qui non-ſeulement s'approche le plus de Saturne, mais ſurpaſſe auſſi en quantité de matiére, & par conſequent en force d'attraction ſi conſidérablement toutes les autres Planetes priſes enſemble, que l'effet de celles-ci ſera comme infiniment petit par rapport à celui de Jupiter. Par la même raiſon, la force de Saturne ſur Jupiter excede tant celle des autres Planetes, que pour déterminer les dérangemens auxquels le mouvement de Saturne & de Jupiter peut être aſſujeti, on pourra ſans faute, négliger les forces des autres Planetes.

§. II. Donc ſuivant cette Théorie, la cauſe des inégalités que les Aſtronomes on remarquées dans le mouvement de Saturne & de Jupiter, eſt manifeſte; & pour ſatisfaire à la queſtion propoſée, on n'aura qu'à déterminer le mouvement de trois corps qui s'attirent mutuellement en raiſon compoſée de celle de leurs maſſes, & de la raiſon inverſe des quarrés de leurs diſtances, & mettre enſuite à la place de l'un de ces trois corps le Soleil, & les corps de Saturne & de Jupiter au lieu des deux autres. Par-là, on voit que la queſtion propoſée ſe réduit à la ſolution d'un Problème purement méchanique: mais il faut auſſi avoüer que ce Problème eſt un des plus difficiles de

la méchanique, & dont on ne ſçauroit eſpérer une ſolution parfaite, à moins qu'on ne faſſe des progrès beaucoup plus conſidérables dans l'Analyſe. Cependant, puiſque le Soleil ſurpaſſe infiniment en grandeur les corps de Jupiter & de Saturne, & que ces Planetes ſe meuvent dans des orbites qui ne different pas beaucoup du cercle; ces circonſtances ſont très-propres à nous fournir une ſolution par approximation, qui ne laiſſera pas de nous éclaircir ſur ce ſujet autant qu'on puiſſe le ſouhaiter. C'eſt donc principalement à ce Problème que je m'attacherai, & je me flatte, qu'à l'aide de pluſieurs détours Analytiques, j'en viendrai tellement à bout, qu'on ne trouvera rien à déſirer au-delà ; bien que d'abord les difficultés qu'on y rencontre ſemblent preſque inſurmontables. Car pour peu qu'on s'enfonce dans cette recherche, on s'appercevra bientôt qu'elle eſt beaucoup plus difficile que celle du mouvement de la Lune, qu'on a jugée pourtant juſqu'ici, la plus difficile recherche de l'Aſtronomie.

§. III. M. Newton, en comparant les tems périodiques des Satellites de Saturne & de Jupiter à leurs diſtances, a trouvé que ſi l'on exprime la maſſe du Soleil par 1, celle de Jupiter ſera $= \frac{1}{1067}$, & celle de Saturne $= \frac{1}{3021}$. Donc mettant les ſignes ☉, ♃ & ♄ pour les maſſes du Soleil, de Jupiter & de Saturne; comme dans le calcul il n'entre que leur rapport, j'aurai ☉ $= 1$, ♃ $= \frac{1}{1067}$ & ♄ $= \frac{1}{3021}$. Outre ces élémens, il faut introduire dans le calcul les diſtances moyennes de ces deux Planetes au Soleil, avec les excentricités qu'elles auroient, ſi leur mouvement ſuivoit parfaitement les regles de Kepler, ſur leſquelles les Tables Aſtronomiques ſont conſtruites. Or, ſuppoſant la diſtance moyenne de la Terre au Soleil $= 100000$, les Tables marquent

	De Jupiter.	*De Saturne.*
La plus grande diſtance au Soleil	545176	1008390
La plus petite diſtance au Soleil................	495019	899626
Leur ſomme..............................	1040195	1908016
Leur différence...........................	50157	108764
Donc la diſtance moyenne...................	$520097\frac{1}{2}$	954008
Et l'excentricité ou la diſtance des foyers diviſée par le grand Axe....................	$= \frac{50157}{1040195}$	$\frac{108764}{1908016}$
Et partant le Logarithme de l'excentricité...	= 8,6832165	0,7559031

Il eſt vrai que ces diſtances ſeront un peu changées, par l'action mutuelle de ces Planetes, mais avant que je ſois en état de déterminer ces corrections, (puiſqu'elles ſeront fort petites) il n'y aura point de danger de me ſervir, en attendant, de ces nombres.

§. IV. Pour réuſſir mieux dans la recherche des inégalités dans le mouvement de ces deux Planetes, je ſuppoſerai que le mouvement de l'une eſt tout-à-fait conforme aux regles de Kepler; & je chercherai quels dérangemens doivent réſulter de l'action de celle-ci dans le mouvement de l'autre ; car on m'accordera aiſément, que les dérangemens qui ſe trouvent dans le mouvement de Jupiter, n'en produiſent pas de nouveaux dans le mouvement de Saturne; ou que les inégalités dans le mouvement de Saturne ſeront les mêmes, ſoit que Jupiter ſuive parfaitement les regles de Kepler, ou qu'il ſoit lui-même troublé par l'action de Saturne. Cela poſé, je n'aurai qu'à déterminer le mouvement d'une Planete, qui eſt ſollicitée tant vers le Soleil, que vers une autre Planete, qui décrit autour du Soleil une Ellipſe conformément à la Théorie de Kepler. Il eſt clair auſſi, que le même calcul ſervira à découvrir les inégalités de l'une & de l'autre de ces Planetes; & partant, pour mieux fixer les idées, j'appliquerai le calcul ſeulement à la recherche des inégalités du mouvement de Saturne, vû qu'elles ſont les plus remarquables.

§. V. Les choses qui rendent le calcul le plus embarrassant, sont 1°. La diversité des plans dans lesquels ces deux Planetes se meuvent. 2°. L'excentricité des orbites que ces Planetes décriroient, quand même elles ne se troubleroient pas mutuellement. Comme il seroit trop pénible de surmonter ces difficultés à la fois, je passerai par dégré; & je supposerai premierement les deux orbites, tant dans le même plan, que destituées d'excentricité; c'est-à-dire, l'orbite de Jupiter sera circulaire, & celle de Saturne le seroit aussi, s'il n'étoit sollicité que par la seule force du Soleil. Il est clair que cette considération nous fournira une espece d'inégalité dans le mouvement de Saturne, qui sera semblable dans la Lune à celle que les Astronomes nomment *Variation*. En second lieu, laissant les deux orbites dans le même plan, & celle de Jupiter circulaire, j'aurai égard à l'excentricité de Saturne, & je déterminerai les nouvelles inégalités qui en résultent. On sera peut-être surpris, de voir que celles-ci surpassent considérablement celles de la premiere hypothese. En troisieme lieu, je supposerai l'orbite de Jupiter excentrique, telle qu'elle l'est en effet, & cette circonstance fournira encore de nouvelles inégalités, qui même seront les plus considérables. Enfin, je considererai l'inclinaison mutuelle des deux orbites, & je tâcherai d'en déterminer tous les changemens successifs, avec le mouvement de la ligne des nœuds qui en résulte. Par ces recherches, je me flatte de satisfaire pleinement à la question proposée, d'autant plus que la plûpart de ceux qui travailleront sur cette matiere, se borneront, selon toute apparence, uniquement à la premiere hypothese, qui ne renferme pourtant que la moins considérable partie des inégalités qui se trouvent dans le mouvement de Saturne.

§. VI. Mais après avoir exactement déterminé par la

théorie toutes ces inégalités, feront-elles, me demandera-t-on, parfaitement d'accord avec les irrégularités que les Aftronomes découvrent actuellement dans le mouvement de ces deux Planetes, & principalement de Saturne? & fera-t-on par-là en état de déterminer pour chaque tems donné le lieu de cette planete, à moins d'une minute près? C'eft fans doute la Principale demande, & ce qui paroît avoir principalement porté l'Académie Royale des Sciences à propofer cette queftion. Pour moi, je n'ai point douté que les inégalités que la théorie m'a montrées, ne s'accordaffent parfaitement avec les obfervations, pourvû qu'on changeât un peu convenablement à ces nouvelles équations, les élémens des Tables ordinaires: & peut-être que d'autres qui entreprendront cette difcuffion, ne jugeront pas même néceffaire d'entrer dans cet examen. Auffi ai-je été bien furpris de voir, après avoir examiné un grand nombre d'obfervations, que les inégalités tirées de la théorie ne font pas fuffifantes pour expliquer toutes les irrégularités dont les obfervations font troublées; & qu'il s'y trouve même des inégalités d'une autre efpece, qui font prefqu'auffi grandes que celles qui viennent de l'action de Saturne. Je crois que cette remarque eft de la derniere importance dans l'Aftronomie, puifqu'elle nous donne à connoître que les forces que nous concevons dans le ciel, ne font pas les feules qni agiffent fur les Planetes, ou qu'elles ne fuivent pas exactement la loi que nous leur adjugeons.

§. VII. Or, bien que j'avoue franchement que je ne fuis pas en état d'expliquer parfaitement toutes les irrégularités qui fe trouvent dans le mouvement de Saturne, je crois pourtant pouvoir prétendre au Prix que l'Académie propofe, & même avec plus de droit que ceux qui ne fe font pas apperçus de cette infuffifance de la Théorie Newtonienne;

Newtonienne; & on conviendra aisément, que si cette théorie a besoin de quelque correction, ce doit être une recherche qui demande un beaucoup plus grand nombre d'exactes observations, & encore un plus long tems pour les examiner, & en corriger la théorie. Qu'il me soit permis cependant de découvrir mes pensées sur ce sujet. Ayant comparé fort soigneusement les observations de la Lune avec la théorie, j'ai trouvé que la distance de la Lune à la Terre n'est pas si grande qu'elle devroit être, selon la théorie : d'où il s'ensuit que la gravité de la Lune vers la Terre est un peu moindre, que selon la raison inverse des quarrés des distances : & quelques petites irrégularités dans le mouvement de la Lune, qu'on ne sçauroit expliquer par cette théorie, m'ont encore davantage confirmé dans ce sentiment. Il me semble donc que la proportion Newtonienne selon les quarrés des distances, n'est vraie qu'à peu près dans les forces des corps célestes, & que peut-être elle s'écarte d'autant plus de la vérité que les distances sont grandes. Dans ce cas, il n'y auroit donc pas lieu de s'étonner si le mouvement de Saturne étoit assujetti encore à d'autres inégalités qu'à celles qui sont causées par l'action de Jupiter : & il me paroît fort vraisemblable que l'action même de Jupiter sur le corps de Saturne, s'écarte considérablement de la raison inverse des quarrés des distances.

§. VIII. Si l'on croit que la gravitation universelle a une cause physique ou méchanique, on sera presque forcé d'accorder, qu'elle ne s'étend point à l'infini : & alors il faudra avoüer, que les forces des corps célestes décroissent davantage que selon la raison quarrée des distances, puisque cette raison les répandroit à l'infini : mais aussi ceux mêmes qui regardent tant l'attraction que la raison renversée des quarrés des distances, comme une propriété

eſſentielle de la matiere, ne ſçauroient nier cette irrégularité que je viens d'avancer. On attribue cette attraction réguliere originairement aux moindres molécules de la matiere ; & on ſe convaincra aiſément par le calcul, que les corps finis, s'ils ne ſont pas ſphériques, ne s'attirent plus ſuivant la même raiſon. Les plus grands Géometres de ce ſiecle ont démontré évidemment, que la gravité vers un corps ſphéroïdique, n'eſt ni conſtamment dirigée vers ſon centre, ni proportionelle *inverſe* aux quarrés des diſtances. Donc puiſque le corps de Jupiter eſt le plus applati de toutes les Planetes, ſa force attractive pourra conſidérablement différer de la raiſon établie, & la force du Soleil même pourra s'en écarter un peu. Enſuite, quand même la force du corps attirant ſeroit exactement conforme à cette raiſon, la figure du corps attiré y peut apporter quelque irrégularité, en tant que la direction moyenne de toutes les forces qui agiſſent ſur les parties de ce corps, ne paſſe pas par ſon centre de gravité, (d'où il doit naître un mouvement de rotation, ou une nutation de ſon axe) & que la force réſultante ſuit ordinairement une regle tout-à-fait différente, qu'il eſt difficile d'exprimer par une formule algébrique finie. Il me paroît donc très-probable, que les forces qui reglent le mouvement de Saturne, à cauſe de ſa figure biſarre, different aſſez conſidérablement de la loi générale.



I I.

Préparations aux Recherches ſuivantes.

§. IX. NONOBSTANT les réflexions que je viens de faire ſur l'irrégularité des forces qui agiſſent ſur Saturne, je ſuivrai dans mes recherches théoriques, exactement le ſyſtème d'attraction tel qu'il eſt adopté aujourd'hui par tous les Aſtronomes ; & je ſuppoſerai que les forces, tant du Soleil que des Planetes, décroiſſent préciſément dans la raiſon quarrée des diſtances, & qu'elles agiſſent ſur le centre de gravité des corps qui en ſont ſollicités. Car on ne ſçauroit s'appercevoir que ces forces ont beſoin de quelque correction, qu'en tant que les concluſions qu'on en tire ne ſeront pas d'accord avec les obſervations; & pour cet effet, on ſera abſolument obligé de s'attacher à cette hypothèſe, & d'en tirer toutes les inégalités qui doivent troubler le mouvement des corps céleſtes, pour être en état de les comparer avec les obſervations. Cette recherche étant donc de la derniere importance, ſe trouve également enveloppée de tant de difficultés, qu'avant de les ſurmonter, il ſera abſolument impoſſible de porter la théorie de l'Aſtronomie à un plus haut dégré de perfection. Et regardant la queſtion que l'Académie Royale vient de propoſer de ce côté-là, il faut avoüer que la derniere perfection de l'Aſtronomie dépend uniquement de ſon développement ; & les Aſtronomes lui doivent être infiniment redevables, ſi à cette occaſion quelqu'un eſt aſſez heureux pour trouver une complette ſolution de cette queſtion.

§. X. Dans l'Aſtronomie, il ne s'agit pas tant du

mouvement absolu des corps céleſtes, dont ils ſe meuvent actuellement, que de leur mouvement relatif, tel qu'il paroît à un Spectateur placé ſur un certain corps, bien qu'il ſoit lui-même en mouvement. Or, pour cet effet on choiſit le corps, par rapport auquel le mouvement cherché doit paroître le plus régulier, & c'eſt en conſéquence de cette regle, qu'on rapporte le mouvement des Planetes principales, & des Cometes au centre du Soleil, & qu'on cherche leur longitude & latitude héliocentriques : mais le mouvement de la Lune eſt rapporté au centre de la Terre, & celui des Satellites au centre de leur Planete principale. Suivant cette régle, on doit rapporter le mouvement de Saturne, quoiqu'il ſoit troublé par l'action de Jupiter, au centre du Soleil, puiſque le dérangement qui vient de Jupiter eſt fort petit. Or, parce que les forces céleſtes ſont réciproques, & que le Soleil éprouve les mêmes forces qu'il exerce ſur les Planetes, il eſt évident que le Soleil n'eſt pas en repos : donc pour déterminer juſtement le mouvement des Planetes par rapport au Soleil, il faudra tranſporter aux Planetes, tant le mouvement du Soleil, que les forces dont il eſt agité, mais ſuivant des directions contraires, comme on le fait en cherchant le mouvement de la Lune par rapport à la Terre.

§. XI. Puiſqu'on peut négliger dans la recherche préſente l'action des petites Planetes de Mars, de la Terre, de Vénus & de Mercure, nous n'aurons que trois corps à conſidérer, le Soleil, Jupiter & Saturne, deſquels trois corps chacun eſt ſuppoſé attirer vers ſoi les deux autres, en raiſon réciproque quarrée des diſtances. Donc ſuivant cette loi, Saturne eſt attiré vers le Soleil & vers Jupiter, & de même Jupiter vers le Soleil & Saturne : mais comme le Soleil eſt auſſi attiré vers Jupiter & Saturne, il

faudra tranſporter ces deux forces ſuivant des directions contraires, tant ſur Jupiter que ſur Saturne ; & il ſera queſtion de déterminer le mouvement de Saturne & de Jupiter, ces Planetes étant ſollicitées par les forces que je viens d'indiquer. Bien que ce Problème, conſidéré généralement, ſurpaſſe les forces de l'analyſe, & que quelques circonſtances qui s'y trouvent heureuſement, doivent ſervir à en tirer une ſolution par approximation : je commencerai pourtant mes recherches par un Problème encore plus général, qui roulera ſur la détermination d'un corps ſollicité par des forces quelconques, & ſuivant des directions quelconques. Je tâcherai de réduire la ſolution de ce Problème à des formules analytiques, qui me paroiſſent les plus propres pour en faire l'application au ſujet propoſé, & deſquelles je pourrai aiſément tirer les approximations qui conduiſent aux inégalités qui ſe trouvent tant dans le mouvement de Saturne, que dans celui de Jupiter. Car, quoique je ne conſidere dans ce Problême qu'un ſeul corps, on voit aiſément qu'on pourra enſuite mettre, tant Saturne que Jupiter, en ſa place, vû qu'il eſt ſuppoſé être ſollicité par des forces quelconques.

§. XII. Soit donc propoſé un corps quelconque, *Fig. I.* qui ſe trouve placé en P, dont on veut déterminer le mouvement, tel qu'il paroîtra à un Spectateur placé au point C, qui eſt regardé comme fixe. Comme ce mouvement peut ne ſe pas faire dans un même plan, qu'on choiſiſſe un plan à volonté, qui paſſe par le point C, pour y rapporter le mouvement en queſtion. Soit ACQ le plan de la Table, ce plan choiſi, auquel on abaiſſe du point P la perpendiculaire PQ, & ayant tiré les droites CQ, CP, il eſt clair qu'on connoîtra le mouvement du corps P, ſi à chaque moment donné on peut déterminer tant la direction & la grandeur de la ligne CQ, que l'angle QCP. Or,

pour déterminer la direction de la ligne CQ, je prends sur le plan ACQ une ligne droite fixe CA, qui passe par C, & l'angle ACQ donnera la direction de la droite CQ. Pour me servir des termes usités dans l'Astronomie, l'angle ACQ sera la longitude du corps P, l'angle QCP sa latitude, ou Boreale, ou Méridionale, selon que le corps P sera situé, ou au-dessus ou au-dessous du plan ACQ, & la ligne CQ sera sa distance raccourcie. L'on voit bien que je prends ces termes dans un sens plus général qu'on ne fait ordinairement dans l'Astronomie, où l'on n'applique ces noms qu'au plan de l'écliptique, au lieu qu'ici le plan ACQ peut être tout autre. Donc pour determiner le mouvement du corps P, il faudra pour chaque moment donné, déterminer 1°. sa longitude, ou l'angle ACQ. 2°. sa latitude, ou l'angle QCP, & 3°. sa distance raccourcie CQ.

§. XIII. Or, pour ce qui regarde la latitude, il faut à chaque instant connoître le plan dans lequel le corps P se meut; ce plan se détermine par le point C, & par la direction du mouvement du corps P. Soit donc la ligne C ☊ l'intersection de ce plan avec le plan fixe ACQ, laquelle représentera la ligne des nœuds, qui, conjointement avec l'angle de l'inclinaison de ces deux plans, fera connoître l'obliquité du mouvement par rapport au Plan fixe ACQ. Car tant que ni la position de la ligne CQ ni l'angle de l'inclinaison ne changera point, le mouvement du corps se fera dans le même plan, passant par le point C, & dès que le mouvement s'écartera de ce plan, il arrivera d'abord quelque changement, tant dans la position de la ligne des nœuds C ☊, que dans l'inclinaison mutuelle. C'est pour cette raison que les Astronomes sont accoutumés de représenter le mouvement de la Lune en latitude, en déterminant pour chaque tems donné, tant la position de la ligne des

nœuds, que l'inclinaiſon de l'orbite de la Lune au plan de l'écliptique. Je ſuivrai donc la même méthode, & au lieu de la latitude, je tâcherai de déterminer à chaque moment la poſition de la ligne des nœuds $C☊$ avec l'inclinaiſon de l'orbite du corps P au plan fixe ACQ; puiſque ces choſes étant connues, il ſera aiſé de trouver la latitude ou l'angle QCP. On pourroit entreprendre la ſolution de ce Problème par pluſieurs autres méthodes: mais celle que je viens d'indiquer, paroît la plus convenable pour l'uſage de l'Aſtronomie.

§. XIV. Soit donc ſuppoſé toûjours dans la ſuite de ce Diſcours, la longitude ou l'angle $ACQ = \varphi$, la diſtance raccourcie $CQ = z$; la longitude du nœud aſcendant, ou l'angle $AC☊ = \pi$, l'inclinaiſon préſente de l'orbite du corps P au plan fixe $ACQ = \rho$: & il eſt clair qu'on connoîtra parfaitement le mouvement du corps P, ſi l'on peut à chaque tems propoſé, déterminer la longitude de la ligne $CQ = z$ & les trois angles φ, π, & ρ. Car, faiſant la latitude, ou l'angle $QCP = \psi$, on verrra aiſément, que $tang.\ \psi = tang.\ \rho\ ſin.\ (\varphi - \pi)$, ſuppoſant toûjours le ſinus total $= 1$, ou que cette proportion a lieu: *Comme le ſinus total eſt au ſinus de l'angle* $\varphi - \pi = ☊CQ$, *ainſi la tangente de l'inclinaiſon* ρ *ſera à la tangente de la latitude cherchée* ψ. La plûpart du calcul roulera donc ſur les angles, que j'introduirai eux-mêmes dans le calcul, en marquant leurs *ſinus*, *coſinus*, *tangentes*, *cotangentes*, par les caracteres *ſin.* *coſ.* *tang.* & *cot.* miſes devant les lettres qui expriment les angles. Cela abregera très-conſidérablement le calcul, ſur-tout dans les intégrations & différenciations: or, comme cette maniere d'opérer n'eſt pas encore reçue généralement, il ſera à propos d'avertir que les différentielles des formules $ſin.\ \varphi : coſ.\ \varphi : tang.\ \varphi : cot.\ \varphi$ ſont $d\varphi\ coſ.\ \varphi : -d\varphi\ ſin.\ \varphi : \frac{d\varphi}{coſ.\ \varphi^2}$ & $-\frac{d\varphi}{ſin.\ \varphi^2}$: où il faut auſſi

remarquer que *cof.* φ^2 marque le quarré du cofinus de l'angle φ, & *fin.* φ^2 le quarré du finus de l'angle φ, & non pas le cofinus ou le finus du quarré de l'angle : ce qui fuffira pour l'intelligence des calculs fuivans.

§. XV. La détermination de ces quantités z, φ, π & ρ dépend des forces dont le corps P eft follicité : or, quelles que foient les forces qui agiffent fur le corps P, on les pourra toûjours réduire à trois directions, dont l'une fuivant PQ, eft perpendiculaire fur le plan ACQ, & les deux autres paralleles à ce même plan, fçavoir fuivant QC & QN normale à QC. Soit donc P la force qui agit fur le corps P fuivant la direction parallele à QC : foit enfuite Q la force qui agit fuivant une direction parallele à QN, & enfin R la force qui tire le corps P fuivant la direction PQ. Or il faut remarquer que ces trois forces P, Q, & R fignifient ici des forces accélératrices, qui réfultent de la divifion des forces motrices par la maffe du corps P, fur lequel elles agiffent. L'action d'une telle force fe détermine par les principes de la Méchanique, par le moyen de la viteffe du corps : mais puifqu'il n'eft pas convenable d'introduire la viteffe dans le calcul, j'y ferai entrer en fa place le tems écoulé, que j'appelle t; & pour cet effet, fi le corps a déja parcouru l'efpace $=s$ fuivant fa direction, felon laquelle il eft follicité par la force accélératrice V, en fuppofant l'élément du tems dt conftant, les regles ordinaires nous fourniront cette formule : $dds=\frac{1}{2}Vdt^2$. Comme on s'affurera aifément de la vérité de cette formule, il feroit fuperflu de m'arrêter à l'explication de l'analyfe, qui m'a fourni les équations fuivantes, par lefquelles les quantités en queftion z, φ, π & ρ font déterminées.

§. XVI. Ces équations, qui renferment la détermination du mouvement du corps P, follicité par les trois

forces

forces mentionnées, P, Q, & R, en ſuppoſant l'élément du tems dt conſtant, ſeront les quatre ſuivantes:

$$\text{I. } ddz - zd\varphi^2 = -\tfrac{1}{2}Pdt^2.$$

$$\text{II. } 2dzd\varphi + zdd\varphi = -\tfrac{1}{2}Qdt^2.$$

$$\text{III. } d\pi = \frac{dt^2 \, \text{ſin.}\,(\varphi-\pi)}{2zd\varphi}\left(P\,\text{ſin.}\,(\varphi-\pi) + Q\,\text{coſ.}\,(\varphi-\pi) - \frac{R\,\text{coſ.}\,\rho}{\text{ſin.}\,\rho}\right).$$

$$\text{IV. } d.\,l\,\text{tang.}\,\rho = \frac{dt^2 \, \text{coſ.}\,(\varphi-\pi)}{2zd\varphi}\left(P\,\text{ſin.}\,(\varphi-\pi) + Q\,\text{coſ.}\,(\varphi-\pi) - \frac{R\,\text{coſ.}\,\rho}{\text{ſin.}\,\rho}\right).$$

Dont les deux premieres ſerviront à déterminer pour chaque tems donné t, les quantités z & φ, qui étant connues, la troiſieme donnera l'angle π, ou la poſition de la ligne des nœuds pour ce même tems; & enfin la quatrieme, l'inclinaiſon ρ de l'orbite du corps P au plan ACQ, où il eſt à remarquer que $d.\,l\,\text{tang.}\,\rho$ ſignifie la différentielle du logarithme de la tangente de l'angle ρ: ou puiſque $d.\,\text{tang.}\,\rho = \frac{d\rho}{\text{coſ.}\,\rho^2}$, on aura, $d.\,l\,\text{tang.}\,\rho = \frac{d.\,\text{tang.}\,\rho}{\text{tang.}\,\rho}$ $= \frac{d\rho}{\text{tang.}\,\rho\,\text{coſ.}\,\rho^2} = \frac{d\rho}{\text{ſin.}\,\rho\,\text{coſ.}\,\rho}$ à cauſe que $\text{tang.}\,\rho = \frac{\text{ſin.}\,\rho}{\text{coſ.}\,\rho}$. C'eſt donc uniquement de la réſolution de ces quatre équations différentio-différentielles, que dépend la ſolution du Problème propoſé en général.

§. XVII. Pour appliquer cette ſolution générale à la recherche que j'ai en vûe, ſuppoſons Saturne le corps propoſé, dont il faut chercher le mouvement, placé en ♄. Et que le plan conſtant ACQ, auquel je rapporterai le mouvement de Saturne, ſoit celui de l'orbite de Jupiter A ♃, puiſque je fais ici abſtraction des inégalités de Jupiter, ſur-tout de celles qui l'obligent de s'écarter de ſon plan. De plus, que le point fixe de ce plan où je ſuppoſe placé le Spectateur, ſoit le centre du Soleil en ☉. Soit outre cela ☉ AB une droite tirée dans ce plan, du Soleil vers un point fixe du *Fig. II.*

ciel, par exemple, vers le commencement du Belier, d'où l'on estime les longitudes; & soit ☉ ☊ la ligne des nœuds de l'orbite de Saturne sur celle de Jupiter. Qu'on abbaisse, comme ci-devant, du point ♄, sur le plan A ☉ Q la perpendiculaire ♄ Q, & ayant tiré les droites ☉ ♄ & ☉ Q, qu'on nomme la distance raccourcie de Saturne au Soleil ☉ $Q = z$, sa longitude ou l'angle A ☉ $Q = \varphi$, sa latitude ou l'angle ♄ ☉ $Q = \psi$: soit encore la longitude du nœud ou l'angle A ☉ ☊ $= \pi$, & l'inclinaison de l'orbite de Saturne sur celle de Jupiter $= \rho$. Soit outre cela, pour le mouvement de Jupiter, que je suppose connu, sa longitude ou l'angle A ☉ ♃ $= \theta$, & sa distance au Soleil ☉ ♃ $= y$. De-là l'élongation de Saturne & de Jupiter sera exprimée par l'angle Q ☉ ♃ $= \theta - \varphi$, que j'indiquerai pour abréger par ω; de sorte que $\omega = \theta - \varphi$. Cela posé, j'aurai la longitude de la droite ♃ $Q = \surd(zz + yy - 2yz\, cof.\, \omega)$, & puisque Q ♃ $= z\, tang.\, \psi$, il en résultera, que ♃ ♄ $= \surd(zz + yy - 2yz\, cof.\, \omega + zz\, tang.\, \psi^2)$, ou bien ♃ ♄ $= \surd\left(\frac{zz}{cof.\, \psi^2} + yy - 2yz\, cof.\, \omega\right)$, que je nomme v, de sorte que $v = \surd\left(\frac{zz}{cof.\, \psi^2} + yy - 2yz\, cof.\, \omega\right) =$ ♃ ♄.

§. XVIII. Soient maintenant les masses, ou les forces absolues du Soleil, de Jupiter & de Saturne exprimées par ☉, ♃, & ♄, que ces corps exercent à la même distance $= 1$. On verra d'abord que Saturne sera immédiatement sollicité par deux forces, dont l'une dirigée vers le Soleil selon ♄ ☉ sera $= \frac{☉}{☉ ♄^2} = \frac{☉\, cof.\, \psi^2}{zz}$, à cause que ☉ ♄ $= \frac{z}{cof.\, \psi}$; & l'autre dirigée vers Jupiter selon ♄ ♃ sera $= \frac{♃}{♄ ♃^2} = \frac{♃}{vv}$. Mais le Soleil étant lui-même sollicité premierement vers le corps de Jupiter, dans la

direction ⊙ ♃ avec une force accélératrice $= \frac{\text{♃}}{\odot \text{♃}^2}$ $= \frac{\text{♃}}{yy}$, & ensuite vers Saturne dans la direction ⊙ ♄, avec une force $= \frac{\text{♄}}{\odot \text{♄}^2} = \frac{\text{♄} \cos.\psi^2}{zz}$, afin que je le puisse considérer comme en repos, il faut transporter ces forces dans un sens contraire au corps de Saturne. Tirant donc la droite *Q R* parallele à ♃ ⊙, le corps de Saturne sera sollicité, outre les deux forces supérieures, encore dans la direction *Q R*, par une force $= \frac{\text{♃}}{yy}$, & dans la direction ♃ ⊙ par une force $= \frac{\text{♄} \cos.\psi^2}{zz}$. Et partant Saturne doit être considéré comme sollicité par quatre forces, qui se réduisent aux trois suivantes.

I. Une force dans la direction ♄ ⊙ $= \frac{(\odot + \text{♄}) \cos.\psi^2}{zz}$.

II. Une force dans la direction ♄ ♃ $= \frac{\text{♃}}{vv}$.

III. Une force dans la direction *Q R* $= \frac{\text{♃}}{yy}$.

Ce sera donc de ces trois forces que dépendra le mouvement apparent de Saturne, tel qu'il paroîtra à un Spectateur placé dans le centre du Soleil.

§. XIX. Décomposons maintenant ces trois forces, suivant les directions ♄ *Q*, *Q* ⊙ & *QN*, pour avoir les valeurs des forces P, *Q*, *R*. La premiére donnera par cette résolution pour la direction ♄ *Q*, $\frac{(\odot + \text{♄}) \sin.\psi \cos.\psi^2}{zz}$; pour la direction *Q* ⊙, $\frac{(\odot + \text{♄}) \cos.\psi^3}{zz}$. La seconde donne pour la direction ♄ *Q*, la force $\frac{\text{♄} Q}{\text{♃} \text{♄}} \cdot \frac{\text{♃}}{vv} = \frac{\text{♃} z \,\mathrm{tang.}\psi}{v^3}$, & pour la direction *Q* ♃ $= \frac{Q \text{♃}}{\text{♃} \text{♄}} \cdot \frac{\text{♃}}{vv}$, laquelle se réduit encore en ces deux-ci :

pour la direction *Q* ⊙, $\frac{Q \odot}{\text{♃} \text{♄}} \cdot \frac{\text{♃}}{vv} = \frac{\text{♃} z}{v^3}$; pour la direction *Q R*, $\frac{-\odot \text{♃}}{\text{♃} \text{♄}} \cdot \frac{\text{♃}}{vv} = \frac{-\text{♃} y}{v^3}$. Celle-ci jointe à la

troisieme, donnera pour la direction QR, la force $= \frac{♃}{yy} - \frac{♃ y}{v^3}$; qui, à cause de l'angle $\odot QR = Q \odot ♃ = \omega$, donnera enfin,

pour la direction $Q \odot$, $\frac{♃ \cos. \omega}{yy} - \frac{♃ y \cos. \omega}{v^3}$; & pour QN, $\frac{♃ \sin. \omega}{yy} - \frac{♃ y \sin. \omega}{v^3}$.

Par conséquent les forces P, Q, R, dont j'ai besoin dans le calcul, seront:

$$P = \frac{(\odot + ♄) \cos. \psi^3}{zz} + \frac{♃ z}{v^3} + \frac{♃ \cos. \omega}{yy} + \frac{♃ y \cos. \omega}{v^3}$$

$$Q = \frac{♃ \sin. \omega}{yy} - \frac{♃ y \sin. \omega}{v^3}$$

$$R = \frac{(\odot + ♄) \sin. \psi \cos. \psi^2}{zz} + \frac{♃ z \,\mathrm{tang.}\, \psi}{v^3}.$$

§. XX. Ces valeurs étant remises dans les équations différentio-différentielles précédentes, le mouvement de Saturne, à cause que $\omega = \theta - \varphi$, sera déterminé par les quatre équations suivantes.

$$\text{I. } ddz - zd\varphi^2 = -\tfrac{1}{2}dt^2 \left(\frac{(\odot + ♄)\cos. \psi^3}{zz} + \frac{♃ z}{v^3} + \frac{♃ \cos. \omega}{yy} - \frac{♃ y \cos. \omega}{v^3} \right)$$

$$\text{II. } 2dzd\varphi + zdd\varphi = -\tfrac{1}{2}dt^2 \left(\frac{♃ \sin. \omega}{yy} - \frac{♃ y \sin. \omega}{v^3} \right)$$

$$\text{III. } d\pi = \frac{dt^2 \sin.(\varphi - \pi)}{2zd\varphi} \left(\frac{♃ \sin.(\theta - \pi)}{yy} - \frac{♃ y \sin.(\theta - \pi)}{v^3} \right)$$

$$\text{IV. } d\, l\, \mathrm{tang.}\, \rho = \frac{dt^2 \cos.(\varphi - \pi)}{2zd\varphi} \left(\frac{♃ \sin.(\theta - \pi)}{yy} - \frac{♃ y \sin(\theta - \pi)}{v^3} \right).$$

Or, pour rendre ces équations plus propres pour l'usage de l'Astronomie, au lieu du tems dt, j'introduirai l'anomalie moyenne de Jupiter, (que j'appelle ζ), puisqu'elle est proportionnelle au tems, & en peut servir de mesure. Mais supposant la distance moyenne de Jupiter au Soleil $= a$, & exprimant son mouvement par des expressions semblables, sans pourtant avoir égard aux dérangemens causés par Saturne, on trouvera qu'il faut mettre $\frac{dt^2}{2} = \frac{a^3 d\zeta^2}{\odot}$. Soit ensuite $\frac{♃}{\odot} = n = \frac{1}{1067}$ & $\frac{♄}{\odot} = \nu = \frac{1}{3021}$, & les

équations trouvées ſe changeront en celles-ci :

$$\text{I. } ddz - zd\varphi^2 = -a^3 d\zeta^2 \left(\frac{(1+\nu)\operatorname{cof.}\psi^3}{zz} + \frac{nz}{v^3} + \frac{n\operatorname{cof.}\omega}{yy} - \frac{ny\operatorname{cof.}\omega}{v^3} \right)$$

$$\text{II. } 2dzd\varphi + zdd\varphi = -na^3 d\zeta^2 \operatorname{fin.}\omega \left(\frac{1}{yy} - \frac{y}{v^3} \right)$$

$$\text{III. } d\pi = \frac{na^3 d\zeta^2 \operatorname{fin.}(\varphi - \pi)\operatorname{fin.}(\theta - \pi)}{z\,d\varphi} \left(\frac{1}{yy} - \frac{y}{v^3} \right)$$

$$\text{IV. } d.\,l\,\operatorname{tang.}\rho = \frac{na^3 d\zeta^2 \operatorname{cof.}(\varphi - \pi)\operatorname{fin.}(\theta - \pi)}{z\,d\varphi} \left(\frac{1}{yy} - \frac{y}{v^3} \right)$$

où l'élément de l'anomalie moyenne de Jupiter $d\zeta$, eſt à préſent ſuppoſé conſtant.



III.

Recherches du Mouvement de Saturne, dans l'hypotheſe que les deux orbites ſoient dans le même plan, & l'une & l'autre deſtituées d'excentricité.

§. XXI. DE'S que nous ſuppoſons que le mouvement de Saturne ſe fait dans le plan de l'orbite de Jupiter, non-ſeulement l'angle ψ deviendra $=0$, & partant $cof.\,\psi = 1$, mais auſſi les deux dernieres équations s'en iront du calcul, de ſorte que dans ce cas, le mouvement de Saturne ſera exprimé par ces deux équations:

$$\text{I. } ddz - zd\varphi^2 = -a^3 d\zeta^2 \left(\frac{1+\nu}{zz} + \frac{nz}{v^3} + \frac{n\,cof.\,\omega}{yy} - \frac{ny\,cof.\,\omega}{v^3} \right).$$

$$\text{II. } 2dzd\varphi + zdd\varphi = -na^3 d\zeta^2 fin.\,\omega \left(\frac{1}{yy} - \frac{y}{v^3} \right),$$

& la valeur de la lettre v ſera $v = \sqrt{(yy + zz - 2yz\,cof.\,\omega)}$. Mais puiſque je ſuppoſe outre cela l'orbite de Jupiter circulaire, ſa diſtance au Soleil ſera conſtamment $y = a$, & ſon mouvement uniforme, & égal au mouvement de ſon anomalie moyenne, ce qui donne $d\theta = d\xi$, & partant $d\omega = -d\varphi + d\zeta$ à cauſe de $\omega = \theta - \varphi$: & $v = \sqrt{(aa - 2az\,cof.\,\omega + zz)}$. Par conſéquent, dans cette ſeconde hypotheſe, les équations trouvées ſe changeront en:

$$\text{I. } ddz - zd\varphi = -a^3 d\zeta^2 \left(\frac{1+\nu}{zz} + \frac{nz}{v^3} + \frac{n\,cof.\,\omega}{aa} - \frac{na\,cof.\,\omega}{v^3} \right).$$

$$\text{II. } 2dzd\varphi + zdd\varphi = -na^3 d\zeta^2 fin.\,\omega \left(\frac{1}{aa} - \frac{a}{v^3} \right).$$

La troiſieme hypotheſe demande que l'orbite de Saturne n'ait point d'excentricité, ou que ſon mouvement ſe faſſe

uniformément dans un cercle, en mettant à part l'action de Jupiter ; de forte que le défaut d'uniformité ne venant que de cette action, sera par conséquent fort petit, & s'évanoüiroit tout-à-fait, si la force de Jupiter ou la lettre n étoit $= 0$.

§. XXII. Si la lettre f marque la distance moyenne de Saturne au Soleil, sa véritable distance z n'en différera que fort peu, & l'excès ou le défaut dépendra de la valeur de n. Je mettrai donc $z = f(1 + nr)$, où nr sera une fraction extremement petite, dont on pourra sûrement négliger les puissances dans le calcul ; & l'on voit bien que la valeur de r dépendra uniquement de l'angle ω, sous lequel Saturne paroît éloigné de Jupiter étant vû du Soleil. De plus, l'uniformité du mouvement de Saturne ne sera troublée que presqu'insensiblement ; & la raison de $d\varphi$ à $d\zeta$ sera presque constante. Donc si nous faisons $d\varphi = m\,d\zeta + n\,dx$, le terme $n\,dx$ sera extremement petit, par rapport au terme $m\,d\zeta$, & dépendra aussi uniquement de l'angle ω. Or, dans les termes des équations trouvées, qui sont extremement petits d'eux-mêmes, ou qui sont multipliés par $n = \frac{1}{1067}$, on pourra hardiment rejetter ces petites quantités nr ou ndx, & faire $d\varphi = m\,d\zeta$ & $d\omega = (1 - m)\,d\zeta$. Ayant donc $dd\varphi = n\,ddx$; $d\varphi^2 = m^2 d\zeta^2 + 2mn\,d\zeta\,dx$ (omettant le quarré de n) $z = f(1 + nr)$, $dz = nf\,dr$ & $ddz = nf\,ddr$, les équations précédentes se changeront en :

$$\text{I. } nfddr - m^2 f d\zeta^2 - 2mnfd\zeta dx - m^2 nfr d\zeta^2 = \frac{-(1+\nu)a^3 d\zeta^2}{ff(1+nr)^2} - \frac{na^3 f d\zeta^2}{v^3} - na\,d\zeta^2 \cos.\omega + \frac{na^4 d\zeta^2 \cos.\omega}{v^3}$$

$$\text{II. } 2mnfd\zeta dr + nfddx = -na\,d\zeta^2 \sin.\omega + \frac{na^4 d\zeta^2 \sin.\omega}{v^3}.$$

Et comme v ne se trouve que dans les termes qui sont extremement petits, ou multipliés par n, on y pourra



fuppofer $z = f$, & on aura $v = \sqrt{(aa + ff - 2af\,cof.\,\omega)}$.

§. XXIII. Mettons pour $\frac{1}{(1+nr)^2}$ fa valeur approchée $1 - 2nr$, & fuppofons $f = \lambda a$, de forte que $v = a\sqrt{(1 + \lambda\lambda - 2\lambda\,cof.\,\omega)}$, & nos équations prendront les formes fuivantes :

$$\text{I. } m^2 d\zeta + 2mn\,dx + m^2 nr\,d\zeta - \frac{n\,ddr}{d\zeta} = \frac{(1+\nu)\,d\zeta}{\lambda^3} - \frac{2n(1+\nu)\,r\,d\zeta}{\lambda^3} + \frac{n\,d\zeta\,cof.\,\omega}{\lambda} + \frac{n\,d\zeta(\lambda - cof.\,\omega)}{\lambda(1+\lambda\lambda-2\lambda\,cof.\,\omega)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\text{II. } 2m\,dr + \frac{ddx}{d\zeta} = \frac{-d\zeta\,fin.\,\omega}{\lambda} + \frac{d\zeta\,fin.\,\omega}{\lambda(1+\lambda\lambda-2\lambda\,cof.\,\omega)^{\frac{3}{2}}}.$$

Soit maintenant pour abréger davantage, $\frac{2\lambda}{1+\lambda\lambda} = g$; & $\lambda(1+\lambda\lambda)^{\frac{3}{2}} = h$, & nous aurons :

$$\text{I. } m^2 d\zeta + 2mn\,dx + m^2 nr\,d\zeta - \frac{n\,ddr}{d\zeta} = \frac{(1+\nu)\,d\zeta}{\lambda^3} - \frac{2nr\,d\zeta}{\lambda^3} + \frac{n\,d\zeta\,cof.\,\omega}{\lambda} + \frac{n\,d\zeta(\lambda - cof.\,\omega)}{h(1-g\,cof.\,\omega)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\text{II. } 2m\,dr + \frac{ddx}{d\zeta} = \frac{-d\zeta\,fin.\,\omega}{\lambda} + \frac{d\zeta\,fin.\,\omega}{h(1-g\,cof.\,\omega)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour profiter de ces équations, la plus grande difficulté fe rencontre dans la formule irrationnelle $(1 - g\,cof.\,\omega)^{\frac{3}{2}}$, laquelle ne fe peut réfoudre dans une fuite convergente, vû que la valeur de g eft environ $= \frac{4}{5}$. Cette circonftance m'a fait croire d'abord, qu'il faudroit abfolument garder dans le calcul cette formule irrationnelle, ce qui rendroit la folution prefque impraticable, vû qu'on feroit obligé de trouver les valeurs intégrales par la mefure des aires des lignes courbes; ce qui donneroit une approximation fort pénible, & pas trop fûre.

§. XXIV. Il eft vrai que la derniere équation, à caufe de $d\omega = (1 - m)\,d\zeta$, peut être intégrée fans qu'on ait befoin de réfoudre la formule irrationnelle $(1 - g\,cof.\,\omega)^{\frac{3}{2}}$; mais cette intégration ne fervira guere dans la premiere

équation,



équation, à moins qu'on ne veuille recourir au calcul des aires des lignes courbes, méthode qui, quoiqu'elle ſoit praticable dans l'hypotheſe préſente, ne feroit d'aucun uſage, quand on aura égard à l'excentricité de l'une ou de l'autre orbite. Cette circonſtance m'oblige de faire une digreſſion au ſujet de la formule $(1 - g \cos. \omega)^{-\frac{1}{2}}$, que j'enviſagerai ſous une forme un peu plus générale, ſçavoir, $(1 - g \cos. \omega)^{-\mu}$, dont la réſolution, ſuivant les regles ordinaires, eſt :

$$(1 - g \cos. \omega)^{-\mu} = 1 + \frac{\mu}{1} g \cos. \omega + \frac{\mu(\mu+1)}{1.\ 2} g^2 \cos. \omega^2 + \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{1.\ 2.\ 3} g^3 \cos. \omega^3 + \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} g^4 \cos. \omega^4 + \&c.$$

mais cette ſuite n'eſt pas propre à mon deſſein, tant parce qu'elle n'eſt pas aſſez convergente, que parce qu'elle renferme des puiſſances du cof. ω. Quant à ce dernier inconvénient, on y pourra remédier en réduiſant les puiſſances du coſinus de l'angle ω, à des coſinus des angles multiples, ſelon les regles ſuivantes, fondées ſur celles de la Trigonométrie :

$$\cos. \omega = \cos. \omega$$

$$2 \cos. \omega^2 = \cos. 2\omega + \tfrac{1}{2} . \tfrac{2}{1}$$

$$4 \cos. \omega^3 = \cos. 3\omega + \tfrac{3}{1} \cos. \omega$$

$$8 \cos. \omega^4 = \cos. 4\omega + \tfrac{4}{1} \cos. 2\omega + \frac{1}{2} . \frac{4.\ 3}{1.\ 2}$$

$$16 \cos. \omega^5 = \cos. 5\omega + \tfrac{5}{1} \cos. 3\omega + \frac{5.\ 4}{1.\ 2} \cos. \omega$$

$$32 \cos. \omega^6 = \cos. 6\omega + \tfrac{6}{1} \cos. 4\omega + \frac{6.\ 5}{1.\ 2} \cos. 2\omega + \frac{1}{2} . \frac{6.\ 5.\ 4}{1.\ 2.\ 3}$$

$$64 \cos. \omega^7 = \cos. 7\omega + \tfrac{7}{1} \cos. 5\omega + \frac{7.\ 6}{1.\ 2} \cos. 3\omega + \frac{7.\ 6.\ 5}{1.\ 2.\ 3} \cos. \omega$$

$$\&c.$$

où la loi de la progreſſion eſt manifeſte, ſi l'on remarque ſeulement que les termes abſolus ou conſtans, ſont tous multipliés par $\frac{1}{2}$.

§. XXV. Ayant fait ces fubftitutions, comme l'expreffion devient trop compliquée, fuppofons qu'on trouve :

$$(1-g\cos.\omega)^{-\mu} = A + B\cos.\omega + C\cos.2\omega + D\cos.3\omega + E\cos.4\omega + F\cos.5\omega + G\cos.6\omega + H\cos.7\omega + \&c.$$

& on parviendra aux valeurs fuivantes des lettres A, B, C, D, E, &c.

$$A \ldots\ldots = 1 + \frac{2}{4}\cdot\frac{\mu(\mu+1)}{1.\,2}g^2 + \frac{4.\,3}{4.\,8}\cdot\frac{\mu(\mu+1)}{1.\,2.}\frac{(\mu+2)}{3.}\frac{(\mu+3)}{4}g^4 + \frac{6.\,5.\,4}{4.\,8.\,12}\cdot\frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+5)}{1.\,2\ldots\ldots 6}g^6 + \&c.$$

$$B = \frac{\mu}{1}g\left(1 + \frac{3}{4}\cdot\frac{(\mu+1)}{2.}\frac{(\mu+2)}{3}g^2 + \frac{5.\,4}{4.\,8}\cdot\frac{(\mu+1)}{2.}\frac{(\mu+2)}{3.}\frac{(\mu+3)}{4}\frac{(\mu+4)}{5}g^4 + \frac{7.\,6.\,5}{4.\,8.\,12.}\frac{(\mu+1)}{2.}\frac{(\mu+2)\ldots(\mu+6)}{3\ldots\ldots 7}g^6 + \&c.\right)$$

$$C \ldots\ldots = \frac{\mu(\mu+1)}{1.\,2}\frac{g^2}{2}\left(1 + \frac{4}{4}\cdot\frac{(\mu+2)}{3}\frac{(\mu+3)}{4}g^2 + \frac{6.\,5}{4.\,8}\cdot\frac{(\mu+2)}{3.}\frac{(\mu+3)}{4.}\frac{(\mu+4)}{5.}\frac{(\mu+5)}{6}g^4 + \&c.\right)$$

$$D \ldots\ldots = \frac{\mu(\mu+1)}{1\quad 2.}\frac{(\mu+2)}{3}\frac{g^3}{4}\cdot\left(1 + \frac{5}{4}\cdot\frac{(\mu+3)}{4}\frac{(\mu+4)}{5}g^2 + \frac{7.\,6}{4.\,8}\cdot\frac{(\mu+3)}{4.}\frac{(\mu+4)}{5.}\frac{(\mu+5)}{6.}\frac{(\mu+6)}{7.}g^4 + \&c.\right).$$

Sçachant donc les valeurs des lettres A, B, C, D, E, &c. on aura une autre ferie infinie, pour l'expreffion $(1-g\cos.\omega)^{-\mu}$, qui fera non-feulement plus commode pour le calcul que la précédente, mais qui bien qu'elle ne foit pas trop convergente non plus, produira pourtant, par les intégrations qui font à faire, des feries infinies extremement-convergentes; de forte qu'en fe fervant de cette ferie, on n'aura plus lieu de fe plaindre de la formule $(1-g\cos.\omega)^{-\frac{3}{2}}$. Or, c'étoit juftement l'obftacle qui fembloit rendre la recherche du mouvement de Sa-

turne beaucoup plus difficile que celle de la Lune, puisque pour la Lune, la valeur de la lettre g devenant extrêmement petite, l'irrationalité de la formule $(1 - g\,cof.\,\omega)^{-\frac{3}{2}}$, n'y cause aucun embarras. Ce sera donc à l'aide de cette réduction, que je pourrai espérer un aussi heureux succès dans la recherche présente, que dans celle de la Lune.

§. XXVI. La détermination des lettres A, B, C, D, E; &c. semble le plus embarrasser l'exécution du calcul, puisque chacune dépend de la sommation d'une serie infinie, dont on ne sçauroit donner la somme que par approximation : mais il regne un certain rapport parmi ces lettres, par le moyen duquel on pourra facilement trouver leurs valeurs, pourvû que celles des deux premieres A & B soient déja connues. On découvrira ce rapport par la considération qui suit :

Soit $s = A + B\,cof.\,\omega + C\,cof.\,2\,\omega + D\,cof.\,3\,\omega + E\,cof.\,4\,\omega + F\,cof.\,5\,\omega + G\,cof.\,6\,\omega +$ &c. de sorte que $s = (1 - g\,cof.\,\omega)^{-\mu}$; de-là on aura $l\,s = -\mu\,l\,(1 - g\,cof.\,\omega)$ & $\frac{ds}{s} = \frac{-\mu g\,d\omega\,fin.\,\omega}{1 - g\,cof.\,\omega}$; & partant, $\frac{ds}{d\omega}(1 - g\,cof.\,\omega) + \mu\,g\,s\,fin.\,\omega = 0$. Or, puisque $fin.\,n\,\omega \times cof.\,\omega = \frac{1}{2}fin.\,(n+1)\,\omega + \frac{1}{2}fin.\,(n-1)\,\omega$; & $cof.\,n\,\omega \times fin.\,\omega = \frac{1}{2}fin.\,(n+1)\,\omega - \frac{1}{2}fin.\,(n-1)\,\omega$, on aura, en mettant pour s la série $A + B\,cof.\,\omega + C\,cof.\,2\,\omega +$ &c.

$$\frac{ds}{d\omega} = -B\,fin.\,\omega - 2\,C\,fin.\,2\omega - 3\,D\,fin.\,3\,\omega - 4\,E\,fin.\,4\,\omega - 5\,F\,fin.\,5\,\omega - \&c.$$

$$\frac{-g\,ds}{d\omega}\,cof.\,\omega = + \tfrac{1}{2}gB\,fin.\,2\omega + \tfrac{2}{2}gC\,fin.\,3\omega + \tfrac{3}{2}gD\,fin.\,4\omega + \tfrac{4}{2}gE\,fin.\,5\,\omega + \&c.$$

$$+ \tfrac{2}{2}gC\,fin.\,\omega + \tfrac{3}{2}gD\,fin.\,2\omega + \tfrac{4}{2}gE\,fin\,3.\omega + \tfrac{5}{2}gF\,fin.\,4\,\omega + \tfrac{6}{2}gG\,fin.\,5\omega + \&c.$$

$$\mu g\,s\,fin.\,\omega = + \mu gA\,fin.\,\omega + \tfrac{1}{2}\mu gB\,fin.\,2\omega + \tfrac{1}{2}\mu gC\,fin.\,3\omega + \tfrac{1}{2}\mu gD\,fin.\,4\omega + \tfrac{1}{2}\mu gE\,fin.\,5\,\omega + \&c.$$

$$- \tfrac{1}{2}\mu gC\,fin.\,\omega - \tfrac{1}{2}\mu gD\,fin.\,2\omega - \tfrac{1}{2}\mu gE\,fin.\,3\omega - \tfrac{1}{2}\mu gF\,fin.\,4\omega - \tfrac{1}{2}\mu gG\,fin.\,5\omega - \&c.$$

De-là on tirera, en faifant évanoüir chaque terme à part, les déterminations fuivantes :

$$C\ldots\ldots = \frac{2B - 2\mu g A}{(2-\mu)g}, \quad D = \frac{4C - (\mu+1)gB}{(3-\mu)g}, \quad E = \frac{6D - (\mu+2)gC}{(4-\mu)g},$$
$$F = \frac{8E - (\mu+3)D}{(5-\mu)g}, \quad G = \frac{10F - (\mu+4)E}{(6-\mu)g}, \quad \&c.$$

§. XXVII. Toute la difficulté fe réduit donc à la détermination des valeurs des deux lettres A & B, qui feront exprimées par les féries fuivantes :

$$A\ldots\ldots\ldots\ldots = 1 + \frac{\mu(\mu+1)}{2.\ 2}g^2 + \frac{\mu(\mu+1)}{2.\ 2.}\frac{(\mu+2)}{4.}\frac{(\mu+3)}{4.}g^4 + \frac{\mu(\mu+1)}{2.\ 2.}\frac{(\mu+2)}{4.}\frac{(\mu+3)}{4.}\frac{(\mu+4)}{6.}\frac{(\mu+5)}{6.}g^6 + \&c.$$

$$\tfrac{1}{2}B\ldots = \frac{\mu g}{2} + \frac{\mu(\mu+1)}{2.\ 2.}\frac{(\mu+2)}{4}g^3 + \frac{\mu(\mu+1)}{2.\ 2.}\frac{(\mu+2)}{4.}\frac{(\mu+3)}{4}\frac{(\mu+4)}{6}g^5 + \frac{\mu(\mu+1)}{2.\ 2.}\frac{(\mu+2)}{4.}\frac{(\mu+3)}{4.}\frac{(\mu+4)}{6.}\frac{(\mu+5)}{6}\frac{(\mu+6)}{8}g^7 + \&c.$$

Si l'on regarde ici les quantités A, B, & g comme variables, les valeurs de A & B feront auffi exprimées par ces deux équations différentielles :

$$2\,dA = g\,dB + \mu B\,dg \qquad \& \quad B\,dg + g\,dB = 2g\,g\,dA + 2\mu g A\,dg\,;$$

& fi l'on fait $A = Bx$, on parviendra à cette équation :

$$2g(1-gg)\,dx - 2x\,dg + 4\mu g x x\,dg + (1-\mu)g\,dg = 0$$

ou, fuppofant $x = \frac{1}{y}$, à celle-ci :

$$2g(1-gg)\,dy + 2yy\,dg - (1-\mu)g\,yy\,dg - 4\mu g\,dg = 0$$

mais après plufieurs effais, je n'ai pû tirer aucun fecours de cette équation, pour trouver les valeurs des lettres A & B. On fera donc obligé de chercher les fommes de ces fuites, par des méthodes d'approximation ; on en trouvera plufieurs propres à ce deffein, dans le Traité de M. Stirling & ailleurs.

§. XXVIII. La plus fûre méthode pour trouver, tant la valeur de A que celle de $\frac{1}{2}B$, c'eft d'ajoûter actuelle-

ment un certain nombre de termes, par exemple, 10 depuis le commencement, & soit cette somme $=M$; le terme qui suit après ceux qu'on a ajoutés, soit $=O$, & les suivans auront cette forme : $OPg^2 + OPQg^4 + OPQRg^6 + OPQRSg^8 + \&c.$ de sorte qu'on aura,

$$A \text{ ou } \tfrac{1}{2}B = M + O(1 + Pg^2 + PQg^4 + PQRg^6 + PQRSg^8 + \&c.)$$

Il s'agit donc de trouver, par une approximation convenable, la somme de cette suite, $1 + Pg^2 + PQg^4 + PQRg^6 + \&c.$ Or, comme les facteurs P, Q, R, S, &c. approchent continuellement de l'unité, on pourra regarder cette suite comme récurrente, ou comme résultante de l'évolution d'une certaine fraction. Soit donc $\frac{1 + \alpha g^2 + \beta g^4}{1 - \gamma g^2 - \delta g^4}$ cette fraction, ou soit :

$$\frac{1 + \alpha g^2 + \beta g^4}{1 - \gamma g^2 - \delta g^4} = 1 + Pg^2 + PQg^4 + PQRg^6 + PQRSg^8 + \&c.$$

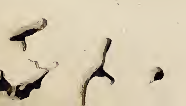
& on aura :
$$o = \begin{array}{lllll} 1 + & Pg^2 + & PQg^4 + & PQRg^6 + & PQRSg^8 + \&c. \\ & -\gamma & -\gamma P & -\gamma PQ & -\gamma PQR \\ & & -\delta & -\delta P & -\delta PQ \\ -1 & -\alpha & -\beta & & \end{array}$$

d'où l'on tire $\gamma = \frac{R(Q-S)}{(Q-R)}$; $\delta = Q(R-\gamma)$; $\alpha = B - \gamma$ & $\beta = PQ - \gamma P - \delta$;

& partant, A ou $\frac{1}{2}B = M + \frac{1 + \alpha g^2 + \beta g^4}{1 - \gamma g^2 - \delta g^4} O$. De la même maniere, on pourra aisément former plusieurs autres expressions semblables : mais puisqu'on sçait que les coëfficients des puissances de g deviennent égaux à l'infini, on pourra d'abord faire $\gamma + \delta = 1$, d'où l'on tirera,

$$\gamma = R + \frac{R-1}{Q-1}; \quad \delta = 1 - \gamma; \quad \alpha = P - \gamma \ \& \ \beta = PQ - \gamma P - \delta.$$

§. XXIX. Mais outre cela, j'ai trouvé une méthode toute particuliere, pour exprimer à peu près ces sommes : elle est fondée sur la division d'un angle droit, en autant de parties qu'on voudra, car les sinus de ces parties fournissent une propriété, qui a un grand rapport avec les



suites, qui donnent les valeurs de A & de $\frac{1}{2}B$. Soit pris q pour désigner l'angle droit, & je dis que les expressions suivantes approcheront de plus en plus de ces valeurs.

$$\text{I. } A = \left\{\begin{array}{l} +\tfrac{1}{2}(1-g\,\mathit{sin.}\tfrac{1}{2}q)^{-\mu} \\ +\tfrac{1}{2}(1+g\,\mathit{sin.}\tfrac{1}{2}q)^{-\mu} \end{array}\right\} \;\&\; \tfrac{1}{2}B = \left\{\begin{array}{l} +\tfrac{1}{2}\mathit{sin.}\tfrac{1}{2}q\,(1-g\,\mathit{sin.}\tfrac{1}{2}q)^{-\mu} \\ -\tfrac{1}{2}\mathit{sin.}\tfrac{1}{2}q\,(1+g\,\mathit{sin.}\tfrac{1}{2}q)^{-\mu} \end{array}\right\}$$

$$\text{II. } A = \left\{\begin{array}{l} +\tfrac{1}{4}(1-g\,\mathit{sin.}\tfrac{1}{4}q)^{-\mu}+\tfrac{1}{4}(1-g\,\mathit{sin.}\tfrac{3}{4}q)^{-\mu} \\ +\tfrac{1}{4}(1+g\,\mathit{sin.}\tfrac{1}{4}q)^{-\mu}+\tfrac{1}{4}(1+g\,\mathit{sin.}\tfrac{3}{4}q)^{-\mu} \end{array}\right\}$$

$$\tfrac{1}{2}B = \left\{\begin{array}{l} +\tfrac{1}{4}\mathit{sin.}\tfrac{1}{4}q\,(1-g\,\mathit{sin}\tfrac{1}{4}q)^{-\mu}+\tfrac{1}{4}\mathit{sin.}\tfrac{3}{4}q\,(1-g\,\mathit{sin.}\tfrac{3}{4}q)^{-\mu} \\ -\tfrac{1}{4}\mathit{sin.}\tfrac{1}{4}q\,(1+g\,\mathit{sin.}\tfrac{1}{4}q)^{-\mu}-\tfrac{1}{4}\mathit{sin.}\tfrac{3}{4}q\,(1+g\,\mathit{sin.}\tfrac{3}{4}q)^{-\mu} \end{array}\right\}$$

$$\text{III. } A = \tfrac{1}{6}\left\{\begin{array}{l} +(1-g\,\mathit{sin.}\tfrac{1}{6}q)^{-\mu}+(1-g\,\mathit{sin.}\tfrac{3}{6}q)^{-\mu}+(1-g\,\mathit{sin.}\tfrac{5}{6}q)^{-\mu} \\ +(1+g\,\mathit{sin.}\tfrac{1}{6}q)^{-\mu}+(1+g\,\mathit{sin.}\tfrac{3}{6}q)^{-\mu}+(1+g\,\mathit{sin.}\tfrac{5}{6}q)^{-\mu} \end{array}\right\}$$

$$\tfrac{1}{2}B = \tfrac{1}{6}\left\{\begin{array}{l} +\mathit{sin.}\tfrac{1}{6}q(1-g\,\mathit{sin.}\tfrac{1}{6}q)^{-\mu}+\mathit{sin}\,\tfrac{3}{6}q(1-g\,\mathit{sin.}\tfrac{3}{6}q)^{+\mu}+\mathit{sin.}\tfrac{5}{6}q\,(1-g\,\mathit{sin.}\tfrac{5}{6}q)^{-\mu} \\ -\mathit{sin.}\tfrac{1}{6}q(1+g\,\mathit{sin.}\tfrac{1}{6}q)^{-\mu}-\mathit{sin.}\tfrac{3}{6}q(1+g\,\mathit{sin.}\tfrac{3}{6}q)^{-\mu}-\mathit{sin.}\tfrac{5}{6}q\,(1+g\,\mathit{sin.}\tfrac{5}{6}q)^{-\mu} \end{array}\right\}.$$

La loi de ces expressions est si claire, qu'on les pourra aisément continuer aussi loin qu'on voudra. J'ai divisé l'angle droit en dix parties, & j'ai trouvé que les expressions qui en résultent approchent tant de la vérité, que l'erreur n'est plus d'aucune conséquence.

§. XXX. Ayant, par quelqu'une de ces méthodes, déterminé assez exactement les valeurs de A & B, on trouvera aisément les valeurs des autres coëfficients C, D, E, &c. par le moyen des rapports donnés ci-dessus.

$$C = \frac{2B-2\mu gA}{(2-\mu)g}\,;\; D = \frac{4C-(\mu+1)gB}{(3-\mu)g}\,;\; E = \frac{6D-(\mu+2)gC}{(4-\mu)g}\,;\; F = \frac{8E-(\mu+3)gD}{(5-\mu)g}, \&c.$$

& alors on aura :

$$(1-g\,\mathit{cos}.\,\omega)^{-\mu} = A+B\,\mathit{cos}.\omega+C\,\mathit{cos}.2\omega+D\,\mathit{cos}.3\,\omega+E\,\mathit{cos}.4\,\omega+F\,\mathit{cos}.5\,\omega + G\,\mathit{cos}.6\,\omega+\&c.$$

Qu'on fasse maintenant $\mu = \frac{3}{2}$, & on aura une suite infinie pour la formule irrationnelle $(1-g\,\mathit{cos}.\,\omega)^{-\frac{3}{2}}$, laquelle ne sera pas trop convergente, je l'avoue ; mais poursui-

vant le calcul, les intégrations la rendront de plus en plus convergente, de ſorte que le réſultat ou les expreſſions finies pour r & x, ſeront réduites à des ſéries ſi convergentes, qu'il ſuffira d'en prendre deux ou trois termes ſeulement, pour avoir leurs ſommes aſſez exactes. Comme c'eſt donc à cette réſolution que je ſuis redevable des découvertes ſuivantes, j'ai cru devoir faire cette digreſſion analytique, pour mettre mes Juges plus au fait de ce qui ſuit.

§. XXXI. Je reviens aux équations differentio-differentielles du §. XXIII, où je mets au lieu de $\frac{1}{(1-g\,cof.\,\omega)^{\frac{3}{2}}}$, ou de $(1-g\,cof.\,\omega)^{-\frac{3}{2}}$, la ſerie trouvée $A+B\,cof.\,\omega+C\,cof.\,2\,\omega+D\,cof.\,3\,\omega+$ &c. Et puiſque $d\zeta$ eſt à peu près $=\frac{d\omega}{1-m}$, je mettrai cette valeur $\frac{d\omega}{1-m}$ pour $d\zeta$ dans les petits termes de ces équations, qui ſont juſtement ceux qui ſont affectés de la formule $(1-g\,cof.\,\omega)^{-\frac{3}{2}}$. Cela fait, ces équations ſe changeront en

$$\text{I. } mmd\zeta+2mndx+mmnrd\zeta-\frac{n\,ddr}{d\zeta}=\frac{(1+\nu)\,d\zeta}{\lambda^3}-\frac{2nrd\zeta}{\lambda^3}+\frac{n\,d\omega\,cof.\,\omega}{\lambda(1-m)}$$
$$+\frac{n\,d\omega}{h(1-m)}(\lambda-cof.\,\omega)(A+B\,cof.\,\omega+C\,cof.\,2\,\omega+D\,cof.\,3\,\omega$$
$$+E\,cof.\,4\,\omega+F\,cof.\,5\,\omega+\&c.)$$

$$\text{II. } 2\,m\,dr+\frac{ddx}{d\zeta}=\frac{-d\,\omega\,fin.\,\omega}{\lambda(1-m)}+\frac{d\,\omega\,fin.\,\omega}{h(1-m)}(A+B\,cof.\,\omega+C\,cof.\,2\,\omega$$
$$+D\,cof.\,3\,\omega+E\,cof.\,4\,\omega+\&c.)$$

Je commencerai par l'intégration de cette ſeconde équation, & multipliant chaque terme de la ſérie par $fin.\,\omega$, à cauſe de $cof.\,n\,\omega\times fin.\,\omega=\frac{1}{2}fin.\,(n+1)\,\omega-\frac{1}{2}fin.\,(n-1)\,\omega$; cette équation ſe changera en la ſuivante :

$$\text{II.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2\,m\,dr+\frac{d\,d\,x}{d\,\zeta}=\frac{-d\,\omega\,fin.\,\omega}{\lambda(1-m)}$$
$$+\frac{d\omega}{2h(1-m)}\left({+2A \atop -\;C}fin.\,\omega{+B \atop -D}fin.\,2\,\omega{+C \atop -E}fin.\,3\,\omega{+D \atop -\;F}fin.\,4\,\omega{+E \atop -G}fin.\,5\,\omega\;\&c.\right)$$

§. XXXII. Maintenant, puisque $\int d\,\omega\, \mathrm{fin.}\,\omega = -\,\mathrm{cof.}\,\omega$, & généralement $\int d\,\omega\, \mathrm{fin.}\, n\,\omega = -\frac{1}{n}\,\mathrm{cof.}\, n\,\omega$, après avoir sommé chaque terme, l'équation intégrale sera,

$$2mr + \frac{dx}{d\zeta} = \frac{\mathrm{cof.}\,\omega}{\lambda(1-m)} - \frac{1}{2h(1-m)}\Big((2A-C)\,\mathrm{cof.}\,\omega + \tfrac{1}{2}(B-D)\,\mathrm{cof.}\,2\omega + \tfrac{1}{3}(C-E)\,\mathrm{cof.}\,3\omega + \tfrac{1}{4}(D-F)\,\mathrm{cof.}\,4\omega + \&c.\Big)$$

d'où il paroît déja que la férie infinie, à laquelle nous a conduits cette premiere intégration, eſt beaucoup plus convergente que les précédentes; & on ne doutera plus que les intégrations ſuivantes n'augmentent encore fort conſidérablement cette convergence. Au reſte, on ne ſera pas ſurpris, que dans cette intégration je n'aie pas ajoûté de conſtante, puiſque j'ai déja remarqué, que tant la valeur de r que celle de x, doit uniquement dépendre de l'angle ω, & que ni l'une ni l'autre ne peut renfermer une partie abſolument conſtante. Car ſi r contenoit une telle partie, elle devroit être compriſe dans la letre f, & celle de dx dans la lettre m.

§. XXXIII. Nous aurons donc pour $\frac{dx}{d\zeta}$, cette expreſſion finie:

$$\frac{dx}{d\zeta} = -2mr + \frac{\mathrm{cof.}\,\omega}{\lambda(1-m)} - \frac{(2A-C)\,\mathrm{cof.}\,\omega}{2h(1-m)} - \frac{(B-D)\,\mathrm{cof.}\,2\omega}{4h(1-m)} - \frac{(C-E)\,\mathrm{cof.}\,3\omega}{6h(1-m)} - \frac{(D-F)\,\mathrm{cof.}\,4\omega}{8h(1-m)} - \&c.$$

qui étant ſubſtituée dans la premiere équation différentio-différentielle, donnera:

$$mmd\zeta - 3mmnrd\zeta + \frac{2mnd\zeta\,\mathrm{cof.}\,\omega}{\lambda(1-m)} - \frac{mnd\zeta}{h(1-m)}\Big((A-C)\,\mathrm{cof.}\,\omega + \tfrac{1}{2}(B-D)\,\mathrm{cof.}\,2\omega + \tfrac{1}{3}(C-E)\,\mathrm{cof.}\,3\omega + \&c.\Big)$$

$$-\frac{nddr}{d\zeta} - \frac{(1+\upsilon)\,d\zeta}{\lambda^3} + \frac{2nrd\zeta}{\lambda^3} - \frac{nd\omega\,\mathrm{cof.}\,\omega}{\lambda(1-m)} - \frac{nd\omega(\lambda-\mathrm{cof.}\,\omega)}{h(1-m)}\Big(A + B\,\mathrm{cof.}\,\omega + C\,\mathrm{cof.}\,2\omega + D\,\mathrm{cof.}\,3\omega + \&c.\Big) = 0.$$

Multiplions la derniere férie par $\lambda - \mathrm{cof.}\,\omega$, & à cauſe que

cof.

$cos.\, n\omega \times cos.\, \omega = \frac{1}{2} cos.\, (n+1)\,\omega + \frac{1}{2} cos.\, (n-1)\,\omega$, nous aurons :

$$o = mmd\zeta - 3mmnrd\zeta + \frac{2mnd\zeta\, cos.\,\omega}{\lambda(1-m)} - \frac{mnd\zeta}{h(1-m)}\Big((2A-C)\, cos.\,\omega + \tfrac{1}{2}(B-D)\, cos.\, 2\omega + \tfrac{1}{3}(C-E)\, cos.\, 3\omega + \&c.\Big)$$

$$- \frac{nddr}{d\zeta} - \frac{(1+\nu)\, d\zeta}{\lambda^3} + \frac{2nrd\zeta}{\lambda^3} - \frac{nd\omega\, cos.\,\omega}{\lambda(1-m)}$$

$$- \frac{nd\omega}{h(1-m)}\begin{pmatrix} \lambda A + \lambda B\, cos.\,\omega + \lambda C\, cos.\, 2\omega + \lambda D\, cos.\, 3\omega + \&c. \\ -\frac{1}{2}B - A \quad -\frac{1}{2}B \quad -\frac{1}{2}C \\ -\frac{1}{2}C \quad -\frac{1}{2}D \quad -\frac{1}{2}E \end{pmatrix}$$

Or, puisque r renferme néceſſairement l'angle ω, il faut que tous les termes de cette équation, qui ne contiennent pas l'angle ω, ſoient ſéparément $= 0$. Faiſons donc $mmd\zeta - \frac{(1+\nu)\, d\zeta}{\lambda^3} - \frac{n(2\lambda A - B)\, d\omega}{2h(1-m)} = 0$. Mais comme ce dernier terme eſt extrêmement petit, il ſera permis d'y remettre $d\zeta$ au lieu de $\frac{d\omega}{1-m}$, ce qui donnera,

$$mm = \frac{1+\nu}{\lambda^3} + \frac{n(2\lambda A - B)}{2h},$$

laquelle équation contient le rapport entre le mouvement moyen de Saturne & ſa diſtance moyenne. Par-là nous voyons que mm ſera à peu près $= \frac{1+\nu}{\lambda^3}$, ou $mm = \frac{(1+\nu)}{f^3} a^3$, à cauſe que $f = \lambda a$, & partant $\lambda = \sqrt[3]{\frac{1+\nu}{mm}}$. Cette équation ſervira à déterminer la diſtance moyenne de Saturne au Soleil, puiſque ſon mouvement moyen, où la lettre m eſt aſſez exactement connue par les obſerva-ſervations : nous aurons donc exactement $\frac{1}{\lambda} = \frac{a}{f} = \sqrt[3]{\left(\frac{mm}{1+\nu} - \frac{n(2\lambda A - B)}{2h(1+\nu)}\right)}$.

§. XXXIV. Omettons donc dans l'équation ces termes conſtans, que j'ai faits ſéparément $= 0$, & il ne reſtera que des termes forts petits, qui ſont tous multipliés



par n; de sorte qu'on pourra mettre par-tout $\frac{d\omega}{1-m}$ à la place de $d\zeta$; ce qui donnera :

$$0 = \frac{-(1-m)ddr}{d\omega} - \frac{mmr\,d\omega}{1-m} + \frac{2m\,d\omega\,cos.\,\omega}{\lambda(1-m)^2} - \frac{d\omega\,cos.\,\omega}{\lambda(1-m)}$$
$$- \frac{m\,d\omega}{h(1-m)^2}\Big((2A-C)\,cos.\,\omega + \tfrac{1}{2}(B-D)\,cos.\,2\omega + \tfrac{1}{3}(C-E)\,cos.\,3\omega + \&c.\Big)$$
$$- \frac{d\omega}{2h(1-m)}\Big((2\lambda B - 2A - C)\,cos.\,\omega + (2\lambda C - B - D)\,cos.\,2\omega + (2\lambda D - C - E)\,cos.\,3\omega + \&c.\Big)$$

où je ferai pour abréger $\frac{m}{1-m} = \mu$, ce qui donnera, en changeant les signes,

$$0 = \frac{mmddr}{\mu\,d\omega} + \mu mmr\,d\omega - \frac{2\mu\mu\,d\omega\,cos.\,\omega}{\lambda} + \frac{\mu\,d\omega\,cos.\,\omega}{\lambda}$$
$$+ \frac{\mu\mu\,d\omega}{h}\Big((2A-C)\,cos.\,\omega + \tfrac{1}{2}(B-D)\,cos.\,2\omega + \tfrac{1}{3}(C-E)\,cos.\,3\omega + \&c.\Big)$$
$$+ \frac{\mu\,d\omega}{2h}\Big((2\lambda B - 2A - C)\,cos.\,\omega + (2\lambda C - B - D)\,cos.\,2\omega + (2\lambda D - C - E)\,cos.\,3\omega + \&c.\Big)$$

où il n'y a plus que deux variables r & ω, l'élément $d\omega$ étant supposé constant ; & comme c'est une équation différentio-différentielle, qui ne contient que ddr & r, on parviendra aisément à son intégration.

§. XXXV. Pour mettre cette équation sous une forme plus abrégée, je ferai les substitutions suivantes, qui ne regardent que les quantités constantes & connues.

$$\mathfrak{A} = \frac{\mu(2A-C)}{h} + \frac{2\lambda B - 2A - C}{2h} - \frac{2\mu+1}{\lambda}.$$
$$\mathfrak{B} = \frac{\mu(B-D)}{2h} + \frac{2\lambda C - B - D}{2h}.$$
$$\mathfrak{C} = \frac{\mu(C-E)}{3h} + \frac{2\lambda D - C - E}{2h}.$$
$$\mathfrak{D} = \frac{\mu(D-F)}{4h} + \frac{2\lambda E - D - F}{2h}.$$
$$\&c.$$

Ces valeurs donneront à l'équation proposée, cette forme :

$$0 = \frac{mm\,ddr}{\mu\mu\,d\omega^2} + mmr + A\,cos.\,\omega + B\,cos.\,2\omega + C\,cos.\,3\omega + D\,cos.\,4\omega + \&c.$$

qu'on pourroit aiſément intégrer à la rigueur : mais pour notre deſſein, il ſera plus convenable de ſe ſervir d'une approximation, qu'on pourra pouſſer auſſi loin qu'on voudra.

§. XXXVI. Pour cet effet, comme il eſt aiſé de prévoir que la valeur de r ſera exprimée par une ſemblable ſérie de $A\,cos.\,\omega + B\,cos.\,2\omega + C\,cos.\,3\omega + \&c.$ je ſuppoſe

$$r = A'\,cos.\,\omega + B'\,cos.\,2\omega + C'\,cos.\,3\omega + D'\,cos.\,4\omega + E'\,cos.\,5\omega + \&c.$$

& j'ai

$$\frac{dr}{d\omega} = -A'\,fin.\,\omega - 2B'\,fin.\,2\omega - 3C'\,fin.\,3\omega - 4D'\,fin.\,4\omega - 5E'\,fin.\,5\omega - \&c.$$

& de plus :

$$\frac{ddr}{d\omega^2} = -A'\,cos.\,\omega - 4B'\,cos.\,2\omega - 9C'\,cos.\,3\omega - 16D'\,cos.\,4\omega - 25E'\,cos.\,5\omega - \&c.$$

Ces valeurs étant ſubſtituées dans l'équation, donneront :

$$0 = \begin{array}{lllll} +mm\,A'\,cos.\,\omega & + mm\,B'\,cos.\,2\omega & + mm\,C'\,cos.\,3\omega & + mm\,D'\,cos.\,4\omega & + mm\,E'\,cos.\,5\omega\,\&c. \\ -\frac{mm}{\mu\mu}A' & -\frac{4mm}{\mu\mu}B' & -\frac{9mm}{\mu\mu}C' & -\frac{16mm}{\mu\mu}D' & -\frac{25mm}{\mu\mu}E' \\ +\ A & +\ B & +\ C & +\ D & +\ E, \end{array}$$

d'où l'on tire :

$$A' = \frac{\mu\mu A}{mm(1-\mu\mu)};\ B' = \frac{\mu\mu B}{m^2(4-\mu\mu)};\ C' = \frac{\mu\mu C}{m^2(9-\mu\mu)};\ D' = \frac{\mu\mu D}{m^2(16-\mu\mu)}, \&c.$$

ainſi la valeur de la lettre r eſt trouvée, & partant celle de la diſtance de Saturne au Soleil, qui eſt $z = f(1+nr)$; & il eſt manifeſte que cette ſérie $r = A'\,cos.\,\omega + B'\,cos.\,2\omega + C'\,cos.\,3\omega +$ &c. doit être extrêmement convergente ; & qu'elle montre aiſément, de combien doit être dérangée la diſtance moyenne de Saturne au Soleil f, par l'action de Jupiter, à chaque aſpect de ces deux Planetes rapporté au Soleil. E ij

§. XXXVII. L'équation intégrale, trouvée au §. XXXII. étant multipliée par $d\zeta = \frac{d\omega}{1-m}$, à cause de $\frac{m}{1-m} = \mu$, prendra cette forme :

$$2\mu r\, d\omega + dx = \frac{\mu^2\, d\omega \cos\omega}{\lambda m^2} - \frac{\mu^2\, d\omega}{2hm^2}\Big((2A-C)\cos\omega + \tfrac{1}{2}(B-D)\cos 2\omega + \tfrac{1}{3}(C-E)\cos 3\omega + \tfrac{1}{4}(D-F)\cos 4\omega + \&c.\Big)$$

d'où en substituant pour *r* sa valeur sa valeur trouvée, on aura :

$$dx = \left.\begin{array}{l} -2\mu A' \\ -\frac{\mu^2(2A-C)}{2mmh} \\ +\frac{\mu\mu}{\lambda mm} \end{array}\right\} d\omega\cos\omega \quad \left.\begin{array}{l} -2\mu B' \\ -\frac{\mu\mu(B-D)}{4mmh} \end{array}\right\} d\omega\cos 2\omega \quad \left.\begin{array}{l} -2\mu C' \\ -\frac{\mu\mu(C-E)}{6mmh} \end{array}\right\} d\omega\cos 3\omega$$

$$\left.\begin{array}{l} -2\mu D' \\ -\frac{\mu\mu(D-F)}{8mmh} \end{array}\right\} d\omega\cos 4\omega - \&c.$$

Chaque terme de cette équation étant intégrable, on en tirera :

$$x = \left.\begin{array}{l} -2\mu A' \\ -\frac{\mu\mu(2A-C)}{2mmh} \\ +\frac{\mu\mu}{\lambda mm} \end{array}\right\} \sin\omega \quad \left.\begin{array}{l} -\frac{1}{2}\mu B' \\ -\frac{\mu^2(B-D)}{8mmh} \end{array}\right\} \sin 2\omega \quad \left.\begin{array}{l} -\frac{2}{3}\mu C' \\ -\frac{\mu^2(C-E)}{18mmh} \end{array}\right\} \sin 3\omega$$

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{2}{4}\mu D' \\ -\frac{\mu^2(D-F)}{32mmh} \end{array}\right\} \sin 4\omega \quad \left.\begin{array}{l} -\frac{2}{5}\mu E' \\ -\frac{\mu^2(E-G)}{50mmh} \end{array}\right\} \sin 5\omega\ \&c.$$

ce qui donnera la véritable longitude de Saturne $\varphi = \Sigma + m\zeta + nx$: la constante Σ doit être dépendante du point d'où l'on compte la longitude, la partie $\Sigma + m\zeta$ exprime pour chaque tems la longitude moyenne, & la particule nx la variation causée par l'action de Jupiter dans la longitude de Saturne.

§. XXXVIII. Pour appliquer ces formules au mouve-



ment de Saturne, on n'a qu'à les évaluer en nombres, ayant premierement $n = \frac{1}{1067}$, nous aurons en fractions décimales $n = 0,0009372$, ensuite m étant à 1 comme le mouvement moyen de Saturne à celui de Jupiter, nous trouverons par les Tables Astronomiques $m = 0,40253$, & puisque λ est à peu près $= \sqrt[3]{\frac{1}{mm}}$, nous aurons $\lambda = 1,83429$, car nous n'avons pas besoin d'une plus grande précision, vû que cette lettre λ n'entre que dans les plus petits termes. Nous aurons ensuite $\mu = \frac{m}{1-m} = 0,673724$, & $h = \lambda\,(1 + \lambda\lambda)^{\frac{3}{2}} = 16,72585$, & $g = \frac{2\lambda}{1+\lambda\lambda} = 0,8405$. Et supposant $(1 - g\,cos.\,\omega)^{-\frac{3}{2}} = A + B\,cos.\,\omega + C\,cos.\,2\,\omega + D\,cos.\,3\,\omega + E\,cos.\,4\,\omega + F\,cos.\,5\,\omega$ + &c. on trouvera par les méthodes indiquées ci-dessus :

$A = 3,21789$, $B = 4,70357$; $C = 3,07731$; $D = 1,92413$; $E = 1,18601$; $F = 0,75144$, &c.

De-là les autres quantités seront :

$\mathrm{A} = 0,17732$; $\mathrm{B} = 0,19534$; $\mathrm{C} = 0,10896$; $\mathrm{D} = 0,06189$; $\mathrm{E} = 0,03612$; &c. Et enfin :

$A' = 0,90960$; $B' = 0,15431$; $C' = 0,03572$; $D' = 0,01115$; $E' = 0,00412$, &c.

De-là la distance de Saturne au Soleil, pour chaque angle ω, qu'on trouve en soustrayant la longitude de Saturne de celle de Jupiter, sera :

$$\frac{z}{f} = 1 + 0,0008542\,cos.\,\omega + 0,0001449\,cos.\,2\omega + 0,0000335\,cos.\,3\,\omega + 0,0000105\,cos.\,4\omega + \&c.$$

Donc pour les conjonctions de ♄ & ♃ où $\omega = 0$, on aura $\frac{z}{f} = 1,0010466$,

Pour les oppositions de ♄ & ♃ où $\omega = 180^\circ$ on aura $\frac{z}{f} = 0,9992652$:

Et pour les quadratures où $\omega = 90^\circ$ ou 270°, on aura $\frac{z}{f} = 0,9998656$:

§. XXXIX. Employant les mêmes valeurs numériques, on trouve la longitude de Saturne :

$$\varphi = \Sigma + m\,\zeta + 0,0000191\,sin.\,\omega - 0,0001523\,sin.\,2\,\omega - 0,0000316\,sin.\,3\,\omega - 0,0000093\,sin.\,4\,\omega - \&c.$$

Ici on ſuppoſe le ſinus total $= 1$, & comme les ſinus ſont exprimés en partie du rayon, il les faudra convertir en arcs, ou angles, ce qui ſe fera en ôtant 4,6855749 du logarithme de chaque ſinus, le nombre qui convient au logarithme reſtant, déſignant l'arc qui eſt égal à ce ſinus, exprimé en minutes & ſecondes. Cela poſé, la longitude de Saturne ſera

$$\varphi = \text{Long. moyenne} + 4'' \mathit{ſin.}\ \omega - 32'' \mathit{ſin.}\ 2\omega - 7'' \mathit{ſin.}\ 3\omega - 2'' \mathit{ſin.}\ 4\omega - \&c.$$

d'où l'on voit que ce dérangement dans le mouvement de Saturne, comme il ne ſurpaſſe que très-rarement une demi-minute, doit être preſque imperceptible. Et comme le dérangement obſervé eſt pluſieurs fois plus grand que 10', il eſt évident qu'on ne le ſçauroit expliquer par cet effet de l'action de Jupiter. On reconnoîtra par la même raiſon, la néceſſité des recherches ſuivantes, où j'introduirai dans le calcul, non-ſeulement l'excentricité de l'orbite de Saturne, mais encore celle de Jupiter : circonſtances qui rendent le calcul beaucoup plus difficile, & qui le rendroient même inſurmontable, ſi je n'avois pas trouvé moyen de convertir ſi convenablement la formule irrationnelle $(1 - g\ \mathit{coſ.}\ \omega)^{-\frac{3}{2}}$ en ſuite infinie.

§. XL. J'avois cru d'abord qu'on pouvoit négliger les forces réciproques, qui agiſſent ſur le Soleil, par cette ſeule raiſon que les dérangemens deviendroient plus grands, ce qui me paroiſſoit plus convenable. En effet, effaçant dans le calcul tous les termes qui viennent de cette force réciproque, on trouvera au lieu du premier terme $+ 4'' \mathit{ſin.}\ \omega$, qui eſt dans l'expreſſion de la longitude, celui-ci conſidérablement plus grand $- 546'' \mathit{ſin}\ \omega$, qui donneroit près des quadratures une inégalité de plus de $9'\ 10''$: mais ayant comparé cette hypotheſe, ſi peu vraiſemblable en elle-meme, avec les obſervations, je l'ai trouvée inſoutenable : ce que j'ai cru devoir faire

remarquer, au cas que quelqu'un voulût profiter de cette convenance apparente, pour rendre ſon ſyſtème probable.

IV.

Recherches du Mouvement de Saturne, dans l'hypotheſe que les deux orbites ſoient dans le même plan, l'orbite de Jupiter circulaire, & celle de Saturne excentrique.

§. XLI. LES deux premieres conditions donnent par le §. XXI. ces deux équations :

$$\text{I. } ddz - zd\varphi^2 = -a^3 d\zeta^2 \left(\frac{1+\nu}{zz} + \frac{nz}{v^3} + \frac{n\,\mathrm{cof.}\,\omega}{aa} - \frac{na\,\mathrm{cof.}\,\omega}{v^3}\right).$$

$$\text{II. } 2dzd\varphi + zdd\varphi = -na^3 d\zeta^2\,\mathrm{fin.}\,\omega \left(\frac{1}{aa} - \frac{a}{v^3}\right),$$

où toutes les lettres retiennent les mêmes ſignifications que dans les articles précédents : or, puiſque $y = a$, nous aurons $v = \sqrt{(aa + zz - 2az\,\mathrm{cof.}\,\omega)}$. Ces équations ſe réduiront donc à celles-ci :

$$\text{I. } ddz - zd\varphi^2 + \frac{(1+\nu)a^3 d\zeta^2}{zz} + \frac{na^3 z d\zeta^2}{v^3} - \frac{na^4 d\zeta^2\,\mathrm{cof.}\,\omega}{v^3} + nad\zeta^2\,\mathrm{cof.}\,\omega = 0.$$

$$\text{II. } 2dzd\varphi + zdd\varphi - \frac{na^4 d\zeta^2\,\mathrm{fin.}\,\omega}{v^3} + nad\zeta^2\,\mathrm{fin.}\,\omega = 0.$$

dans leſquelles on ſe ſouviendra, que l'élément $d\zeta$ du mouvement moyen de Jupiter, eſt ſuppoſé conſtant, & que $\omega = \zeta - \varphi$.

Il faut donc introduire dans le calcul l'excentricité de l'orbite de Saturne, ou la nature de l'ellipſe qu'il décriroit, s'il n'étoit ſollicité que par la force du Soleil, pour



connoître les dérangemens que l'action de Jupiter doit causer dans l'orbite, aussi-bien que dans le mouvement de Saturne.

§. XLII. Soit pour cet effet, l'anomalie moyenne $=p$, dont le mouvement est uniforme, & est en rapport constant avec le mouvement moyen de Jupiter, ce que j'exprime par l'équation $dp = m\,d\zeta$. Soit ensuite la distance moyenne de Saturne au Soleil $=f$, & l'excentricité de l'orbite ou la distance des foyers divisée par le grand axe $=k$. De plus, soit l'anomalie nommée excentrique $=q$, qui est un angle que l'on tire de l'anomalie moyenne p, par le moyen de cette égalité $p = q + k\,\text{sin.}\,q$; d'où l'on tire $dp = dq\,(1 + k\,\text{cos.}\,q)$. Cela posé, si le mouvement de Saturne n'étoit pas dérangé par l'action de Jupiter, & qu'il suivît parfaitement les regles de Kepler, on auroit ces deux équations:

$$z = f(1 + k\,\text{cos.}\,q) \quad \& \quad d\varphi = \frac{dq\sqrt{(1-kk)}}{1 + k\,\text{cos.}\,q},$$

à l'aide desquelles on pourroit aisément, pour chaque anomalie excentrique q, déterminer tant la distance de Saturne au Soleil z, que sa longitude φ. Or, pour chaque tems proposé, on connoît l'anomalie moyenne p, par laquelle il ne sera pas difficile, en employant l'excentricité connue k, de déterminer l'anomalie excentrique q, au moyen de l'équation $p = q + k\,\text{sin.}\,q$.

§. XLIII. Mais à cause de l'action de Jupiter, on n'aura pas exactement ni $z = f(1 + k\,\text{cos.}\,q)$ ni $d\varphi = \frac{dq\sqrt{(1-kk}}{1+k\,\text{cos.}\,q}$; pour connoître ce qu'il s'en faut, je supposerai que

$$z = f(1 + k\,\text{cos.}\,q + nr) \quad \& \quad d\varphi = \frac{\alpha\,dq\sqrt{(1-kk)}}{1 + k\,\text{cos.}\,q} + n\,dx,$$

où α peut ne pas être $=1$, à cause du mouvement de l'aphélie, causé par l'action de Jupiter. Au reste il est à

remarquer

remarquer, que la quantité r, qui vient de cette action, ne peut contenir ni un terme constant, ni un terme de cette forme $\epsilon \cos. q$, puisque dans le premier cas on n'auroit qu'à changer la lettre f, & dans le second cas la lettre k. De même dans dx, il n'y aura point de terme γdq, vû qu'un tel terme devroit être compris dans ϖ. Il faut bien avoir égard à ces circonstances, pour être en état de déterminer les constantes que les intégrations suivantes renferment.

§. XLIV. Nous aurons donc $d\zeta = \frac{dp}{m} = \frac{dq}{m}(1+k\cos.q)$. Et puisque $d\varphi = \frac{\alpha dq\sqrt{(1-kk)}}{1+k\cos.q} + n\,dx$, à cause de $d\varpi = d\zeta - d\varphi$, il viendra:

$$d\varpi = \frac{dq}{m}(1+k\cos.q) - \frac{\alpha dq\sqrt{(1-kk)}}{1+k\cos.q} - n\,dx.$$

Mais comme l'angle ϖ n'entre que dans les plus petits termes de nos équations, qui sont multipliés par n, on pourra négliger le terme $n\,dx$, de même que les puissances de k, & on aura assez exactement $\frac{\alpha dq\sqrt{(1-kk)}}{1+k\cos.q} = \alpha dq(1-k\cos.q.)$ d'où l'on tirera:

$$d\varpi = dq\left(\frac{1}{m} - \alpha + \left(\frac{1}{m}+\alpha\right)k\cos.q\right).$$

Par la même raison, au lieu de z, nous pourrons mettre dans les petits termes $f(1+k\cos.q)$, & comme la quantité v n'affecte que ces petits termes, nous aurons $v = \sqrt{\left(aa+ff(1+k\cos.q)^2 - 2af(1+k\cos.q)\cos.\varpi\right)}$: rejettant aussi le terme multiplié par kk, on aura:

$$v = \sqrt{(aa+ff-2af\cos.\varpi+2kff\cos.q-2kaf\cos.q\cos\varpi)}.$$

§. XLV. Supposons, comme dans l'article précédent, $f = \lambda a$, & divisons les équations différentio-différentielles par $fd\zeta$, pour les délivrer de la considération de quelque différentielle constante: nous aurons, en



obſervant les mêmes regles dans les petits termes:

$$\text{I. } d.\frac{dz}{fd\zeta} - \frac{zd\varphi^2}{fd\zeta} + \frac{(1+\nu)ffd\zeta}{\lambda^3 zz} + \frac{na^3 d\zeta(\lambda + \lambda k\,cof.\,q - cof.\,\omega)}{\lambda v^3} + \frac{n}{\lambda}d\zeta\,cof.\,\omega = 0.$$

$$\text{II. } \frac{z}{f}\,d.\,\frac{d\varphi}{d\zeta} + \frac{2\,dz\,d\varphi}{fd\zeta} - \frac{na^3 d\zeta\,fin.\,\omega}{\lambda v^3} + \frac{n}{\lambda}d\zeta\,fin.\,\omega = 0.$$

Mais ayant trouvé $d\zeta = \frac{dq}{m}(1 + k\,cof.\,q)$, puiſque $z = f(1 + k\,cof.\,q + nr)$ & $dz = f(-k\,dq\,fin.\,q + n\,dr)$, mettons ces valeurs au lieu de $d\zeta$, z, & dz, & nous aurons:

$$\text{I. } d.\left(\frac{-k\,dq\,fin.\,q + n\,dr}{dq(1 + k\,cof.\,q)}\right) - \frac{(1 + k\,cof.\,q + nr)d\varphi^2}{dq(1 + k\,cof.\,q)} + \frac{(1+\nu)\,dq\,(1 + k\,cof.\,q)}{\lambda^3 m^2 (1 + k\,cof.\,q + nr)^2}$$
$$+ \frac{na^3 dq(1 + k\,cof.\,q)(\lambda + \lambda k\,cof.\,q - cof.\,\omega)}{\lambda m^2 v^3} + \frac{ndq(1 + k\,cof.\,q)cof.\,\omega}{\lambda m^2} = 0.$$

$$\text{II. } (1 + k\,cof.\,q + nr)\,d.\left(\frac{d\varphi}{dq(1 + k\,cof.\,q)}\right) - \frac{2\,d\varphi\,(k\,dq\,fin.\,q - n\,dr)}{dq\,(1 + k\,cof.\,q)}$$
$$- \frac{na^3 dq(1 + k\,cof.\,q)\,fin.\,\omega}{\lambda m^2 v^3} + \frac{ndq(1 + k\,cof.\,q)fin.\,\omega}{\lambda m^2} = 0.$$

§. XLVI. Puiſque nous ne cherchons que les inégalités qui viennent de l'action de Jupiter, nous pourrons hardiment négliger les termes qui renferment le quarré, & les plus hautes puiſſances de l'excentricité k. Dans ce deſſein, il ſera permis de ſuppoſer $d\varphi = \alpha\,dq - \alpha k\,dq\,cof.\,q + n\,dx$, & $d\varphi^2 = \alpha^2\,dq^2 - 2\,\alpha^2 k\,dq^2\,cof.\,q + 2\,\alpha n\,dq\,dx - 2\,\alpha nk\,dq\,dx\,cof.\,q$: & par la même raiſon $\frac{1}{1 + k\,cof.\,q} = 1 - k\,cof.\,q$, & $\frac{1}{(1 + k\,cof.\,q + nr)^2} = 1 - 2\,k\,cof.\,q - 2\,nr + 6\,nkr\,cof.\,q$. Ces ſubſtitutions faites, ſi dans les différentiations à faire, nous ſuppoſons maintenant l'élément dq conſtant, nous parviendrons à ces équations:

$$\text{I.} \ldots\ldots - \alpha^2\,dq + 2\,\alpha^2 k\,dq\,cof.\,q - k\,dq\,cof.\,q + \frac{(1+\nu)\,dq}{\lambda^3 m^2} - \frac{k\,dq\,cof.\,q}{\lambda^3 m^2}$$
$$+ \frac{n\,dq\,cof.\,\omega}{\lambda m^2}(1 + k\,cof.\,q) + \frac{na^3\,dq}{\lambda m^2 v^3}(\lambda + 2\lambda k\,cof.\,q - cof.\,\omega - k\,cof.\,q\,cof.\,\omega)$$
$$+ \frac{n\,ddr}{dq} - \frac{nk\,ddr\,cof.\,q}{dq} + nk\,dr\,fin.\,q - \alpha^2 nr\,dq + 3\,\alpha^2 nkr\,dq\,cof.\,q$$
$$- \frac{2\,nr\,dq}{\lambda^3 m^2} + \frac{4\,nkr\,dq\,cof.\,q}{\lambda^3 m^2} - 2\,\alpha n\,dx + 2\,\alpha nk\,dx\,cof.\,q = 0.$$

$$\text{II. } \frac{dq\,\text{fin.}\,\omega}{\lambda m^2}\left(1+k\,\text{cof.}\,q\right)-\frac{a^3\,dq\,\text{fin.}\,\omega}{\lambda m^2 v^3}\left(1+k\,\text{cof.}\,q\right)+2\alpha\,dr-4\alpha k\,dr\,\text{cof.}\,q$$
$$+2\alpha k r\,dq\,\text{fin.}\,q+\frac{ddx}{dq}-k\,dx\,\text{fin.}\,q=0.$$

§. XLVII. Développons maintenant avec plus de foin la valeur de v, à caufe de $f=\lambda a$, nous aurons $v = a\sqrt{\left(1+\lambda\lambda-2\lambda\,\text{cof.}\,\omega+2\lambda k(\lambda-\text{cof.}\,\omega)\,\text{cof.}\,q\right)}$, & faifant, comme auparavant, $g=\frac{2\lambda}{1+\lambda\lambda}$, v fera $=(1+\lambda\lambda)^{\frac{1}{2}}a\sqrt{\left(1-g\,\text{cof.}\,\omega+kg(\lambda-\text{cof.}\,\omega)\,\text{cof.}\,q\right)}$. Faifant donc de plus $h=\lambda(1+\lambda\lambda)^{\frac{3}{2}}$, nous trouverons :

$$\frac{a^3}{\lambda v^3}=\frac{1}{h}\left(1-g\,\text{cof.}\,\omega+kg(\lambda-\text{cof.}\,\omega)\,\text{cof.}\,q\right)^{-\frac{3}{2}},$$

& puifque $kg(\lambda-\text{cof.}\,\omega)\,\text{cof.}\,q$ eft fort petit par rapport à $1-\text{cof.}\,\omega$, nous aurons affez exactement :

$$\frac{a^3}{\lambda v^3}=\frac{1}{h(1-g\,\text{cof.}\,\omega)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3kg(\lambda-\text{cof.}\,\omega)\,\text{cof.}\,q}{2h(1-g\,\text{cof.}\,\omega)^{\frac{5}{2}}}.$$

Or, ayant fuppofé plus haut :

$$(1-g\,\text{cof.}\,\omega)^{-\frac{3}{2}}=A+B\,\text{cof.}\,\omega+C\,\text{cof}\,2\,\omega+D\,\text{cof.}\,3\,\omega+E\,\text{cof.}\,4\,\omega+\&c.$$

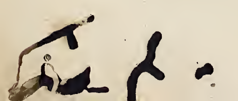
Nous pourrons fuppofer pareillement,

$$(1-g\,\text{cof.}\,\omega)^{-\frac{5}{2}}=P+Q\,\text{cof.}\,\omega+R\,\text{cof.}\,2\,\omega+S\,\text{cof.}\,3\,\omega+T\,\text{cof.}\,4\,\omega+\&c.$$

& de la même maniere qu'on a trouvé les valeurs des lettres A, B, C, D, E, &c. on trouvera celles de P, Q, R, S, &c. & partant nous aurons :

$$\frac{a^3}{\lambda v^3}=\frac{1}{h}\left(A+B\,\text{cof.}\,\omega+C\,\text{cof.}\,2\,\omega+D\,\text{cof.}\,3\,\omega+E\,\text{cof.}\,4\,\omega+\&c.\right)$$
$$-\frac{3kg\,\text{cof.}\,q}{2h}\left(\lambda-\text{cof.}\,\omega\right)\left(P+Q\,\text{cof.}\,\omega+R\,\text{cof.}\,2\,\omega+S\,\text{cof.}\,3\,\omega+T\,\text{cof.}\,4\,\omega+\&c.\right)$$

§. XLVIII. Multiplions actuellement cette derniere férie par $\lambda-\text{cof.}\,\omega$, & faifons $\frac{3}{2}g(\lambda-\text{cof.}\,\omega)(P+Q\,\text{cof.}\,\omega+R\,\text{cof.}\,2\,\omega+S\,\text{cof.}\,3\,\omega+\&c.)=P^0+Q^0\text{cof.}\,\omega+R^0\text{cof.}\,2\,\omega+S^0\text{cof.}\,3\,\omega+\&c.$ où P^0, Q^0, &c. ne marquent pas des



puiſſances, mais de nouveaux caractères : on trouvera

$$P^{o} = \tfrac{3}{2}\lambda g P - \tfrac{3}{4} g Q$$
$$Q^{o} = \tfrac{3}{2}\lambda g Q - \tfrac{3}{2} g P - \tfrac{3}{4} g R$$
$$R^{o} = \tfrac{3}{2}\lambda g R - \tfrac{3}{4} g Q - \tfrac{3}{4} g S$$
$$S^{o} = \tfrac{3}{2}\lambda g S - \tfrac{3}{4} g R - \tfrac{3}{4} g T$$

Et par conséquent

$$\frac{a^3}{\lambda v^3} = \frac{1}{h}\left(A + B\,cof.\,\omega + C\,cof.\,2\,\omega + D\,cof.\,3\,\omega + E\,cof.\,4\,\omega + \&c.\right)$$
$$- \frac{k\,cof.\,q}{h}\left(P^{o} + Q^{o}\,cof.\,\omega + R^{o}\,cof.\,2\,\omega + S^{o}\,cof.\,3\,\omega + \&c.\right)$$

Cette expreſſion ſe trouve, dans la premiere équation, multipliée par $\frac{n}{m^2}\,dq\,(\lambda + 2\,\lambda k\,cof.\,q - cof.\,\omega - k\,cof.\,\omega\,cof.\,q)$, & partant elle renfermera des termes conſtans, des termes qui ne ſont affectés que par *coſ. q*, & des termes qui dépendent des deux angles ω & q; & puiſque r ne contient ni des termes conſtans, ni de cette forme $\varepsilon\,cof.\,q$, il eſt à propos de conſidérer ces termes à part : négligeant donc les autres termes, ainſi que ceux qui ſont multipliés par k, on verra que

$$\frac{a^3}{\lambda v^3}\left(\lambda + 2\lambda k\,cof.\,q - cof.\,\omega - k\,cof.\,\omega\,cof.\,q\right) = \frac{1}{h}\left(\lambda A + 2\lambda\,kA\,cof.\,q - \tfrac{1}{2}B - \tfrac{1}{2}Bk\,cof.\,q\right)$$
$$- \frac{k}{h}\left(\lambda P^{o}\,cof.\,q - \tfrac{1}{2}Q^{o}\,cof.\,q\right).$$

§. XLIX. Cela poſé, avant que d'entreprendre l'intégration de la premiere équation, conſidérons la ſeconde, qui, étant multipliée par $1 + k\,cof.\,q$, devient intégrable : nous aurons, en rejettant les termes qui renferment le quarré kk :

$$0 = \frac{ddx}{dq}\left(1 + k\,cof.\,q\right) - k\,dx\,fin.\,q + 2\,\alpha\,dr - 2\,\alpha k\,dr\,cof.\,q + 2\,\alpha k r\,dq\,fin.\,q$$
$$+ \frac{dq\,fin.\,\omega}{\lambda m^2}\left(1 + 2k\,cof.\,q\right) - \frac{a^3 dq\,fin.\,\omega}{\lambda m^2 v^3}\left(1 + 2k\,cof\,q\right),$$

dont la premiere partie, qui contient x & r étant abſolument intégrable, nous trouverons :



$$0 = \frac{dx}{dq}(1+k\cos q) + 2\alpha r(1+k\cos q) + \frac{1}{\lambda mm}\int dq \sin\omega\,(1+2k\cos q) - \int \frac{a^3 dq \sin\omega}{\lambda m^2 v^3}(1+2k\cos q).$$

Or, mettant pour $\frac{a^3}{\lambda v^3}$ la valeur qu'on vient de trouver, on aura :

$$\frac{a^3 dq}{\lambda m^2 v^3}(\sin\omega + 2k\cos q\sin\omega) = \frac{dq}{hmm}\left(\begin{matrix} A\sin\omega & +\frac{1}{2}B\sin 2\omega & +\frac{1}{2}C\sin 3\omega & +\frac{1}{2}D\sin 4\omega \\ -\frac{1}{2}C & -\frac{1}{2}D & -\frac{1}{2}E & -\frac{1}{2}F \end{matrix} \;\&c.\right)$$

$$+\frac{2k\,dq\cos q}{hmm}\left(\begin{matrix} A\sin\omega & +\frac{1}{2}B\sin 2\omega & +\frac{1}{2}C\sin 3\omega \\ -\frac{1}{2}C & -\frac{1}{2}D & -\frac{1}{2}E \\ -\frac{1}{2}P^o & -\frac{1}{4}Q^o & -\frac{1}{4}R^o \\ +\frac{1}{4}R^o & +\frac{1}{4}S^o & +\frac{1}{4}T^o \end{matrix} \;\&c.\right)$$

Mais comme $2\sin\omega\cos q = \sin(\omega+q) + \sin(\omega-q)$ & $2\sin 2\omega\cos q = \sin(2\omega+q) + \sin(2\omega-q)$, l'équation intégrale précédente, ſe changera en celle-ci :

$$0 = \frac{dx}{dq}(1+k\cos q) + 2\alpha r(1-k\cos q) + \frac{1}{\lambda mm}\int dq\sin\omega$$

$$+\frac{k}{\lambda mm}\int dq\sin(\omega+q) + \frac{k}{\lambda mm}\int dq\sin(\omega-q)$$

$$-\frac{(A-\frac{1}{2}C)}{hmm}\int dq\sin\omega - \frac{(\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}D)}{hmm}\int dq\sin 2\omega - \frac{(\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}E)}{hmm}\int dq\sin 3\omega$$

$$-\frac{(\frac{1}{2}D-\frac{1}{2}F)}{hmm}\int dq\sin 4\omega - \&c.$$

$$\frac{-k}{hmm}(A-\tfrac{1}{2}C-\tfrac{1}{2}P^o+\tfrac{1}{4}R^o)\int dq\sin(\omega+q) - \frac{k}{hmm}(\tfrac{1}{2}B-\tfrac{1}{2}D-\tfrac{1}{4}Q^o+\tfrac{1}{4}S^o)\int dq\sin(2\omega+q)$$

$$-\frac{k}{hmm}(A-\tfrac{1}{2}C-\tfrac{1}{2}P^o+\tfrac{1}{4}R^o)\int dq\sin(\omega-q) - \frac{k}{hmm}(\tfrac{1}{2}B-\tfrac{1}{2}D-\tfrac{1}{4}Q^o+\tfrac{1}{4}S^o)\int dq\sin(2\omega-q) \quad \&c.$$

§. L. Puiſque tous ces termes naiſſent de l'action de Jupiter, & qu'ils ſont par conſéquent extrèmement petits, il ſera permis de négliger les derniers termes, quoiqu'il ne ſeroit pas difficile de trouver leurs intégrales ; & comme α eſt à peu près $=1$, nous pourrons ſuppoſer : $d\omega = \frac{dq}{m}\left(1-m+(1+m)k\cos q\right)$ ou $dq = \frac{m\,d\omega}{1-m} - \frac{(1+m)k\,dq\cos q}{1-m}$, ce qui donnera,

$$\int d q \sin.\omega = \frac{m}{1-m}\int d\omega \sin.\omega - \frac{(1+m)k}{2(1-m)}\int dq \sin.(\omega+q) - \frac{(1+m)k}{2(1-m)}\int dq \sin.(\omega-q).$$

Or, dans ces deux derniers termes, comme ils ſont déja multipliés par k, dq pourra être ſuppoſé $= \frac{m\,d\omega}{1-m}$, de ſorte que $dq = m(d\omega + dq)$, & $dq = \frac{m}{1-2m}(d\omega - dq)$; d'où nous tirerons :

$$\int dq \sin.(\omega+q) = m\int(d\omega+dq)\sin.(\omega+q) = -m \cos.(\omega+q).$$

$$\int dq \sin.(\omega-q) = \frac{m}{1-2m}\int(d\omega-dq)\sin.(\omega-q) = \frac{-m}{1-2m}\cos.(\omega-q).$$

Et ces valeurs étant ſubſtituées dans la premiere formule, donneront :

$$\int dq \sin.\omega = \frac{-m}{1-m}\cos.\omega + \frac{m(1+m)k}{2(1-m)}\cos.(\omega+q) + \frac{m(1+m)k}{2(1-m)(1-2m)}\cos.(\omega-q).$$

§. LI. Je ne fais pas d'attention aux termes $\int dq \sin. 2\omega$; $\int dq \sin. 3\omega$, &c. parce qu'ils donneroient à la fin les mêmes termes & les mêmes inégalités que j'ai déja déterminées dans l'article précédent. Cela remarqué, l'intégrale de la ſeconde équation aura cette forme :

$$0 = \frac{dx}{dq}(1+k\cos.q) + 2\alpha r(1-k\cos.q) + \frac{(2A-C)}{2hm(1-m)}\cos.\omega$$
$$- \frac{1}{\lambda m(1-m)}\cos.\omega$$
$$- \frac{(2A-C)(1+m)}{4hm(1-m)}k\cos.(\omega+q) - \frac{(2A-C)(1+m)}{4hm(1-m)(1-2m)}k\cos.(\omega-q)$$
$$+ \frac{(1+m)}{2\lambda m(1-m)}k\cos.(\omega+q) + \frac{(1+m)}{2\lambda m(1-m)(1-2m)}k\cos.(\omega-q)$$
$$+ \frac{(2A-C-P^0+\frac{1}{2}R^0)}{2hm}k\cos.(\omega+q) + \frac{(2A-C-P^0+\frac{1}{2}R^0)}{2hm(1-2m)}k\cos.(\omega-q)$$
$$- \frac{1}{\lambda m}k\cos.(\omega+q) - \frac{1}{\lambda m(1-2m)}k\cos.(\omega-q)$$

Suppoſons maintenant, pour abréger :

$$\frac{2A-C}{2hm(1-m)} - \frac{1}{\lambda m(1-m)} = L.$$

$$\frac{(1+m)(2A-C)}{4hm(1-m)} + \frac{2A-C-P^0+\frac{1}{2}R^0}{2hm} + \frac{1+m}{2\lambda m(1-m)} - \frac{1}{\lambda m} = M,$$

& nous aurons :



$$\frac{dx}{dq}(1+k\,cos.\,q) = -2\alpha r(1-k\,cos.\,q) - L\,cos.\,\omega + Mk\,cos.(\omega+q) + \frac{M}{1-2m}k\,cos.(\omega-q).$$

§. LII. Revenons ensuite à la premiere équation, & comme dx y est multiplié par $-2\alpha n(1-k\,cos.\,q)$, multiplions la derniere équation par $-2\alpha n(1-2k\,cos.\,q)$; & nous aurons :

$$-\frac{2\alpha n\,dx}{dq}(1-k\,cos.\,q) = 4\alpha\alpha nr(1-3k\,cos.\,q) + 2\alpha nL\,cos.\,\omega$$
$$-2\alpha nMk\,cos.(\omega+q) - \frac{2\alpha nM}{1-2m}k\,cos.(\omega-q)$$
$$-2\alpha nLk\,cos.(\omega+q) - 2\alpha nL\,k\,cos.(\omega-q).$$

Cette valeur, étant substituée dans la premiere équation du §. XLVI, donnera :

$$0 = -\alpha^2 dq + 2\alpha^2 k\,dq\,cos.\,q - k\,dq\,cos.\,q + \frac{(1+\nu)dq}{\lambda^3 m^2} - \frac{k\,dq\,cos.\,q}{\lambda^3 m^2} + \frac{n\,dq\,cos.\,\omega}{\lambda m^2}(1+k\,cos.\,q)$$
$$+\frac{n\alpha^3\,dq}{\lambda m^2 v^3}(\lambda+2\lambda k\,cos.\,q - cos.\,\omega - k\,cos.\,q\,cos.\,\omega) + \frac{n\,ddr}{dq}(1-k\,cos.\,q) + nk\,dr\,sin\,q$$
$$+3\alpha\alpha nr\,dq - 9\alpha\alpha nkr\,dq\,cos.\,q + 2\alpha nL\,dq\,cos.\,\omega - 2\alpha nMk\,dq\,cos.(\omega+q) - \frac{2\alpha nM}{1-2m}k\,dq\,cos.(\omega-q)$$
$$-\frac{2nr\,dq}{\lambda^3 m^2} + \frac{4nkr\,dq\,cos.\,q}{\lambda^3 m^2} \qquad -2\alpha nLk\,dq\,cos.(\omega-q) - 2\alpha nLk\,dq\,cos.(\omega-q)$$

Or, puisque r ne peut contenir ni aucun terme constant, ni aucun de cette forme $\varepsilon\,cos.\,q$, il faut absolument que ces termes se détruisent séparément dans l'équation, ayant déja marqué les termes de cette nature, qui sont contenus dans $\frac{n\alpha^3\,dq}{\lambda m^2 v^3}(\lambda + 2\lambda k\,cos.\,q - cos.\,\omega - k\,cos.\,q\,cos.\,\omega)$, d'où nous tirerons ces deux égalités :

$$0 = -\alpha^2 dq + \frac{(1+\nu)dq}{\lambda^3 m^2} + \frac{\lambda nA}{m^2 h}dq - \frac{nB}{2m^2 h}dq$$
$$0 = +2\alpha^2 k\,dq\,cos.\,q - k\,dq\,cos.\,q - \frac{k\,dq\,cos.\,q}{\lambda^3 m^2} + \frac{2\lambda nAk\,dq\,cos.\,q}{m^2 h}$$
$$-\frac{nBk\,dq\,cos.\,q}{2m^2 h} - \frac{\lambda nP^0 k\,dq\,cos.\,q}{m^2 h} + \frac{nQ^0 k\,dq\,cos.\,q}{2m^2 h},$$

& de-là nous obtiendrons :

$\alpha\alpha = \frac{1+\nu}{\lambda^3 m^2} + \frac{\lambda n A}{m^2 h} - \frac{n B}{2 m^2 h}$, qui étant ſubſtituée dans l'autre, donne :

$$\frac{1+\nu}{\lambda^3 m^2} + \frac{4 \lambda n A}{m^2 h} - \frac{3 n B}{2m^2 h} - 1 - \frac{\lambda n P^0}{m^2 h} + \frac{n Q^0}{2 m^2 h} = 0.$$

Par conſéquent nous aurons :

$$\frac{1+\nu}{\lambda^3 m^2} = 1 - \frac{4 \lambda n A}{m^2 h} + \frac{3 n B}{2 m^2 h} + \frac{\lambda n P^0}{m^2 h} - \frac{n Q^0}{2 m^2 h} \;\&$$

$$\alpha^2 = 1 - \frac{3 \lambda n A}{m^2 h} + \frac{n B}{m^2 h} + \frac{\lambda n P^0}{m^2 h} - \frac{n Q^0}{2m^2 h}.$$

§. LIII. Mettant ces valeurs pour α^2 & $\frac{1+\nu}{\lambda^3 m^2}$ (dans les plus petits termes, il ſuffira de mettre 1 à leur place,) & dévelopant de plus les termes contenus dans la formule $\frac{n a^3 dq}{\lambda m^2 v^3}$ ($\lambda + 2 \lambda k \cos. q - \cos. \omega - k \cos. q \cos. \omega$), nous parviendrons à cette équation :

$$0 = \frac{ddr}{dq}(1 - k \cos. q) + k dr \sin. q + r dq (1 - 5 k \cos. q) + 2 L dq \cos. \omega$$

$$\left.\begin{matrix} -2M \\ -2L \end{matrix}\right\} k dq \cos. (\omega + q) \quad \left.\begin{matrix} -\frac{2M}{1-2m} \\ -2L \end{matrix}\right\} k dq \cos. (\omega - q)$$

$$\frac{dq}{\lambda mm}\left(\cos. \omega + k \cos. q \cos. \omega\right) + \frac{dq}{hmm}\left\{\begin{matrix} \lambda B \cos. \omega - \lambda Q^0 k \cos. \omega \cos. q + 2\lambda B k \cos. \omega \cos. q \\ - A \cos. \omega + P^0 k \cos. \omega \cos. q - A k \cos. \omega \cos. q \\ -\frac{1}{2} C \cos. \omega + \frac{1}{2} R^0 k \cos. \omega \cos. q - \frac{1}{2} C k \cos. \omega \cos. q \end{matrix}\right\}$$

Pour abréger davantage, & pour rendre cette équation plus ſimple, ſoient

$$L^0 = 2L + \frac{\lambda B - A - \frac{1}{2} C}{hmm} + \frac{1}{\lambda mm}.$$

$$M^0 = 2M + 2L + \frac{\lambda Q^0 - P^0 - \frac{1}{2} R^0}{2hmm} - \frac{2\lambda B + A + \frac{1}{2} C}{2hmm} - \frac{1}{2\lambda mm}.$$

$$N^0 = \frac{2M}{1-2m} + 2L + \frac{\lambda Q^0 - P^0 - \frac{1}{2} R^0}{2hmm} - \frac{2\lambda B + A + \frac{1}{2} C}{2hmm} - \frac{1}{2\lambda mm}.$$

& alors l'équation trouvée ſe changera en celle-ci :

$$0 = \frac{ddr}{dq}(1 - k \cos. q) + k dr \sin. q + r dq (1 - 5 k \cos. q) + L^0 dq \cos. \omega$$

$$- M^0 k dq \cos. (\omega + q) - N^0 k dq \cos. (\omega - q)$$

§. LIV.

§. LIV. Pour trouver l'intégrale de cette équation, la forme de r étant facile à deviner, fuppofons :

$$r = L'\,\text{cof.}\,\omega + M'k\,\text{cof.}\,(\omega+q) + N'k\,\text{cof.}\,(\omega-q),$$

& à caufe que $d\omega = \frac{dq}{m}\left(1-m+(1+m)\,k\,\text{cof.}\,q\right)$, nous aurons :

$$\frac{dr}{dq} = -\frac{(1-m)}{m}L'\,\text{fin.}\,\omega - \frac{(1+m)}{2m}L'k\,\text{fin.}(\omega+q) - \frac{(1+m)}{2m}L'k\,\text{fin.}\,(\omega-q)$$
$$-\frac{M'}{m}k\,\text{fin.}(\omega+q) - \frac{(1-2m)}{m}N'k\,\text{fin.}(\omega-q)$$

$$\& \frac{ddr}{dq^2} = -\frac{(1-m)^2}{m^2}L'\,\text{cof.}\,\omega - \frac{(1-m)(1+m)}{2mm}L'k\,\text{cof.}\,(\omega+q) - \frac{(1-m)(1+m)}{2mm}L'k\,\text{cof}(\omega-q)$$
$$-\frac{(1+m)}{2mm}L'k\,\text{cof.}\,(\omega+q) - \frac{(1+m)(1-2m)}{2mm}L'k\,\text{cof.}(\omega-q)$$
$$-\frac{1}{mm}M'k\,\text{cof.}(\omega+q) - \frac{(1-2m)^2}{mm}N'k\,\text{cof.}(\omega-q)$$

§. LV. Ces valeurs étant fubftituées dans l'équation, donneront :

$$0 = \left.\begin{array}{r} -\frac{(1-m)^2}{m^2}L' \\ +L' \\ +L^\circ \end{array}\right\}\text{cof.}\,\omega \quad \left.\begin{array}{r} +\frac{(1-m)^2}{2m^2}L' \\ -\frac{(1-m)(1+m)}{2m^2}L' \\ -\frac{(1+m)}{2m^2}L' \\ -\frac{1}{m^2}M' \\ +\frac{(1-m)}{2m}L' \\ +M' \\ -\frac{5}{2}L' \\ -M^\circ \end{array}\right\} k\,\text{cof.}\,(\omega+q) \quad \left.\begin{array}{r} +\frac{(1-m)^2}{2m^2}L' \\ -\frac{(1-m)(1+m)}{2m^2}L' \\ -\frac{(1+m)(1-2m)}{2m^2}L' \\ -\frac{(1-2m)^2}{m^2}N' \\ -\frac{(1-m)}{2m}L' \\ +N' \\ -\frac{5}{2}L' \\ -N^\circ \end{array}\right\} k\,\text{cof.}\,(\omega-q)$$

qui, en égalant chaque membre à part à zero, donnera :

$$L' = \frac{mm}{1-2m}L^\circ$$

$$M' = -\frac{mm}{1-mm}M^\circ - \frac{(1+2m+4mm)}{2(1-mm)}L'.$$

$$N' = \frac{-mm}{1-4m+3mm}N^\circ - \frac{(1+2m)}{2(1-4m+3mm)}L'.$$

Ainſi la valeur de r ſera connue, & ſera :

$$r = L' \,cos.\, \omega + M' k \,cos.\, (\omega + q) + N' k \,cos.\, (\omega - q),$$

ce qui donera la vraie diſtance de Saturne au Soleil,

$$z = f(1 + k \,cos.\, q + nr),$$

où il faut remarquer que la lettre L' marque la même quantité que nous avons trouvée dans l'article précédent pour A', de ſorte qu'on doit encore ajouter ici les mêmes termes $B' \,cos.\, 2\omega + C' \,cos.\, 3\omega + D' \,cos.\, 4\omega +$ &c. que je n'ai pas voulu chercher de nouveau. Car en général, on comprendra aiſément, que cette nouvelle conſidération ne change point les inégalités déja trouvées.

§. LVI. Ayant trouvé la valeur de r, on en tirera aiſément celle de $\frac{dx}{dq}$, par le moyen de l'équation du §. LI. laquelle étant diviſée par $1 + k \,cos.\, q$, ou multipliée par $1 - k \,cos.\, q$, donnera, en mettant pour r la valeur précédente,

$$\frac{dx}{dq} = \left.\begin{matrix} -2L' \\ -L \end{matrix}\right\} cos.\, \omega \quad \left.\begin{matrix} -2M' \\ +2L' \\ +M \\ +\frac{1}{2}L \end{matrix}\right\} k \,cos.\, (\omega + q) \quad \left.\begin{matrix} -2N' \\ +2L' \\ +\frac{M}{1-2m} \\ +\frac{1}{2}L \end{matrix}\right\} k \,cos.\, (\omega - q),$$

& puiſque, ſuivant la même méthode dont je me ſuis ſervi §. L.

$$\int dq \,cos.\, (\omega + q) = m \,ſin.\, (\omega + q).$$

$$\int dq \,cos.\, (\omega - q) = \frac{m}{1-2m} \,ſin.\, (\omega - q).$$

$$\int dq \,cos.\, \omega = \frac{m}{1-m} \,ſin.\, \omega - \frac{m(1+m)}{2(1-m)} k \,ſin.\, (\omega + q)$$

$$- \frac{m(1+m)}{2(1-m)(1-2m)} k \,ſin.\, (\omega - q),$$

la valeur intégrale ſera :



$$x = \left.\begin{array}{l} \frac{-m}{1-m}(2L'+L)\,\mathit{sin.}\,\omega + \frac{m(1+m)}{2(1-m)}(2L'+L) \\ \quad + m(2L'-2M'+M+\frac{1}{2}L) \end{array}\right\} k\,\mathit{sin.}\,(\omega+q)$$

$$\left.\begin{array}{l} + \frac{m(1+m)}{2(1-m)(1-2m)}(2L'+L) \\ + \frac{m}{1-2m}\left(2L'-2N'+\frac{M}{1-2m}+\frac{1}{2}L\right) \end{array}\right\} k\,\mathit{sin.}\,(\omega-q).$$

& par conféquent on connoîtra la vraie longitude heliocentrique de Saturne, par la formule $\varphi = \alpha \int \frac{dq\sqrt{(1-kk)}}{1+k\,\mathit{cof}\,q} + nx$, pourvû qu'on y ajoûte les autres inégalités, que j'ai déja trouvées dans l'article précédent.

§. LVII. Puifque $\frac{\sqrt{(1-kk)}}{1+k\,\mathit{cof.}\,q} = 1 - k\,\mathit{cof.}\,q + \frac{1}{2}kk\,\mathit{cof.}\,2q$ — &c. on aura $\int \frac{dq\sqrt{(1-kk)}}{1+k\,\mathit{cof.}\,q} = q - k\,\mathit{fin.}\,q + \frac{1}{4}k^2\,\mathit{fin.}\,2q$ & partant $\varphi = \alpha q - \alpha k\,\mathit{fin.}\,q + \frac{1}{4}\alpha k^2\,\mathit{fin.}\,2q$ — &c. $+ nx$. Or, q étant l'anomalie excentrique, & l'anomalie moyenne p étant $= q + k\,\mathit{fin.}\,q$, on aura $q = p - k\,\mathit{fin.}\,q$, & par conféquent la longitude $\varphi = \alpha p - 2\alpha k\,\mathit{fin.}\,q + \frac{1}{4}\alpha k^2\,\mathit{fin.}\,2q$ — &c. $+ nx$: où chaque terme, excepté le premier, marque une inégalité du mouvement. Quant au premier α, il exprime la longitude moyenne: donc puifque α n'eft pas exactement $= 1$, on voit que le mouvement moyen en longitude, eft différent du mouvement de l'anomalie moyenne; de forte que pendant une révolution entiere, l'anomalie moyenne n'eft avancée que de $\frac{1}{\alpha}$, $360°$: & par conféquent le lieu de l'aphélie fera avancé pendant le même tems de $\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)360°$. Or, puifque $\alpha\alpha = 1 - \frac{3\lambda nA}{m^2h} + \frac{nB}{m^2h} + \frac{n}{m^2h}(\lambda P^0 - \frac{1}{2}Q^0)$, on aura $\frac{1}{\alpha} = 1 + \frac{n}{2m^2h}(3\lambda A - B) - \frac{n}{2m^2h}(\lambda P^0 - \frac{1}{2}Q^0)$. Donc pendant une révolution entiere de Saturne, fon aphé-

lie avancera d'un angle $= \frac{n}{m^2 h}(\lambda P^\circ - \frac{1}{2} Q^\circ - 3\lambda A + B) 180^\circ$, dont je donnerai bien-tôt la quantité.

§. LVIII. Pour évaluer ces expreſſions en nombres, nous ſuppoſerons l'excentricité de l'orbite de Saturne $k = 0,05700372$, d'après les Tables Aſtronomiques; & quoiqu'elle puiſſe avoir beſoin de quelque correction, il n'en réſultera aucun changement conſidérable dans les inégalités que je viens de trouver. Les valeurs des lettres A, B, C, D, &c. étant déja données dans l'article précédent, celles des lettres nouvellement introduites ſeront :

$P = 13,216012$;	$P^\circ = 15,5662$;	$L = -1,84937$;	$L^\circ = 1,09431$;	$L' = 0,909616$
$Q = 23,790513$;	$Q^\circ = 26,4102$;	$M = 0,36795$;	$M^\circ = -2,74013$;	$M' = -0,80163$
$R = 18,949390$;	$R^\circ = 20,1064$;		$N^\circ = 0,29917$;	$N' = 7,00984$
$S = 13,829410$;				

De-là nous trouverons que l'aphélie de Saturne doit avancer, pendant une révolution entiere de cette Planete, de $821'' = 13' 41''$, par rapport aux étoiles fixes. Et comme cela arrive en 29 ans & 5 mois, à peu près, le mouvement annuel de cette aphélie ſera $= 28''$: donc par rapport aux équinoxes, l'aphélie de Saturne avancera de $1' 18''$ par an, ce qui s'accorde admirablement bien avec les Tables Aſtronomiques de M. Caſſini ; & ne diffère de celles que Leadbetter a publiées que de $2''$. Ce qui marque déja une grande harmonie entre la théorie & les obſervations, quoiqu'il n'y ait aucun doute que ce mouvement pourroit être ou un peu plus prompt, ou plus lent, ſans qu'on l'eût pû appercevoir.

§. LIX. La valeur de la lettre r, d'où dépend la diſtance de Saturne au Soleil, ſera :

$$r = 0,90962 \cos. \omega - 0,04569 \cos. (\omega + q) + 0,39959 \cos. (\omega - q).$$

Si l'on ajoûte les autres membres qui contiennent $\cos. 2\,\omega$



cos. 3 ω &c. déja trouvés, & qu'on multiplie la valeur de r par n, on trouvera enfin le vrai rapport de la diſtance de Saturne au Soleil z, à ſa diſtance moyenne f:

$$\frac{z}{f} = 1 + 0{,}05700372\,\textit{coſ.}\,q + 0{,}0008542\,\textit{coſ.}\,\omega + 0{,}0001449\,\textit{coſ.}\,2\omega + 0{,}0000335\,\textit{coſ.}\,3\omega + \&c.$$
$$- 0{,}0000429\,\textit{coſ.}\,(\omega + q) + 0{,}0003752\,\textit{coſ.}\,(\omega - q).$$

Juſqu'ici la détermination de la diſtance z demande quatre équations ou corrections, dont la premiere eſt proportionnelle au coſinus de l'anomalie excentrique q, laquelle ſe trouve uniquement dans les Tables Aſtronomiques. La ſeconde dépend de la diſtance ω, que l'on a en ſouſtrayant la longitude de Saturne de celle de Jupiter; & il eſt à remarquer que les parties *coſ.* ω, *coſ.* 2 ω, *coſ.* 3 ω, &c. peuvent être commodément compriſes dans une ſeule Table. La troiſieme équation eſt proportionnelle au coſinus de l'angle $\omega + q$, que l'on aura, en ajoûtant l'anomalie excentrique q à la diſtance ω; & enfin la quatrieme eſt proportionnelle au coſinus de l'angle $\omega - q$.

§. LX. Les mêmes valeurs que j'ai trouvées, donneront auſſi celle de x, qui ſera:

$$x = + 0{,}02031\,\textit{ſin.}\,\omega + 0{,}06495\,\textit{ſin.}\,(\omega + q) - 1{,}32705\,\textit{ſin.}\,(\omega - q);$$

à laquelle il faut encore ajoûter les termes trouvés dans l'article précédent, qui renferment *ſin.* 2 ω, *ſin.* 3 ω, &c. Alors on n'a qu'à multiplier cette expreſſion de x par le nombre n, & l'ajoûter à la longitude de Saturne, que donne la ſeule conſidération des loix de Kepler. Pour cet effet, ſoit η la longitude moyenne de Saturne, & Y ſon équation elliptique, ou la proſtaphéreſe, tirée des Tables Aſtronomiques, de ſorte que $Y = -2\alpha k\,\textit{ſin.}\,q + \frac{1}{4}\alpha k^2\,\textit{ſin.}\,2q$, &c. & alors on aura la longitude vraie de Saturne:

$$\varphi = \eta + Y + 0{,}0000191\,\textit{ſin.}\,\omega - 0{,}0001523\,\textit{ſin.}\,2\omega - 0{,}0000316\,\textit{ſin.}\,3\omega$$
$$- 0{,}0000093\,\textit{ſin.}\,4\omega + 0{,}0000611\,\textit{ſin.}\,(\omega + q) - 0{,}0012462\,\textit{ſin.}\,(\omega - q).$$

Ces expreſſions des ſinus étant converties en angles réduits en minutes, ſecondes, donneront :

$$\varphi = \eta + Y + 4''. \mathit{ſin.}\, \omega - 32'' \mathit{ſin.}\, 2\,\omega - 7''. \mathit{ſin.}\, 3\,\omega - 2'' \mathit{ſin.}\, 4\,\omega + 13''. \mathit{ſin.} (\omega + q) - 257''. \mathit{ſin.} (\omega - q).$$

§. LXI. La derniere équation $257'' \mathit{ſin}\, (\omega - q)$ eſt donc la plus conſidérable, vû qu'elle monte à $4' \, 17''$, quand l'angle $\omega - q$ eſt ou 90°, ou 270°. Au reſte, il ſera à propos de calculer cet effet de l'action de Jupiter dans les principales poſitions de Saturne : l'on voit d'abord que dans les conjonctions de Saturne & de Jupiter, quand $\omega = 0$, on aura :

$$\frac{z}{f} = 1{,}0010466 + 0{,}0573360\, \mathit{coſ.}\, q; \quad \varphi = \eta + Y + 270'' \mathit{ſin.}\, q.$$

Dans les oppoſitions de Saturne & de Jupiter, quand $\omega = 180^\circ$, on aura :

$$\frac{z}{f} = 0{,}9992652 + 0{,}0566714\, \mathit{coſ.}\, q; \quad \varphi = \eta + Y - 270''. \mathit{ſin.}\, q.$$

Donc dans les conjonctions, la plus grande équation de Saturne $Y = 6^\circ \, 32'$, paroîtra diminuée de $4' \, 30''$: mais dans les oppoſitions, elle paroîtra augmentée de $4' \, 30''$. Or, ſi dans l'une & l'autre poſition, Saturne ſe trouve dans ſon aphélie ou perihélie, alors l'inégalité qui vient de cette action de Jupiter, s'évanoüira tout-à-fait : ce qui ſe doit entendre ſeulement dans le cas où l'orbite de Jupiter eſt ſuppoſée circulaire ; car ſon excentricité produit de nouvelles inégalités, que je vais rechercher dans l'article ſuivant.



V.

Recherche des inégalités du Mouvement de Saturne, qui viennent de l'excentricité de l'orbite de Jupiter.

§. LXII. PUISQUE la distance de Jupiter au Soleil est variable, à cause de son excentricité, son action sur Saturne doit être un peu différente de celle que nous avons employée pour conclurre les inégalités précédentes; de sorte que cette circonstance demande quelque correction. Ayant donc supposé ci-dessus la distance de Jupiter au Soleil $= a$, soit maintenant a sa distance moyenne, & e son excentricité. Supposons de plus, que pour un certain tems proposé, sa longitude moyenne ou bien son anomalie moyenne soit $= \zeta$, sa longitude vraie $= \theta$, & son anomalie excentrique $= p$, sa distance vraie au Soleil $= v$, la théorie du mouvement des Planetes principales nous donnera $v = a(1 + e \cos. p)$, $\zeta = p + e \sin. p$, ou $d\zeta = dp(1 + e \cos. p.)$, & $d\theta = \frac{dp\sqrt{(1-ee)}}{1+e\cos. p}$. Car on conviendra aisément, que dans cette recherche on pourra, sans craindre d'erreur, négliger les inégalités que l'action de Saturne cause réciproquement dans le mouvement de Jupiter; vû que celles-ci étant fort petites, l'effet qui en résulteroit sur Saturne, sera tout-à-fait insensible.

§. LXIII. Par la même raison, je pourrai ici faire abstraction de l'excentricité de l'orbite de Saturne, ayant déja déterminé les inégalités qui en résultent, & qui ne



souffriront aucun changement sensible de l'excentricité de l'orbite de Jupiter. Je regarderai donc la valeur de k comme nulle dans cet article. Cela posé, supposant la distance moyenne de Saturne au Soleil $= f$, sa distance vraie $z = f(1 + nr)$; la longitude moyenne $= \nu$, & la longitude vraie $= \varphi$, nous aurons, comme auparavant, $d\nu = m\,d\zeta$; $d\varphi = m\,d\zeta + n\,dx$; de sorte que $d\varphi = m\,dp\,(1 + e\,cos.p) + n\,dx$, & $d\omega = d\theta - d\varphi$. Or dans les petits termes des équations que nous avons à résoudre, nous pourrons, sans erreur sensible, supposer $d\theta = dp\,(1 - e\,cos.p)$. Donc $d\omega = dp\left(1 - m - (1+m)\,e\,cos.p\right)$; car le terme $n\,dx$ ne sera d'aucune conséquence dans les membres des équations, qui, par rapport aux autres, sont déja comme infiniment petits.

§. LXIV. Cela remarqué, reprenons les équations fondamentales, que nous a fournies l'hypothese, que les deux orbites de Jupiter & de Saturne se trouvent dans le même plan.

$$\text{I. } dd\zeta - z\,d\varphi^2 + a^3 d\zeta^2 \left(\frac{1+\nu}{zz} + \frac{nz}{v^3} + \frac{n\,cos.\,\omega}{yy} - \frac{ny\,cos.\,\omega}{v^3}\right) = 0.$$

$$\text{II. } 2\,dz\,d\varphi + z\,dd\varphi + n\,a^3 d\zeta^2\,sin.\,\omega \left(\frac{1}{yy} - \frac{y}{v^3}\right) = 0.$$

& mettant pour z & y les valeurs marquées, nous aurons:

$$\text{I. } nfddr - f(1+nr)\,d\varphi^2 + a^3 d\zeta^2 \left(\frac{1+\nu}{ff(1+nr)^2} + \frac{nf}{v^3} + \frac{n\,cos.\,\omega}{aa(1+e\,cos.p)^2} - \frac{na(1+e\,cos.p)\,cos.\,\omega}{v^3}\right) = 0$$

$$\text{II. } 2nfdr\,d\varphi + f(1+nr)\,dd\varphi + na^3 d\zeta\,sin.\,\omega \left(\frac{1}{aa(1+e\,cos.p)^2} - \frac{1 - e\,cos.p}{v^3}\right) = 0.$$

Or, parce que $d\varphi = m\,d\zeta + n\,dx$, & partant $dd\varphi = nddx$, (à cause que $d\zeta$ est constant), si nous faisons, comme ci-dessus, $f = \lambda a$, ces équations se changeront en celles-ci:

$$\text{I. } nddr - mmd\zeta^2 - m^2 nrd\zeta^2 - 2mnd\zeta dx + \frac{(1+\nu)(1-2nr)d\zeta^2}{\lambda^3} + \frac{na^3 d\zeta^2}{v^3}$$
$$+ \frac{n\,d\zeta^2\,cos.\,\omega\,(1 - 2\,e\,cos.p)}{\lambda} - \frac{n\,a^3 d\zeta^2\,cos.\,\omega\,(1 + e\,cos.p)}{\lambda v^3} = 0$$

II.



$$\text{II. } 2md\zeta dr + ddx + \frac{d\zeta^2 \,\text{fin.}\, \omega\,(1-2e\,\text{cof.}\,p)}{\lambda} - \frac{a^3 d\zeta^2\,\text{fin.}\,\omega\,(1+e\,\text{cof.}\,p)}{\lambda v^3} = 0,$$

ayant divifé cette derniere équation par n, & négligé par-tout les termes qui renferment des puiffances de e ou de n, vû que ces termes s'évanoüiffent auprès des autres.

§. LXV. Avant que de paffer outre, nous chercherons à détruire l'effet de la fuppofition de $d\zeta$ conftant, pour pouvoir fuppofer quelqu'autre différentielle conftante.

$$\text{I. } nd.\frac{dr}{d\zeta} - mmd\zeta - m^2nrd\zeta - 2mndx + \frac{(1+\nu)d\zeta}{\lambda^3} - \frac{2nrd\zeta}{\lambda^3}$$
$$+ \frac{na^3d\zeta(\lambda - \text{cof.}\,\omega - e\,\text{cof.}\,\omega\,\text{cof.}\,p)}{\lambda v^3} + \frac{nd\zeta\,\text{cof.}\,\omega\,(1-2e\,\text{cof.}\,p)}{\lambda} = 0.$$

$$\text{II. } d.\frac{dx}{d\zeta} + 2mdr + \frac{d\zeta\,\text{fin.}\,\omega\,(1-2e\,\text{cof.}\,p)}{\lambda} - \frac{a^3d\zeta\,\text{fin.}\,\omega\,(1+e\,\text{cof.}\,p)}{\lambda v^3} = 0.$$

Or, puifque $d\zeta = dp\,(1+e\,\text{cof.}\,p)$, & que partant, en négligeant les termes qui renferment ee, $\frac{1}{d\zeta} = \frac{1-e\,\text{cof}\,p}{dp}$, ces équations prendront les formes fuivantes :

$$\text{I. } nd.\frac{dr\,(1-e\,\text{cof.}\,p)}{dp} - mm\,dp\,(1+e\,\text{cof.}\,p) - m^2nr\,dp\,(1+e\,\text{cof.}\,p)$$
$$+ \frac{(1+\nu)dp(1+e\,\text{cof.}\,p)}{\lambda^3} - \frac{2nrdp(1+e\,\text{cof.}\,p)}{\lambda^3} + \frac{ndp\,\text{cof.}\,\omega(1-e\,\text{cof.}\,p)}{\lambda}$$
$$- 2mndx + \frac{na^3dp}{\lambda v^3}\,(\lambda + \lambda e\,\text{cof.}\,p - \text{cof.}\,\omega - 2e\,\text{cof.}\,\omega\,\text{cof.}\,p) = 0.$$

$$\text{II } d.\frac{dx(1-e\,\text{cof.}\,p)}{dp} + 2mdr + \frac{dp\,\text{fin.}\,\omega(1-e\,\text{cof.}\,p)}{\lambda} - \frac{a^3dp\,\text{fin.}\,\omega(1+2e\,\text{cof}\,p)}{\lambda v^3} = 0;$$

où il faut remarquer que $v = \sqrt{\left(aa + ff + 2aae\,\text{cof.}\,p - 2af(1+e\,\text{cof.}\,p)\,\text{cof.}\,\omega\right)}$, & à caufe de $f = \lambda a$, on aura $v = a\sqrt{(1 + \lambda\lambda - 2\lambda\,\text{cof.}\,\omega + 2e\,\text{cof.}\,p - 2\lambda e\,\text{cof.}\,\omega\,\text{cof.}\,p)}$.

LXVI. Suppofons maintenant dp conftant, & nous aurons ces équations :

$$\text{I. } \frac{nddr(1-e\,cos.p)}{dp} + nedr\,sin.\,p. - mm\,dp(1+e\,cos.p.) - m^2nrdp(1+e\,cos.p) + \frac{(1+\nu)\,dp(1+e\,cos.p)}{\lambda^3} - \frac{2nrdp(1+e\,cos.p)}{\lambda^3} - 2mndx + \frac{ndp\,cos.\omega(1-e\,cos.p)}{\lambda} + \frac{na^3dp(\lambda - cos.\omega + \lambda e\,cos.p - 2e\,cos.\omega\,cos\,p)}{\lambda v^3} = 0.$$

$$\text{II. } \frac{ddx(1-e\,cos.p)}{dp} + edx\,sin.\,p + 2mdr + \frac{dp\,sin.\,\omega(1-e\,cos.p)}{\lambda} - \frac{a^3dp\,sin.\,\omega(1+2e\,cos.p)}{\lambda v^3} = 0.$$

Et pour exprimer plus commodément la valeur de v, soit $\frac{2\lambda}{1+\lambda\lambda} = g$, & nous aurons $v = (1+\lambda\lambda)^{\frac{1}{2}}\, a \sqrt{\left(1 - g\,cos.\,\omega + g\,e\,cos.\,p\left(\frac{1}{\lambda} - cos.\,\omega\right)\right)}$, & partant $\frac{a^3}{v^3} = \frac{1}{(1+\lambda\lambda)^{\frac{3}{2}}}\left(1 - g\,cos.\,\omega + g\,e\,cos.\,p.\left(\frac{1}{\lambda} - cos.\,\omega\right)\right)^{-\frac{3}{2}}$.

Or, puisque $g\,e\,cos.\,p\left(\frac{1}{\lambda} - cos.\,\omega\right)$ est fort petit, par rapport à $1 - g\,cos.\,\omega$, nous en tirerons d'abord cette approximation, en supposant $\lambda(1+\lambda\lambda)^{\frac{3}{2}} = h$.

$$\frac{a^3}{\lambda v^3} = \frac{1}{h}(1-g\,cos.\,\omega)^{-\frac{3}{2}} - \frac{3g\,e\,cos.p}{2h}\left(\frac{1}{\lambda} - cos.\,\omega\right)(1-g\,cos.\,\omega)^{-\frac{5}{2}}.$$

Soit, comme dans l'article précédent,

$$(1-g\,cos.\,\omega)^{-\frac{3}{2}} = A + B\,cos.\,\omega + C\,cos.\,2\,\omega + D\,cos.\,3\,\omega + E\,cos.4\,\omega + \&c.$$

$$(1-g\,cos.\,\omega)^{-\frac{5}{2}} = P + Q\,cos.\,\omega + R\,cos.\,2\,\omega + S\,cos.\,3\,\omega + T\,cos.\,4\,\omega + \&c.$$

& pour abréger, en multipliant cette derniere suite par $\frac{1}{\lambda} - cos.\,\omega$, supposons :

$$P^{\text{v}} = \frac{3g}{2\lambda}P - \frac{3}{4}gQ.$$

$$Q^{\text{v}} = \frac{3g}{2\lambda}Q - \frac{3}{2}gP - \frac{3}{4}gR.$$

$$R^{\text{v}} = \frac{3g}{2\lambda}R - \frac{3}{4}gQ - \frac{3}{4}gS.$$

$$S^{\text{v}} = \frac{3g}{2\lambda}S - \frac{3}{4}gR - \frac{3}{4}gT.$$



on aura :

$$\frac{a^3}{\lambda v^3} = \frac{1}{h}(A + B \cos. \omega + C \cos. 2\omega + D \cos. 3\omega + \&c.)$$
$$- \frac{e \cos. p}{h}(P^V + Q^V \cos. \omega + R^V \cos. 2\omega + S^V \cos. 3\omega + \&c.)$$

§. LXVII. Subſtituons cette valeur dans la premiere équation, & égalons ſéparément à zero les termes conſtans, ou qui ne contiennent que dp nous trouverons par ce moyen :

$$-mm\,dp + \frac{(1+\nu)\,dp}{\lambda^3} + \frac{\lambda n A dp}{h} - \frac{nBdp}{2h} = 0,$$

ce qui donne, $\frac{1+\nu}{\lambda^3} = mm - \frac{\lambda n A}{h} + \frac{nB}{2h}$.

Cette valeur étant remiſe, & toute l'équation diviſée par n, il en réſultera :

$$\text{I.}\quad \frac{ddr(1 - e\cos. p)}{dp} + e\,dr\,\sin. p - \frac{(2\lambda A - B)}{2h}\,e\,dp\cos. p$$
$$-3mmr\,dp(1 + e\cos. p) - 2m\,dx + \frac{dp\cos. \omega(1 - e\cos. p)}{\lambda}$$
$$+ \frac{a^3\,dp}{\lambda v^3}(\lambda - \cos. \omega + \lambda e\cos. p - 2e\cos. \omega\cos. p) = 0,$$

omettant dans l'évolution de ce dernier membre les termes conſtans, la ſeçonde équation ſe changera en celle-ci :

$$\text{II.}\quad \frac{ddx(1 - e\cos. p)}{dp} + e\,dx\,\sin. p + 2m\,dr + \frac{dp\sin. \omega(1 - e\cos. p)}{\lambda}$$
$$- \frac{a^3\,dp\sin. \omega(1 + 2e\cos. p)}{\lambda v^3} = 0,$$

dont l'intégrale eſt :

$$\frac{dx}{dp}(1 - e\cos. p) + 2mr + \frac{1}{\lambda}\int dp(\sin. \omega - e\cos. p\sin. \omega)$$
$$-\int \frac{a^3dp}{\lambda v^3}(\sin. \omega + 2e\cos. p\sin. \omega) = 0.$$

§. LXVIII. Pour trouver les parties de ces intégrales qui peuvent être ſenſibles, il faut remarquer que les termes qui renfermeront l'angle $2\omega - p$ deviendront ſi conſidérables, qu'il ne ſera plus permis de les négliger, à cauſe du dénominateur $1 - 2m$, qui, dans l'évolution,



affectera ces termes. Cette circonstance rend l'intégration de ces formules plus difficile que dans l'article précédent ; & remettant pour $\frac{a^3}{\lambda v^3}$ sa valeur, nous aurons :

$$\frac{dx}{dp}(1-e\,cos.\,p) = -2mr - \frac{1}{\lambda}\int dp\,sin.\,\omega + \frac{e}{\lambda}\int dp\,sin.\,\omega\,cos.\,p$$

$$\left.\begin{matrix}+\frac{A}{h}\\ -\frac{C}{2h}\end{matrix}\right\}\int dp\,sin.\,\omega \quad \left.\begin{matrix}+\frac{B}{2h}\\ -\frac{D}{2h}\end{matrix}\right\}\int dp\,sin.\,2\,\omega \quad \left.\begin{matrix}-\frac{eP^V}{h}\\ +\frac{eR^V}{2h}\\ +\frac{2eA}{h}\\ -\frac{eC}{h}\end{matrix}\right\}\int dp\,sin.\,\omega\,cos.\,p \quad \left.\begin{matrix}-\frac{eQ^V}{2h}\\ +\frac{eS^V}{2h}\\ +\frac{eB}{h}\\ -\frac{eD}{h}\end{matrix}\right\}\int dp\,sin.\,2\,\omega\,cos.\,p$$

Faisons, pour abréger, $\frac{2A-C}{2h} - \frac{1}{\lambda} = A$; $\frac{B-D}{2h} = B$; $\frac{P^V - \frac{1}{2}R^V - 2A + C}{h} - \frac{1}{\lambda} = P$ & $\frac{\frac{1}{2}Q^V - \frac{1}{2}S^V - B + D}{h} = Q$; & puisque $sin.\,\omega\,cos.\,p = \frac{1}{2}sin.\,(\omega+p) + \frac{1}{2}sin.\,(\omega-p)$; & $sin.\,2\,\omega\,cos.\,p = \frac{1}{2}sin.\,(2\,\omega+p) + \frac{1}{2}sin.\,(2\,\omega-p)$, nous aurons :

$$\frac{dx}{dp}(1-e\,cos.\,p) = -2mr + A\int dp\,sin.\,\omega + B\int dp\,sin.\,2\omega$$
$$-\tfrac{1}{2}eP\int dp\,sin.\,(\omega+p) - \tfrac{1}{2}eQ\int dp\,sin.\,(2\,\omega+p)$$
$$-\tfrac{1}{2}eP\int dp\,sin.\,(\omega-p) - \tfrac{1}{2}eQ\int dp\,sin.\,(2\,\omega-p).$$

§. LXIX. Ayant vû que $d\omega = (1-m)\,dp - (1+m)\,e\,dp\,cos.\,p$, nous en conclurrons que $dp = \frac{d\omega}{1-m} + \frac{(1+m)\,e\,dp\,cos.\,p}{1-m}$, & cette valeur étant mise pour dp, nous en tirerons les intégrales suivantes :

$$\int dp\,sin.\,\omega = \frac{-1}{1-m}\,cos.\,\omega + \frac{(1+m)\,e}{2(1-m)}\int dp\,sin.\,(\omega+p) + \frac{(1+m)\,e}{2(1-m)}\int dp\,sin.\,(\omega-p).$$

$$\int dp\,sin.\,2\,\omega = \frac{-1}{2(1-m)}\,cos.\,2\omega + \frac{(1+m)\,e}{2(1-m)}\int dp\,sin\,(2\omega+p) + \frac{(1+m)\,e}{2(1-m)}\int dp\,sin.\,(2\,\omega-p).$$

Or, comme il suffit de prendre ces dernieres intégrales à peu près, nous trouverons, en supposant $d\omega = (1-m)dp$,



& en négligeant les termes qui renferment ee :

$$\int dp\, fin.(\omega+p) = \frac{-1}{2-m} cof.(\omega+p)\,; \quad \int dp\, fin.(2\omega+p) = \frac{-1}{3-2m} cof.(2\omega+p);$$

$$\int dp\, fin.(\omega-p) = +\frac{1}{m} cof.(\omega-p)\,; \quad \int dp\, fin.(2\omega-p) = \frac{-1}{1-2m} cof.(2\omega-p):$$

& ces valeurs étant fubftituées dans les formules précédentes, donneront :

$$\int dp\, fin.\,\omega = \frac{-1}{1-m} cof.\,\omega - \frac{(1+m)e}{2(1-m)(2-m)} cof.(\omega+p) + \frac{(1+m)e}{2m(1-m)} cof.(\omega-p).$$

$$\int dp\, fin.\,2\omega = -\frac{1}{2(1-m)} cof.\,2\omega - \frac{(1+m)e}{2(1-m)(3-2m)} cof.(2\omega+p) - \frac{(1+m)e}{2(1-m)(1-2m)} cof.(2\omega-p)$$

§. LXX. De-là l'équation intégrale trouvée §. LXVIII. fera :

$$\frac{dx(1-e\,cof.p)}{dp} = -2mr - \frac{A}{1-m} cof.\,\omega - \frac{B}{2(1-m)} cof.\,2\omega \left.\begin{matrix} \frac{-(1+m)Ae}{2(1-m)(2-m)} \\ + \frac{Pe}{2(2-m)} \end{matrix}\right\} cof.(\omega+p)$$

$$\left.\begin{matrix} + \frac{(1+m)Ae}{2m(1-m)} \\ - \frac{Pe}{2m} \end{matrix}\right\} cof.(\omega-p) \left.\begin{matrix} - \frac{(1+m)Be}{2(1-m)(3-2m)} \\ + \frac{Qe}{2(3-2m)} \end{matrix}\right\} cof.(2\omega+p) \left.\begin{matrix} - \frac{(1+m)Be}{2(1-m)(1-2m)} \\ + \frac{Qe}{2(1-2m)} \end{matrix}\right\} cof.(2\omega-p)$$

faifons, pour abréger :

$$\frac{A}{1-m} = A'\,; \quad \frac{B}{2(1-m)} = B'\,; \quad \frac{P}{2} - \frac{(1+m)A}{2(1-m)} = P' \;\&\; \frac{Q}{2} - \frac{(1+m)B}{2(1-m)} = Q',$$ pour avoir

$$\frac{dx(1-e\,cof.p)}{dp} = -2mr - A'cof.\,\omega + \frac{P'e}{2-m} cof.(\omega+p) + \frac{Q'e}{3-2m} cof.(2\omega+p)$$

$$- B'cof.\,2\omega - \frac{P'e}{m} cof.(\omega+p) + \frac{Q'e}{1-2m} cof.(2\omega-p).$$

Divifons enfuite par $1 - e\,cof.p$, ou, ce qui revient au même, multiplions par $1 + e\,cof.p$, & nous aurons :

$$\frac{dx}{dp} = -2mr - 2mer\,cos.p - A'cos.\omega \left.\begin{matrix} -\frac{1}{2}A' \\ +\frac{P'}{2-m} \end{matrix}\right\} e\,cos.(\omega+p) \left.\begin{matrix} -\frac{1}{2}A' \\ -\frac{P'}{m} \end{matrix}\right\} e\,cos.(\omega-p)$$

$$\left.\begin{matrix} -\frac{1}{2}B' \\ +\frac{Q'}{3-2m} \end{matrix}\right\} e\,cos.(2\omega+p) \left.\begin{matrix} -\frac{1}{2}B' \\ +\frac{Q'}{1-2m} \end{matrix}\right\} e\,cos.(2\omega-p).$$

$$-B'\,cos.2\omega$$

§. LXXI. Substituons à présent cette valeur dans la premiere équation; pour réussir plus aisément, multiplions auparavant par $1 - e\ cos.p$, & réduisant tous les produits des cosinus aux cosinus simples, comme on a fait ci-dessus, nous trouverons cette équation :

$$0 = \frac{ddr(1-2e\,cos.p)}{dp^2} + \frac{edr\,sin.p}{dp} + mmr$$

$$+ cos.\omega \left(2mA' + \frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda B}{h} - \frac{A}{h} - \frac{C}{2h}\right.$$

$$+ cos.2\omega \left(2mB' + \frac{\lambda C}{h} - \frac{B}{2h} - \frac{D}{2h}\right)$$

$$+ e\,cos.p \left(\frac{-\lambda A}{h} + \frac{B}{2h} - \frac{\lambda P^V}{h} + \frac{Q^V}{2h} - \frac{B}{2h}\right)$$

$$+ e\,cos.(\omega+p) \left(\frac{-2mP'}{2-m} - \frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda Q^V}{2h} + \frac{P^V}{2h} - \frac{A}{2h} + \frac{R^V}{4h} - \frac{C}{4h}\right)$$

$$+ e\,cos.(\omega-p) \left(2P' - \frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda Q^V}{2h} + \frac{P^V}{2h} - \frac{A}{2h} + \frac{R^V}{4h} - \frac{C}{4h}\right)$$

$$+ e\,cos.(2\omega+p) \left(\frac{-2mQ'}{3-2m} - \frac{\lambda R^V}{2h} + \frac{Q^V}{4h} - \frac{B}{4h} + \frac{S^V}{4h} - \frac{D}{4h}\right)$$

$$+ e\,cos.(2\omega-p) \left(\frac{-2mQ'}{1-2m} - \frac{\lambda R^V}{2h} + \frac{Q^V}{4h} - \frac{B}{4h} + \frac{S^V}{4h} - \frac{D}{4h}\right)$$

Soit encore fait, pour abréger :

$$\frac{\lambda B - A - \frac{1}{2}C}{h} + \frac{1}{\lambda} = B'; \quad \frac{\lambda C - \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}D}{h} = C'; \quad \frac{\lambda A + \lambda P^V - \frac{1}{2}Q^V}{h} = M';$$

$$\frac{\lambda Q^V - P^V - \frac{1}{2}R^V + A + \frac{1}{2}C}{2h} + \frac{1}{\lambda} = Q'; \quad \frac{\lambda R^V - \frac{1}{2}Q^V - \frac{1}{2}S^V + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}D}{2h} = R'$$



& nous aurons à résoudre l'équation qui suit :

$$
\begin{aligned}
0 = {} & \frac{ddr\,(1-2\,e\cos p)}{dp^2} + \frac{e\,dr\sin p}{dp} + mmr - M'e\cos p + (2m\,A' + B')\cos\omega \\
& + (2m\,B' + C')\cos 2\omega - \left(\frac{2m\,P'}{2-m} + Q'\right) e\cos(\omega + p) \\
& - \left(-2\,P' + Q'\right) e\cos(\omega - p) - \left(\frac{2m\,Q'}{3-2m} + R'\right) e\cos(2\omega + p) \\
& - \left(\frac{2m\,Q'}{1-2m} + R'\right) e\cos(2\omega - p).
\end{aligned}
$$

Or, quoiqu'on puisse intégrer cette équation absolument, vû que r ne s'y trouve que d'une dimension, il vaudra mieux, pour l'usage de l'Astronomie, se servir de l'approximation suivante.

§. LXXIII. Supposons donc, pour trouver la valeur de r :

$$
\begin{aligned}
r = {} & M''e\cos p + B''\cos\omega + C''\cos 2\omega + Q''e\cos(\omega+p) + R''e\cos(2\omega+p) \\
& + Q''e\cos(\omega-p) + R''e\cos(2\omega-p)
\end{aligned}
$$

à cause que $d\omega = (1-m)\,dp - (1+m)\,e\,dp\cos p$, on aura, en prenant les différentielles :

$$
\frac{dr}{dp} =
\begin{array}{ccccccc}
e\sin p & \sin\omega & \sin 2\omega & e\sin(\omega+p) & e\sin(\omega-p) & e\sin(2\omega+p) & e\sin(2\omega-p) \\
-M'' & -(1-m)B'' & -2(1-m)C'' & +\frac{1}{2}(1+m)B'' & +\frac{1}{2}(1+m)B'' & +(1+m)C'' & +(1+m)C'' \\
 & & & -(2-m)Q'' & +m\,Q'' & -(3-2m)R'' & -(1-2m)R''
\end{array}
$$

$$
\frac{ddr}{dp^2} =
\begin{array}{cccc}
e\cos p & \cos\omega & \cos 2\omega & e\cos(2\omega+p) \\
-M'' & -(1-m)^2B'' & -4(1-m)^2C'' & +\frac{1}{2}(1-m)(1+m)B'' \\
 & & & +\frac{1}{2}(1+m)(2-m)B'' \\
 & & & -(2-m)(2-m)Q''
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
e\cos(\omega-p) & e\cos(2\omega+p) & e\cos(2\omega-p) \\
+\frac{1}{2}(1-m)(1+m)B'' & +2(1-m)(1+m)C'' & +2(1-m)(1+m)C'' \\
-\frac{1}{2}m(1+m)B'' & +(1+m)(3-2m)C'' & +(1+m)(1-2m)C'' \\
-mm\,Q'' & -(3-2m)(3-2m)R'' & -(1-2m)(1-2m)R''
\end{array}
$$

Ces valeurs étant substituées dans l'équation, nous trouverons les termes suivans à égaler séparément à zero :

$e\,cos.\,p$	$cos.\,\omega$	$cos.\,2\,\omega$	$e\,cos.\,(\omega+p)$	$e\,cos.\,(\omega-p)$
$-M''$;	$-(1-m)^2B''$;	$-4(1-m)^2C''$;	$+\frac{1}{2}(1+m)(3-2m)B''$;	$+\frac{1}{2}(1+m)(1-2m)B''$;
			$-(2-m)^2Q''$	$-mm\,Q''$
			$+(1-m)^2B''$	$+(1-m)^2B''$
			$+\frac{1}{2}(1-m)B''$	$-\frac{1}{2}(1-m)B''$
$+m^2M''$	$+m^2B''$	$+m^2C''$	$+m^2Q''$	$+m^2Q''$
$-M'$	$+2mA'$	$+2mB'$	$-\frac{2m}{2-m}P'$	$+2P'$
	$+B'$	$+C'$	$-Q'$	$-Q''$

$e\,cos.\,(2\,\omega+p)$	$e\,cos.\,(2\,\omega-p)$
$+(1+m)(5-4m)C''$	$+(1+m)(3-4m)C''$
$-(3-2m)^2R''$	$-(1-2m)^2R''$
$+4(1-m)^2C''$	$+4(1-m)^2C''$
$+(1-m)C''$	$-(1-m)C''$
$+m^2R''$	$+m^2R''$
$-\frac{2m}{3-2m}Q'$	$-\frac{2m}{1-2m}Q'$
$-R'$	$-R'$

§. LXXIV. Faiſant évanoüir chaque terme à part, nous trouverons :

$$M''=\frac{-M'}{1-mm}\,;\qquad B''=\frac{2mA+B'}{(1-m)^2-m^2}\,;\qquad C''=\frac{2mB'+C'}{4(1-m)^2-m^2}$$

$$Q''=\frac{(3-2m)B''-\frac{2m}{2-m}P'-Q'}{(2-m)^2-m^2}\,;\qquad Q''=\frac{(1-2m)B''+2P'-Q'}{m^2-m^2}$$

$$R''=\frac{2(5-4m)C''-\frac{2m}{3-2m}Q'-R'}{(3-2m)^2-m^2}\,;\qquad R''=\frac{2(3-4m)C''-\frac{2m}{1-2m}Q'-R'}{(1-2m)^2-m^2}$$

Or, le coëfficient Q'' devenant infini, c'eſt une marque qu'outre les termes ſuppoſés, il entre dans la valeur de r un nouveau terme, qui renferme un angle abſolu; & il n'eſt pas difficile de voir

voir que ce terme aura cette forme : $p\ \text{ſin.}\ (\omega - p)$. Ajoûtons donc à l'expreſſion ſuppoſée pour r, encore ce terme : $+ T'' ep\ \text{ſin.}\ (\omega - p)$, & il en réſultera, dans la valeur de $\frac{dr}{dp}$, cette quantité : $+ T'' e\ \text{ſin.}\ (\omega - p) - m T'' ep\ \text{coſ.}\ (\omega - p)$; & dans $\frac{ddr}{dp^2}$, on aura, outre l'expreſſion précédente, la quantité $- 2\ m\ T''\ e\ \text{coſ.}\ (\omega - p) - m^2\ T''\ e\ p\ \text{ſin.}\ (\omega - p)$. Ainſi il faudra ajoûter à la colomne $e\ \text{coſ.}\ (\omega - p)$, le terme $- 2 m T''$, & puiſque les Q'' ſe détruiſent, nous tirerons de cette colomne $T'' = \frac{(1 - 2m) B'' + 2 P' - Q'}{2m}$, & la lettre Q'' n'entrera plus en conſidération, de ſorte qu'elle ſera ou $= 0$, ou indéterminée.

§. LXXV. Si donc ce terme $T'' ep\ \text{ſin.}\ (\omega - p)$ entre dans l'expreſſion de r, l'inégalité qui en réſulte, croîtra à chaque révolution, puiſqu'après chacune de ces révolutions, la valeur de p eſt augmentée de 360 degrés : & quelque petite que ſoit la valeur de $T'' e$, il doit, avec le tems, abſolument arriver, que la valeur de cette inégalité ſurpaſſe toute quantité donnée : & comme elle eſt tantôt à ajoûter à la diſtance de Saturne au Soleil, tantôt à en ſouſtraire, il pourroit arriver que dans une même période, Saturne s'approchât du Soleil, & s'en éloignât enſuite à une diſtance incomparablement plus grande que celle dont il s'en écarte à préſent. Cependant, on voit bien que dès qu'un tel dérangement deviendroit conſidérable, l'approximation dont je me ſuis ſervi juſqu'ici ne ſeroit plus d'aucun uſage, & je crois preſque que la détermination d'un tel mouvement ſurpaſſeroit les bornes de notre entendement. Mais il faut auſſi conſidérer que le dérangement du mouvement de Jupiter, cauſé par l'action de Saturne, pourroit apporter un changement

fort confidérable dans la détermination de la lettre Q″. Car fi l'aphélie de Jupiter n'eft pas en repos, comme je l'ai fuppofé, & que fon mouvement moyen ne foit pas exactement égal au mouvement de fon anomalie, le dénominateur de Q″ ne s'évanoüira plus. Pour rendre ceci plus clair, foit fait $d\zeta = i\,dp$, i furpaffant un peu l'unité, à caufe du mouvement de l'aphélie, au lieu du dénominateur $m^2 - m^2$, on trouvera $(i - 1 - m)^2 - m^2$, dont la valeur fera à peu près $= \frac{-m}{43200}$. Mais ce dénominateur étant fi petit, & le numérateur feulement vrai à peu près, on devra regarder la valeur de Q″ comme inconnue. Au refte, il eft à remarquer que cette petite différence de i ne fçauroit caufer aucun changement fenfible dans les valeurs des autres lettres.

LXXVI. C'eft ici fans doute qu'il faut chercher la caufe principale des dérangemens dans le mouvement de Saturne ; & comme les obfervations nous montrent affez clairement, que dans diverfes périodes de Saturne, les différences entre fon lieu vrai & fon lieu moyen ne font pas les mêmes, quoiqu'il fe trouve à la même anomalie & au même afpect avec Jupiter; il en faut conclurre, que les inégalités ne reviennent pas les mêmes dans chaque période, mais qu'elles vont en croiffant : & je ne doute prefque pas, que cette circonftance ne foit la véritable caufe de la diffenfion des Aftronomes, fur le tems périodique de Saturne, felon les divers points de fon orbite, qu'ils ont eus en vûe en cherchant le tems que cette planete met à y retourner. Il me paroît donc très-probable, que le terme $T'' e p \, fin. (\omega - p)$ entre dans l'expreffion de la valeur de r, quoique le mouvement de Jupiter foit lui-même troublé par l'action de Saturne, & que peut-être, nonobftant cela, le terme $Q'' e \, cof. (\omega - p)$ y entre auffi, & l'on auroit en ce cas :



$$r = +M''e\,\text{cof.}\,p + B''\,\text{cof.}\,\omega + Q''e\,\text{cof.}\,(\omega+p) + R''e\,\text{cof.}\,(2\omega+p) + T''ep\,\text{fin.}\,(\omega-p)$$
$$+ C''\,\text{cof.}\,2\omega + Q''e\,\text{cof.}\,(\omega-p) + R''e\,\text{cof.}\,(2\omega-p).$$

Cependant, comme les valeurs des lettres Q'' & T'' dépendent du dérangement de Jupiter, cette recherche eſt trop délicate pour que j'oſe me haſarder de les déterminer par la voie d'approximation ; & il ſera plus ſûr de les regarder comme indéterminées, juſqu'à ce qu'on trouve moyen de les aſſigner par les obſervations.

§. LXXVII. Ayant trouvé la valeur de r, nous en tirerons celle de dx, qui ſera :

$$\begin{array}{lllll}
\frac{dx}{dp} = -2mM''e\,\text{cof.}\,p & -2mB''\,\text{cof.}\,\omega & -2mC''\,\text{cof.}\,2\omega & -2mQ''e\,\text{cof.}\,(\omega+p) \\
 & -A' & -B' & -mB''e \\
 & & & -\frac{1}{2}A'e \\
 & & & +\frac{P'e}{2-m}
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
-2mQ''e\,\text{cof.}\,(\omega-p) & -2mR''e\,\text{cof.}\,(2\omega+p) & -2mR''e\,\text{cof.}\,(2\omega-p) & -2mT''ep\,\text{fin.}\,(\omega-p) \\
-mB''e & -mC''e & -mC''e & \\
-\frac{1}{2}A'e & -\frac{1}{2}B'e & -\frac{1}{2}B'e & \\
-\frac{P'e}{m} & +\frac{Q'e}{3-2m} & +\frac{Q'e}{1-2m}. &
\end{array}$$

Et les intégrales de ces termes ſeront :

$$\int dp\,\text{cof.}\,p = \text{fin.}\,p$$

$$\int dp\,\text{cof.}\,\omega = \frac{1}{1-m}\,\text{fin.}\,\omega + \frac{(1+m)e}{2(1-m)(2-m)}\,\text{fin.}\,(\omega+p) - \frac{(1+m)e}{2m(1-m)}\,\text{fin.}\,(\omega-p)$$

$$\int dp\,\text{cof.}\,2\omega = \frac{1}{2(1-m)}\,\text{fin.}\,2\omega + \frac{(1+m)e}{2(1-m)(3-2m)}\,\text{fin}\,(2\omega+p) + \frac{(1+m)e}{2(1-m)(1-2m)}\,\text{fin.}\,(2\omega-p)$$

$$\int dp\,\text{cof.}\,(\omega+p) = \frac{1}{2-m}\,\text{fin.}\,(\omega+p)\,; \qquad \int dp\,\text{cof.}\,(\omega-p) = \frac{-1}{m}\,\text{fin.}\,(\omega-p)$$

$$\int dp\,\text{cof.}\,(2\omega+p) = \frac{1}{3-2m}\,\text{fin.}\,(2\omega+p)\,; \qquad \int dp\,\text{cof.}\,(2\omega-p) = \frac{1}{1-2m}\,\text{fin.}\,(2\omega-p)$$

$$\int p\,dp\,\text{fin.}\,(\omega-p) = \frac{p}{m}\,\text{cof.}\,(\omega-p) + \frac{1}{m^2}\,\text{fin.}\,(\omega-p),$$

rejettant les termes, qui, dans l'équation, ſeroient multi-

pliés par ee, ou par de plus hautes puissances de e.

§. LXXVIII. Ces formules nous fourniront la valeur suivante de x:

$$\begin{array}{cccccccc}
e\,\mathit{sin}.p; & \mathit{sin}.\omega; & \mathit{sin}.2\omega; & e\,\mathit{sin}.(\omega+p); & e\,\mathit{sin}.(\omega-p); & e\,\mathit{sin}.(2\omega+p); & e\,\mathit{sin}.(2\omega-p); & e\,p\,\mathit{cos}.(\omega-p) \\
\hline
0=-2mM'' & -\frac{2mB''}{1-m} & -\frac{2mC''}{2(1-m)} & -\frac{2m(1+m)B''}{2(1-m)(2-m)} & +\frac{(1+m)B''}{1-m} & -\frac{2m(1+m)C''}{2(1-m)(3-2m)} & -\frac{2m(1+m)C''}{2(1-m)(1-2m)} & -2T'' \\
 & -\frac{A'}{1-m} & -\frac{B'}{2(1-m)} & -\frac{(1+m)A'}{2(1-m)(2-m)} & +\frac{(1+m)A'}{2m(1-m)} & -\frac{(1+m)B'}{2(1-m)(3-2m)} & -\frac{(1+m)B'}{2(1-m)(1-2m)} & \\
 & & & -\frac{2mQ''}{2-m} & +\frac{2Q''}{B''} & -\frac{2mR''}{3-2m} & -\frac{2mR''}{1-2m} & \\
 & & & -\frac{mB''}{2-m} & +\frac{A'}{2m} & -\frac{mC''}{3-2m} & -\frac{mC''}{1-2m} & \\
 & & & -\frac{A'}{2(2-m)} & +\frac{P'}{m^2} & -\frac{B'}{2(3-2m)} & -\frac{B'}{2(1-2m)} & \\
 & & & +\frac{P'}{(2-m)^2} & -\frac{2T''}{m} & +\frac{Q'}{(3-2m)^2} & +\frac{Q'}{(1-2m)^2} &
\end{array}$$

Pour rendre cette expression plus simple, soit fait:

$2mB''+A'=b$; $2mC''+B'=c$; & puisque $\frac{(1+m)b}{2(1-m)}+\frac{b}{2}=\frac{b}{1-m}$; $\frac{(1+m)c}{2(1-m)}+\frac{c}{2}=\frac{c}{1-m}$, soit $\frac{b}{1-m}=B''$ & $\frac{c}{1-m}=C''$, & on aura:

$$\begin{aligned}
x= & -2mM''\,e\,\mathit{sin}.p-B''\,\mathit{sin}.\omega-\tfrac{1}{2}C''\,\mathit{sin}.2\omega-\frac{1}{2-m}\left(B''+2mQ''-\frac{1}{2-m}P'\right)e\,\mathit{sin}.(\omega+p)-2T''\,e\,p\,\mathit{cos}.(\omega-p) \\
& +\frac{1}{m}\left(B''+2mQ''+\frac{1}{m}P'-2T''\right)e\,\mathit{sin}.(\omega-p) \\
& -\frac{1}{3-2m}\left(C''+2mR''-\frac{1}{3-2m}Q'\right)e\,\mathit{sin}.(2\omega+p) \\
& -\frac{1}{1-2m}\left(C''+2mR''-\frac{1}{1-2m}Q'\right)e\,\mathit{sin}.(2\omega-p)
\end{aligned}$$

Or, puisque les coëfficients des termes $\mathit{cos}.\,\omega$, $\mathit{cos}.\,2\,\omega$ & $\mathit{sin}.\,\omega$, $\mathit{sin}.\,2\,\omega$ sont les mêmes que ceux que nous avons

trouvés plus haut, nous aurons en nombres :

$$B'' = 0{,}90962\,; \quad \mathrm{B}'' = -0{,}02031 \quad \& \; e = 0{,}048219.$$
$$C'' = 0{,}15431\,; \quad \mathrm{C}'' = 0{,}32430$$

§. LXXIX. De-là les valeurs des autres lettres seront trouvées en nombres :

$$A = 3{,}21789\,;\ B = 4{,}70357\,;\ C = 3{,}07731\,;\ D = 1{,}92413\,;\ E = 1{,}18601$$
$$P = 13{,}21601\,;\ Q = 23{,}79051\,;\ R = 18{,}94939\,;\ S = 13{,}82941\,;\ T = 9{,}96700$$
$$P^{v} = -5{,}9133\,;\ Q^{v} = -12{,}2555\,;\ R^{v} = -10{,}6902\,;\ S^{v} = -8{,}7228\,;$$
$$\mathrm{A} = -0{,}44477\,;\ \mathrm{B} = 0{,}08309\,;\ \mathrm{P} = -0{,}77993\,;\ \mathrm{Q} = -0{,}27178\,;\ \mathrm{P}' = 0{,}13207\,;\ \mathrm{Q}' = -0{,}23341\,;$$
$$M' = 0{,}30991\,;\ Q' = 0{,}35190\,;\ R' = -0{,}17356\,;\ M' = -0{,}36984\,;\ Q'' = 0{,}66032\,;\ \mathrm{Q}''\ \text{indéter[illegible]}$$
$$R'' = 0{,}28038\,;\ \mathrm{R}'' = 12{,}63013\,;\ \&\ T'' = 0{,}11124\text{, ou plûtôt inconnue.}$$

Evaluant maintenant les expressions trouvées en nombres, nous trouverons, outre les termes que les considérations précédentes nous ont déja fournis :

$$r = -0{,}01783 \cos. p + 0{,}03184 \cos.(\omega+p) + 0{,}01352 \cos.(2\omega+p) + 0{,}005364\, p \sin.(\omega-p)$$
$$- \ldots\ldots\ldots \cos.(\omega-p) + 0{,}60901 \cos.(2\omega-p),$$

& à cause de $z = f(1+nr)$, nous aurons :

$$\frac{z}{f} = \text{précéd.} - 0{,}0000168 \cos. p + 0{,}0000300 \cos.(\omega+p)$$
$$- \ldots\ldots\ldots \cos.(\omega-p)$$
$$+ 0{,}0000127 \cos.(2\omega+p) + 0{,}0000050\, p \sin.(\omega-p)$$
$$+ 0{,}0005719 \cos.(2\omega-p)$$

où il faut se souvenir que le dernier terme est peu exact.

§. LXXX. Les mêmes valeurs numériques nous donneront :

$$x = +0{,}01436 \sin. p - 0{,}01294 \sin.(\omega+p) - 0{,}01442 \sin.(2\omega+p) - 0{,}010728\, p \cos.(\omega-p)$$
$$- \ldots\ldots\ldots \sin.(\omega-p) - 1{,}25258 \sin.(2\omega-p).$$

Cette expression multipliée par n, étant ajoûtée aux termes trouvés ci-dessus, donnera la longitude vraie de Saturne :



$$\varphi = \text{précéd.} + 0{,}0000135\,\sin.p - 0{,}0000122\,\sin.(\omega+p) - \ldots\ldots\ldots\sin.(\omega-p) - 0{,}0000135\,\sin.(2\omega+p) - 0{,}0000100\,p\,\cos.(\omega-p) - 0{,}0011762\,\sin.(2\omega-p)\,;$$

ou, réduisant cette expression en secondes :

$$\varphi = \text{précéd.} + 3''\sin.p - 3''\sin.(\omega+p) - 3''\sin(2\omega+p) - \tfrac{1}{100000}\,p\,\cos.(\omega-p) - \ldots\sin.(\omega-p) - 243''\sin.(2\omega-p)\,;$$

où le dernier terme (puisque p est un angle) s'exprimera aisément en minutes, secondes, pourvû qu'on remarque que son coëfficient puisse être fort différent de $\frac{1}{100000}$.

§. LXXXI. Rassemblant tout ce que je viens de trouver, tant dans cet article que dans les précédens, on aura, faisant l'anomalie excentrique de Jupiter $= p$, celle de Saturne $= q$; & la distance de Saturne & de Jupiter $= \omega$, que l'on trouve en ôtant la longitude de Saturne de celle de Jupiter : nous aurons premierement la distance de Saturne au Soleil :

$$\frac{z}{f} = 1 + 0{,}05700372\,\cos.q + 0{,}0008542\,\cos.\omega - 0{,}0003429\,\cos.(\omega+q) + 0{,}0000050\,p\,\sin.(\omega-p) - 0{,}0000168\,\cos.p + 0{,}0001449\,\cos.2\omega + 0{,}0003752\,\cos.(\omega-q) + 0{,}0000335\,\cos.3\omega + 0{,}0000300\,\cos.(\omega+p) - \ldots\ldots\ldots\cos.(\omega-p) + 0{,}0000127\,\cos.(2\omega+p) + 0{,}0005719\,\cos.(2\omega-p)$$

Faisant ensuite la longitude moyenne de Saturne $= \eta$; son équation elliptique, ou celle qui est la seule qu'on trouve dans les Tables Astronomiques $= Y$, la longitude vraie de Saturne sera :

$$\varphi = \eta \pm Y + 3''\sin.p + 4''\sin.\omega + 13''\sin.(\omega+q) - 32''\sin.2\omega - 257''\sin.(\omega-q) - 7''\sin.3\omega - 2''\sin.4\omega - 3''\sin.(\omega+p) - 3''\sin.(2\omega+p) - \tfrac{1}{100000}\,p\,\cos.(\omega-p) - \ldots\sin.(\omega-p) - 243''\sin.(2\omega-p).$$

Dans laquelle il faut remarquer que l'équation elliptique Y dépend de l'anomalie excentrique q, en forte que $Y = -2\,k\,\mathit{fin.}\,q + \frac{1}{4}\,kk\,\mathit{fin.}\,2\,q$; ou en minutes, fecondes :

$$Y = -23515''\,\mathit{fin.}\,q + 167''\,\mathit{fin.}\,2\,q.$$

Quant à l'anomalie excentrique q, elle fe tire de l'anomalie moyenne; & on l'aura affez exactement pour l'ufage préfent, fi l'on prend le milieu arithmétique entre l'anomalie moyenne & l'anomalie vraie; ou fi l'on applique à l'anomalie moyenne, la moitié de l'équation elliptique, que les Tables Aftronomiques donnent.



V I.

Recherches du Mouvement des Nœuds, & de la variation de l'inclinaiſon de l'orbite de Saturne.

§. LXXXII. JUSQU'ICI j'ai ſuppoſé l'orbite de Saturne dans le même plan que celle de Jupiter, & dans cette hypotheſe, les inégalités trouvées dans le mouvement de Saturne, ne regardent que ſa longitude & ſa diſtance au Soleil. Or, l'inclinaiſon de l'orbite de Saturne ſur celle de Jupiter eſt ſi petite, que le changement qui en pourroit réſulter ſur les inégalités déja trouvées, ne mérite aucune attention. Car pour le commencement de l'année 1748, les Tables Aſtronomiques marquent la longitude du nœud de Jupiter ſur l'écliptique de $3^s\ 8^\circ\ 14'\ 0''$, la longitude du nœud de Saturne, de $3^s\ 21^\circ\ 19'\ 30''$; l'inclinaiſon de l'orbite de Jupiter ſur l'écliptique, eſt marquée $1^\circ\ 19'\ 10''$, & celle de Saturne $= 2^\circ\ 30'\ 10''$; d'où je conclus que l'inclinaiſon de l'orbite de Saturne ſur celle de Jupiter eſt de $1^\circ\ 15'\ 20''$, & que cette interſection tombe au tems indiqué ſur l'orbite de Jupiter, à $4^s\ 5^\circ\ 4'\ 0''$ conſtant depuis le commencement d'*Aries*. Or, cette inclinaiſon de $1^\circ\ 15'\ 20''$ étant ſi petite, on m'accordera aiſément que les expreſſions précédentes n'ont beſoin d'aucune correction de cette part. Par conſéquent, ayant déja les véritables valeurs des quantités $\frac{z}{f}$ & de φ, il ne reſte qu'à déterminer le mouvement qui ſe peut trouver dans la ligne desnœuds, & la variation à laquelle l'inclinaiſon même peut être aſſujettie. §. LXXXIII.



§. LXXXIII. Pour cet effet, ayant fait la longitude moyenne de Jupiter $= \zeta$, sa longitude vraie $= \theta$, sa distance moyenne $= a$, & sa distance vraie $= y$; ensuite la longitude vraie de Saturne $= \varphi$, sa distance moyenne au Soleil $= f$, & sa distance vraie $= z$, & de plus, la distance entre Jupiter & Saturne $\theta - \varphi = \omega$, la longitude du nœud ascendant de Saturne sur l'orbite de Jupiter $= \pi$, & l'inclinaison mutuelle de ces deux orbites $= \rho$, & pour abréger $v = \sqrt{\left(\frac{zz}{cos.\,\psi^2} + yy - 2yz\, cos.\,\omega\right)}$; dans laquelle, à cause que ψ est la latitude de Saturne, qui ne surpasse jamais $1^\circ\, 15'\, 20''$, on pourra, sans balancer, mettre 1 pour $cos.\,\psi$, ce qui réduira cette expression à $v = \sqrt{(zz + yy - 2yz\, cos.\,\omega)}$. On aura, par le §. xx, pour la recherche présente, les deux équations qui suivent :

$$\text{I. } d\pi = \frac{n a^3 d\zeta^2 fin.(\varphi - \pi) fin.(\theta - \pi)}{z\, d\varphi} \left(\frac{1}{yy} - \frac{y}{v^3}\right).$$

$$\text{II. } d.\, l\, tang.\, \rho = \frac{n a^3 d\zeta^2 cof.(\varphi - \pi) fin.(\theta - \pi)}{z\, d\varphi} \left(\frac{1}{yy} - \frac{y}{v^3}\right).$$

§. LXXXIV. Comme il est aisé de prévoir que les inégalités qui seront renfermées dans ces équations doivent être extremement petites, on conviendra aisément que les excentricités de l'une & de l'autre orbite n'y sçauroient apporter aucun changement sensible. C'est pourquoi je supposerai l'une & l'autre orbite circulaire, c'est-à-dire, $y = a$, & $z = f$, donc $v = \sqrt{(aa + ff - 2af\, cos.\,\omega)}$. Soit en outre, $f = \lambda a$, $d\theta = d\zeta$; $d\varphi = m\, d\zeta$, & partant $d\omega = (1 - m)\, d\zeta$; soient enfin, comme ci-dessus, $\frac{2\lambda}{1 + \lambda\lambda} = g\, \lambda (1 + \lambda\lambda)^{\frac{3}{2}} = h$ & $\frac{1}{(1 - g\, cos.\,\omega)^{\frac{3}{2}}} = a + B\, cos.\,\omega + C\, cos.\,2\omega + D\, cos.\,3\omega +$ &c. & nos équations se changeront en celles-ci :



I. $d\pi = \frac{n}{\lambda m} d\zeta \sin.(\varphi-\pi) \sin.(\theta-\pi)\left(1-\frac{\lambda}{h}(A+B\cos.\omega+C\cos.2\omega+D\cos.3\omega+\&c.)\right)$

II. $d.\,l\,tang.\rho = \frac{n}{\lambda m} d\zeta \cos.(\varphi-\pi)\sin.(\theta-\pi)\left(1-\frac{\lambda}{h}(A+B\cos.\omega+C\cos.2\omega+D\cos.3\omega+\&c.)\right)$

Ou bien, en faisant $\frac{h}{\lambda} - A = \alpha$, c'est-à-dire, $1 - \frac{\lambda}{h}A = \frac{\lambda}{h}\alpha$.

I. $d\pi = \frac{n}{mh} d\zeta \sin.(\varphi-\pi)\sin.(\theta-\pi)\,(\alpha - B\cos.\omega - C\cos.2\omega - D\cos.3\omega - \&c.)$.

II. $d.\,l\,tang.\rho = \frac{n}{mh} d\zeta \cos.(\varphi-\pi)\sin.(\theta-\pi)\,(\alpha - B\cos.\omega - C\cos.2\omega - D\cos.3\omega - \&c.)$.

où il est à remarquer, que puisque la variabilité de π est extremement petite, on pourra, sans faute, dans l'intégration de ces formules, regarder la quantité π comme constante, au moins pour en trouver la valeur à peu près. Car on n'aura ensuite qu'à introduire cette valeur déja trouvée, pour en trouver une plus exacte.

§. LXXXV. Pour préparer ces formules à l'intégration, je remarque que :

$\sin(\theta-\pi)\sin.(\varphi-\pi) = \frac{1}{2}\cos.\omega - \frac{1}{2}\cos.(\theta+\varphi-2\pi)$
$\sin.(\theta-\pi)\cos.(\varphi-\pi) = \frac{1}{2}\sin.\omega + \frac{1}{2}\sin.(\theta+\varphi-2\pi)$ à cause de $\theta-\varphi=\omega$;

& de plus, que

$\cos.\omega\sin(\theta-\pi)\sin.(\varphi-\pi) = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos.2\omega - \frac{1}{4}\cos.2(\varphi-\pi) - \frac{1}{4}\cos.2(\theta-\pi)$.
$\cos.\omega\sin(\theta-\pi)\cos.(\varphi-\pi) = \frac{1}{4}\sin.2\omega + \frac{1}{4}\sin.2(\varphi-\pi) + \frac{1}{4}\sin.2(\theta-\pi)$.

Ces valeurs étant substituées, & les termes qui résultent de $C\cos.2\omega$, $D\cos.3\omega$, &c. négligés, comme n'étant d'aucune conséquence, ainsi qu'on le verra bien-tôt, nous aurons :

I. $d\pi = \frac{n}{mh} d\zeta \left(\frac{1}{2}\alpha\cos.\omega - \frac{1}{2}\alpha\cos.(\theta+\varphi-2\pi) - \frac{1}{4}B - \frac{1}{4}B\cos.2\omega + \frac{1}{4}B\cos.2(\varphi-\pi) + \frac{1}{4}B\cos.2(\theta-\pi)\right)$.

II. $d.l\,tang.\rho = \frac{n}{mh} d\zeta \left(\frac{1}{2}\alpha\sin.\omega + \frac{1}{2}\alpha\sin.(\theta+\varphi-2\pi) - \frac{1}{4}B\sin.2\omega - \frac{1}{4}B\sin.2(\varphi-\pi) - \frac{1}{4}B\sin.2(\theta-\pi)\right)$.

§. LXXXVI. Or, ayant $d\theta = d\zeta$; $d\varphi = m\,d\zeta$, &

$d\omega = (1-m)\,d\zeta$, & $d\pi = 0$, nous en tirerons les formules intégrales ſuivantes :

$$\int d\zeta \, cof.\,\omega = \frac{1}{1-m}\, fin.\,\omega \qquad \int d\zeta \, fin.\,\omega = \frac{-1}{1-m}\, cof.\,\omega$$

$$\int d\zeta \, cof.(\theta+\varphi-2\pi) = \frac{1}{1+m}\, fin.(\theta+\varphi-2\pi) \qquad \int d\zeta \, fin\,(\theta+\varphi-2\pi) = -\frac{1}{1+m}\, cof.(\theta+\varphi-2\pi)$$

$$\int d\zeta \, cof.\,2\,\omega = \frac{1}{2(1-m)}\, fin.\,2\,\omega \qquad \int d\zeta \, fin.\,2\,\omega = -\frac{1}{2(1-m)}\, cof.\,2\,\omega$$

$$\int d\zeta \, cof.\,2\,(\varphi-\pi) = \frac{1}{2m}\, fin.\,2\,(\varphi-\pi) \qquad \int d\zeta \, fin.\,2\,(\varphi-\pi) = \frac{-1}{2m}\, cof.\,2\,(\varphi-\pi).$$

$$\int d\zeta \, cof.\,2\,(\theta-\pi) = \frac{1}{2}\, fin.\,2\,(\theta-\pi) \qquad \int d\zeta \, fin.\,2\,(\theta-\pi) = -\frac{1}{2}\, cof.\,2\,(\theta-\pi).$$

$$\& \int d\zeta = \zeta = \frac{1}{m}\,\varphi.$$

D'où nous trouverons les équations des intégrales propoſées :

$$\text{I. } \pi = C - \frac{n}{4mmh}\,B\,\varphi + \frac{n}{mh}\left(\frac{\alpha}{2(1-m)}\, fin.\,\omega - \frac{\alpha}{2(1+m)}\, fin.(\theta+\varphi-2\pi) - \frac{B}{8(1-m)}\, fin.\,2\,\omega + \frac{B}{8m}\, fin.\,2\,(\varphi-\pi) + \frac{B}{8}\, fin.\,2\,(\theta-\pi)\right).$$

$$\text{II. } l\,tang.\,\rho = D - \frac{n}{mh}\left(\frac{\alpha}{2(1-m)}\, cof.\,\omega + \frac{\alpha}{2(1+m)}\, cof.\,(\theta+\varphi-2\pi) - \frac{B}{8(1-m)}\, cof.\,2\,\omega + \frac{B}{8m}\, cof.\,2\,(\varphi-\pi) + \frac{B}{8}\, cof.\,2\,(\theta-\pi)\right).$$

LXXXVII. Nous voyons donc que la longitude du nœud π n'eſt pas fixe, mais qu'elle ſouffre, pendant chaque période, pluſieurs variations, qui ſont proportionnelles aux ſinus des angles ω; $\theta+\varphi-2\pi$; 2ω; $2(\varphi-\pi)$ & $2(\theta-\pi)$. Or, mettant ces variations périodiques à part, nous voyons auſſi qu'après chaque période, le lieu du nœud rétrograde d'un angle $= \frac{nB}{4mmh} \times 360^\circ$, pendant une révolution entiere de Saturne. Mettons donc les valeurs de n, B, m, & h qu'on a trouvées ci-deſſus, & nous trouverons que les nœuds de Saturne reculeront,

pendant chaque période de Saturne de 8′ 47″, & partant dans un an, de 18″, par rapport aux étoiles fixes. Donc puiſque les étoiles fixes avancent chaque année de 51″, par rapport à l'équinoxe, la ligne des nœuds de Saturne avancera chaque année ſur l'orbite de Jupiter, de 33″; d'où l'on connoîtra ſon mouvement moyen. On voit par les Tables, que les Aſtronomes ſont trop peu d'accord ſur cet article, pour le pouvoir vérifier par les obſervations: cependant, ce mouvement annuel de 33″ convient aſſez avec les Tables de M. Caſſini.

§. LXXXVIII. Pour trouver les inégalités périodiques, puiſque $\alpha = \frac{h}{\lambda} - A = 5{,}9006$, nous trouverons les deux valeurs de π, & de $l\,tang.\,\rho$, exprimées en nombres:

$$\pi = \text{Conſt.} - 0{,}0004066\,\varphi + 141''.\,\text{ſin.}\,\omega - 28''\,\text{ſin.}\,2\,\omega + 42''\,\text{ſin.}\,2\,(\varphi - \pi) + 17''\,\text{ſin.}\,2\,(\theta - \pi) - 60''\,\text{ſin.}\,(\theta + \varphi - 2\pi).$$

$$l\,tang.\,\rho = \text{Conſt.} - 141''\,\text{coſ.}\,\omega + 28''\,\text{coſ.}\,2\,\omega - 42''\,\text{coſ.}\,2\,(\varphi - \pi) - 17''\,\text{coſ.}\,2\,(\theta - \pi) - 60''\,\text{coſ.}\,(\theta + \varphi - 2\pi).$$

Par la premiere équation, il paroît que le lieu vrai du nœud peut quelquefois différer du lieu moyen de plus de 3′: cependant, comme une faute de 3′ dans le lieu du nœud, n'eſt d'aucune conſéquence dans le mouvement de Saturne, à cauſe de ſa fort petite inclinaiſon à l'orbite de Jupiter, je ne crois pas qu'on ait beſoin de charger les Tables Aſtronomiques de ces équations, pour corriger le lieu des nœuds; & il ſuffira de ſe ſervir du lieu moyen du nœud, dans les calculs Aſtronomiques.

§. LXXXIX. La ſeconde équation fait voir que l'inclinaiſon de l'orbite de Saturne ſur celle de Jupiter n'eſt pas conſtante non plus; mais qu'elle devient, dans chaque période, tantôt un peu plus grande, tantôt un peu plus petite. On voit d'abord, que la conſtante doit être le

logarithme de la tangente de l'inclinaiſon moyenne, que je fais $= \gamma$ ainſi que

$$l\,\frac{tang.\,\rho}{tang.\,\gamma} = -141''\,cof.\,\omega + 28''\,cof.\,2\,\omega - 42''\,cof.\,2(\varphi - \pi) - 17''\,cof.\,2(\theta - \pi)$$
$$- 60''\,cof.\,(\theta + \varphi - 2\,\pi) = V.$$

Pour développer mieux cette équation, ſoit l'inclinaiſon vraie $\rho = \gamma + \sigma$, σ devant être fort petit par rapport à γ, nous aurons $tang.\,\rho = tang.\,\gamma + \frac{\sigma}{cof.\,\gamma^2}$, & partant: $\frac{tang.\,\rho}{tang.\,\gamma} = 1 + \frac{\sigma}{fin.\,\gamma\,cof.\,\gamma} = 1 + \frac{2\,\sigma}{fin.\,2\,\gamma}$; donc $l\,\frac{tang.\,\rho}{tang.\,\gamma} = \frac{2\,\sigma}{fin.\,2\,\gamma}$, qui donne $\sigma = \frac{1}{2}\,V\,fin.\,2\,\gamma$. Or, comme l'inclinaiſon moyenne γ eſt à peu près $= 1^\circ\,15'\,20''$, nous aurons $2\,\gamma = 2^\circ\,30'\,40''$, & $fin.\,2\,\gamma = 0{,}0438131$; & partant $\sigma = 0{,}0219065\,V = \frac{1}{45}\,V$. Remettant donc pour γ & V leurs valeurs, l'inclinaiſon cherchée ſera:

$$\rho = 1^\circ\,15'\,20'' - 3''\,cof.\,\omega + \tfrac{1}{2}''\,cof.\,2\,\omega - 1''\,cof.\,2\,(\varphi - \pi) - \tfrac{1}{3}''\,cof.\,2\,(\theta - \pi)$$
$$- 1''\,cof.\,(\theta + \varphi - 2\,\pi).$$

Ainſi cette inclinaiſon pourra varier environ de $5''$, dont elle deviendra tantôt plus grande, tantôt plus petite; de ſorte qu'on s'aſſûrera à peine de cette variation par les obſervations.

§. XC. Les mêmes équations qui m'ont ſervi à déterminer juſqu'à préſent les dérangemens de Saturne cauſés par l'action de Jupiter, ſerviront auſſi réciproquement à déterminer les dérangemens de Jupiter cauſés par l'action de Saturne, pourvû qu'on détermine convenablement les valeurs des coëfficients. Or, ſelon ces dernieres formules, on trouvera que les nœuds de l'orbite de Jupiter ſur celle de Saturne, doivent reculer dans un an de $10''$, par rapport aux étoiles fixes; & partant, par rapport aux équinoxes, ce mouvement ſera progreſſif, & de $40''$ dans un an. Par la même méthode, on trouvera que les nœuds



de Mars sur l'orbite de Jupiter, avanceront de 36″ par an, par rapport aux équinoxes. Mais la force de Saturne les fera reculer de 1″ par an; de sorte que les deux forces de Jupiter & de Saturne étant réünies, elles feront avancer la ligne des nœuds de Mars de 35″ par an, ce qui s'accorde admirablement bien avec les observations, sur lesquelles sont dressées les Tables Astronomiques. De plus, on trouvera que la ligne des nœuds de Vénus doit avancer par an de 46″, & celle de Mercure de 49″, par rapport aux équinoxes: quoique ces mouvemens se rapportent principalement au plan de l'orbite de Jupiter, ils seront à peu près les mêmes par rapport au plan de l'écliptique.

§. XCI. L'Ecliptique, ou le plan de l'orbite de la terre même, sera aussi assujetti à un semblable changement, à cause de l'action de Jupiter; car l'effet de celle de Saturne sera tout-à-fait insensible, comme nous avons vû dans le mouvement des nœuds de Mars. Mais comme dans l'Astronomie on est accoutumé de regarder le plan de l'écliptique comme fixe, & à supposer plûtôt le ciel tout entier mobile, il est difficile de s'appercevoir de ce mouvement. Pour y parvenir, on devroit concevoir un autre plan dans le ciel, qui fût tout-à-fait immobile, par rapport auquel on détermineroit la position de l'écliptique & ses changemens. Si le plan de l'orbite de Jupiter étoit immobile, il seroit sans doute le plus convenable; mais quoiqu'il soit lui-même mobile, on pourra s'en servir avec assez de succès, à cause que son mouvement est fort lent, & qu'il ne sera pas difficile d'avoir égard à ses changemens. Supposons donc que le plan de l'orbite de Jupiter soit immobile, du moins pour un siecle, & nous trouverons que l'intersection de l'orbite de la terre doit reculer sur celle de Jupiter, pendant un siecle, de 12′

21″, par rapport aux étoiles fixes : mais par rapport aux équinoxes, le mouvement sera progressif; & de 1° 11′ 0″, pendant un siecle.

§. XCII. Donc l'écliptique passera successivement par différentes étoiles fixes ; de sorte que si elle passe maintenant par une certaine étoile fixe, dont on jugera par conséquent la latitude = 0, après quelque tems, cette étoile fixe se trouvera hors de l'écliptique, & aura quelque latitude. Et par-là on comprendra aisément, que la latitude de chaque étoile fixe, doit subir de tems en tems quelque changement, & devenir ou plus grande, ou plus petite. Ce changement dépendra du lieu d'intersection de l'écliptique, avec le plan de l'orbite de Jupiter, & de l'inclinaison mutuelle : l'intersection ou le nœud ascendant de l'orbite de Jupiter, est marqué dans les Tables Astronomiques, en ♋ 7° 35′, au commencement de ce siecle, & l'inclinaison de 1° 19′ 10″ : & de-là on pourra, pour chaque intervalle de tems, déterminer la variation en latitude, que chaque étoile fixe doit souffrir. Comme les Astronomes se sont déja effectivement apperçus de quelque changement dans la latitude des étoiles fixes, il est à propos de développer cette matiere plus soigneusement, pour voir si ces changemens peuvent être l'effet de l'action de Jupiter sur la terre.

§. XCIII. Ayant déterminé le mouvement séculaire de la ligne des nœuds de l'écliptique sur l'orbite de Jupiter, j'ai calculé de combien la latitude de chaque étoile fixe doit croître ou décroître pendant un siecle. Pour cet effet, il faut chercher la longitude de l'étoile fixe, proposée pour le commencement de ce siecle, ou de l'an 1701 ; & la Table suivante montrera l'accroissement ou la diminution séculaire de la latitude de cette étoile fixe. J'ai dressé cette Table, seulement pour les étoiles qui ont



une latitude Boréale, à laquelle se rapportent les titres *ajoûtés*, ou *ôtés* : mais si la latitude de l'étoile proposée est méridionale, on n'a qu'à changer ces titres. Il est bien vrai que ces changemens ne seront pas les mêmes pendant chaque siecle : mais on s'appercevra aisément que les variations de plusieurs siecles ne seront pas considérables, & qu'on se pourra servir de cette Table pour tout le tems passé, que l'Astronomie a été cultivée. Voici donc la Table que j'ai calculée de ce changement de l'écliptique, causé par l'action de la force de Jupiter.



TABLE

TABLE
DU CHANGEMENT EN LATITUDE
des Etoiles fixes pendant un fiecle, depuis 1700 jufqu'à 1800.

Arg. *Longitude de l'Etoile propofée pour l'an* 1700.

LATITUDE BOREALE.

Longitude.	Otez.	Longitude.	Ajoûtez.	Longitude.	Ajoûtez.	Longitude.	Otez.
♈ 0°	2", 19'''	♋ 0°	17" 26'''	♎ 0°	2", 19'''	♑ 0°	17", 26'''
5	0, 47	5	17 34	5	0, 47	5	17, 34
10	Ajoûtez. 0, 44	10	17, 35	10	Otez. 0, 44	10	17, 35
15	2, 16	15	17, 26	15	2, 16	15	17, 26
20	3, 47	20	17, 11	20	3, 47	20	17, 11
25	5, 16	25	16, 47	25	5, 16	25	16, 47
♉ 0	6, 43	♌ 0	16, 16	♏ 0	6, 43	♒ 0	16, 16
5	8, 6	5	15, 37	5	8, 6	5	15, 37
10	9, 26	10	14, 51	10	9, 26	10	14, 51
15	10, 41	15	13, 58	15	10, 41	15	13, 58
20	11, 52	20	13, 0	20	11, 52	20	13, 0
25	12, 57	25	11, 55	25	12, 57	25	11, 55
♊ 0	13, 56	♍ 0	10, 44	♐ 0	13, 56	♓ 0	10, 44
5	14, 49	5	9, 28	5	14, 49	5	9, 28
10	15, 35	10	8, 9	10	15, 35	10	8, 9
15	16, 15	15	6, 46	15	16, 15	15	6, 46
20	16, 46	20	5, 19	20	16, 46	20	5, 19
25	17, 10	25	3, 50	25	17, 10	25	3 50



Si la Latitude eſt méridionale, il faut changer les titres.

§. XCIV. A l'aide de cette Table, on ſera en état de trouver de combien la latitude de chaque étoile fixe doit varier depuis 1700 juſqu'à 1800 : & comme il eſt aiſé de reconnoître, que pendant pluſieurs ſiecles il doit y avoir le même changement, on en pourra aſſez exactement aſſigner la latitude que chaque étoile fixe a dû avoir au tems de Ptolémée, & même d'Hipparque. Soit, par exemple, propoſé le *Cœur du Lyon*, dont la longitude eſt marquée pour 1700 en ♌ 25° 40′ 30″, & la latitude Boréale 0° 26′ 38″ : on connoîtra d'abord, par cette Table, que ſa latitude va en croiſſant de 11″ 46‴ pendant chaque ſiécle; de ſorte qu'en 1800 elle ſera 0° 26′ 50″. Mais pour avoir ſa latitude pour un tems quelconque paſſé, il faut, pour chaque ſiecle, ſouſtraire 11″ 46‴ de la latitude 0° 26′ 38″. Ainſi au tems de Ptolémée, c'eſt-à-dire, l'année 150, ou $15\frac{1}{2}$ ſiecles avant 1700, il en faut retrancher $15\frac{1}{2} \times 11'' \; 46'''$, ou 3′ 1″; de ſorte qu'au tems de Ptolemée, la latitude du *Cœur du Lyon* ne doit avoir été que 0° 23′ 37″. Dans les *Inſtitutions Aſtronomiques*, on remarque que la latitude de cette étoile a été augmentée depuis 50 ans de 5″, & partant depuis un ſiecle, de 10″; ce qui s'accorde parfaitement bien avec ma Table : & on s'appercevra d'un pareil accord en pluſieurs autres étoiles fixes, dont le changement en latitude a été obſervé avec tout le ſoin poſſible, depuis 50 ans.



VII.

Application des Recherches précédentes aux obſervations de Saturne.

§. XCV. APRE'S avoir déterminé les dérangemens que l'action de Jupiter doit cauſer dans le mouvement de Saturne, je vais examiner juſqu'à quel point de préciſion ils ſeront d'accord avec les obſervations. Pour cet effet, je ne conſidererai que des longitudes obſervées de Saturne, puiſque la latitude, ſi l'on en excepte le mouvement des nœuds, qui paroît aſſez bien déterminé, ne ſçauroit ſouffrir aucun dérangement ſenſible de la part de Jupiter. Or la longitude de Saturne demande quantité de corrections, comme j'ai fait voir dans les articles précédens : elles dépendent de trois angles, dont le premier eſt l'anomalie excentrique de Saturne, que j'ai nommée q; le ſecond eſt l'anomalie excentrique de Jupiter, que j'ai nommée p, & enfin le troiſieme, eſt celui qu'on détermine en ôtant la longitude de Saturne de celle de Jupiter, & cet angle eſt nommé ω. Donc ſi l'on connoît pour quelque tems propoſé ces angles, & qu'on faſſe la longitude moyenne de Saturne $=\eta$, & ſon équation elliptique $=Y$, qui dépend de l'anomalie excentrique q, & de l'excentricité $=k$, on en tirera la vraie longitude héliocentrique de Saturne φ, par l'équation

$$\varphi = \eta + Y + 3'' \sin. p + 4'' \sin. \omega + 13'' \sin.(\omega+q) - 3'' \sin.(\omega+p) - 3'' \sin.(2\omega+p) - \tfrac{1}{100000} p \cos.(\omega-p)$$
$$- 32'' \sin. 2\omega - 257'' \sin.(\omega-q) - .. \sin(\omega-p) - 243'' \sin.(2\omega-p)$$
$$- 7'' \sin. 3\omega$$
$$- 2'' \sin. 4\omega.$$

§. XCVI. Comme l'équation elliptique Y eſt compoſée de pluſieurs membres, il eſt néceſſaire de la développer. Ayant donc fait l'éxcentricité $= k$, & l'anomalie excentrique $= q$, ſoit, pour abréger, $\frac{1 - \sqrt{(1-kk)}}{k} = x$, & on aura :

$$Y = -(k+2x)\,\text{ſin.}\,q + x^2\,\text{ſin.}\,2q - \tfrac{2}{3}x^3\,\text{ſin.}\,3q + \tfrac{1}{2}x^4\,\text{ſin.}\,4q - \tfrac{2}{5}x^5\,\text{ſin.}\,5q + \&c.$$

mais nous avons $lk = 8{,}7559031$, & $x = \frac{1}{2}k + \frac{1}{8}k^3 + \frac{1}{16}k^5 + \frac{5}{128}k^7 + \&c.$ réduiſant tous ces coëfficients en minutes, ſecondes, nous trouverons :

$$Y = -23525''\,\text{ſin.}\,q + 168''\,\text{ſin.}\,2q - 3''\,\text{ſin.}\,3q + \&c.$$

Mais parce que je me ſervirai des obſervations anciennes auſſi-bien que des modernes, & que dans celles-là la préciſion ne ſe borne gueres à une minute; pour faciliter le calcul, je négligerai les inégalités qui ſont moindres qu'une demi-minute; & la formule qui exprime la longitude vraie de Saturne ſera :

$$\varphi = n - 23525''\,\text{ſin.}\,q - 32''\,\text{ſin.}\,2\omega - 257''\,\text{ſin.}(\omega - q) - \ldots\text{ſin.}(\omega - p) - 243''\,\text{ſin.}(2\omega - p) - \ldots p\,\text{coſ}(\omega - p)$$
$$+ 168''\,\text{ſin.}\,2q,$$

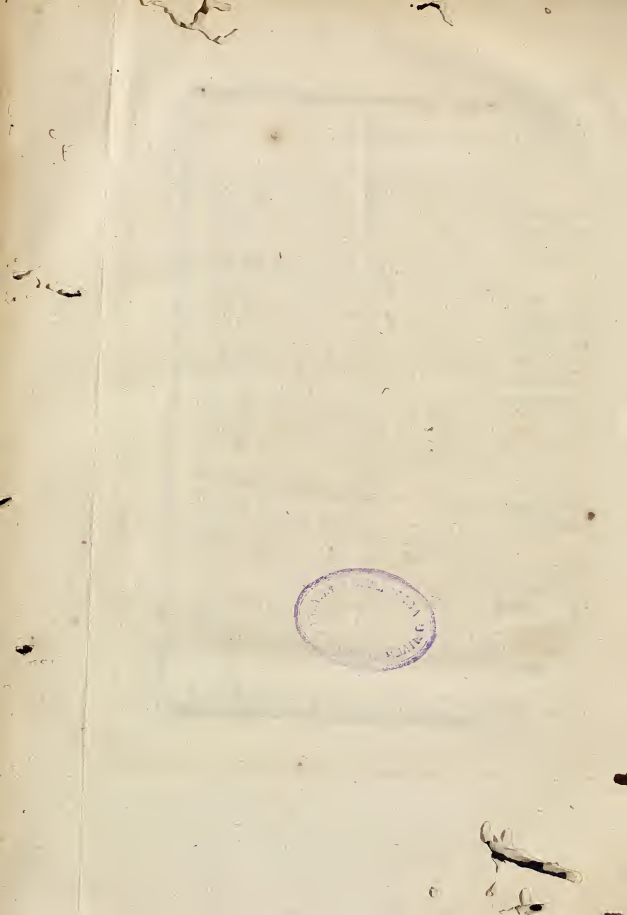
où le coëfficient du terme $\text{ſin.}(\omega - p)$ eſt inconnu, auſſi-bien que celui du dernier terme, juſqu'à ce qu'à l'aide des obſervations on en puiſſe déterminer les véritables valeurs.

§. XCVII. Toutes ces inégalités, excepté la derniere, reviennent les mêmes dans chaque période; & toutes les fois que les trois angles q, p & ω ſeront les mêmes, il y aura la même différence entre la longitude moyenne de Saturne & la vraie. Mais l'inégalité contenue dans le dernier terme....$p\,\text{coſ.}(\omega - p)$ devient, après chaque période, plus grande, puiſque l'angle p croît toujours preſque uniformément, & acquiert à chaque révolution de Jupiter, un accroiſſement de 360 degrés. Donc ſi à préſent le coëfficient du terme $\text{coſ.}(\omega - p)$ a été $= \frac{1}{1000000}p$.



OPPOSITIONS DE SATURNE AVEC LE SOLEIL.

	Tems à Paris.	*Long. obs.* ♄.	*Long. moyen.*	*An. exc. q.*	2 *q.*	ω	2 ω.	*p.*	ω − *q.*	ω − *p.*	2ω − *p.*
v. st.	1582. Août 20j 23h 12'	11s 7° 27' 47''	11s 13° 22' 44''	2s 14° 39' 47''	4s 29° 19'	11s 11° 42'	10s 23° 24'	4s 13° 38'	8s 27° 2'	6s 28° 4'	6s 9° 46'
	1583. Sept. 2 21 40	11 19 49 30	11 26 2 30	2 27 10 41	5 24 21	0 3 30	0 7 0	5 16 24	9 6 ...	6 17 6	6 20 36
	1584. Sept. 15 6 30	0 2 34 0	0 8 43 30	3 9 51 53	6 19 44	0 25 18	1 20 36	6 19 23	9 15 26	6 5 55	7 1 13
	1585. Sept. 28 18 0	0 15 44 0	0 21 24 52	3 22 43 2	7 15 26	1 16 12	3 2 24	7 22 9	9 23 29	5 24 3	7 10 15
	1586. Oct. 12 9 0	0 29 6 5	1 4 6 41	4 5 44 1	8 11 28	2 5 26	4 10 52	8 24 10	9 29 42	5 31 16	7 16 42
	1587. Oct. 26 7 0	1 12 49 44	1 16 47 16	4 18 54 23	9 7 49	2 22 38	5 15 16	9 25 21	10 3 44	4 27 17	7 19 55
	1588. Nov. 8 8 32	1 26 47 30	1 29 29 56	5 2 12 17	10 4 25	3 8 19	6 16 38	10 25 55	10 6 7	4 12 24	7 20 43
	1589. Nov. 22 12 18	2 10 54 10									
	1590. Déc. 6 19 40	2 25 14 10	2 24 55 7	5 29 3 25	11 28 7	4 7 28	8 14 56	0 26 12	10 8 25	3 11 16	7 18 44
	1591. Déc. 20 22 14	3 9 23 14	3 7 36 53	6 12 30 14	0 25 0	4 22 38	9 15 16	1 26 35	8 10 8	2 26 3	7 18 41
	1593. Janv. 3 1 20	3 23 32 0									
	1594. Janv. 17 3 0	4 7 30 0									
	1595. Janv. 30 23 0	4 21 15 0	4 15 39 38	7 19 48 33	3 9 37	6 17 18	1 4 36	5 2 5	10 24 53	1 15 13	8 2 31
	1596. Févr. 13 10 28	5 4 38 12									
	1597. Fév. 25 19 0	5 17 45 30									
	1598. Mars 10 23 0	6 0 33 35	5 23 41 14	9 1 1 24	6 2 3	8 20 12	5 10 24	8 10 16	11 19 11	0 9 56	9 0 8
	1599. Mars 23 18 40	6 13 0 0	6 6 21 13	9 13 33 24	6 27 7	9 9 32	6 19 4	9 11 45	11 25 59	11 27 47	9 7 19
n. st.	1608. Juil. 19 3 0	9 26 53 0									
	1609. Juil. 31 13 0	10 8 31 0									
	1610. Août 12 12 0	10 20 10 0									
	1611. Août 25 16 0	11 2 12 0									
	1642. Sept. 13 23 45	11 21 33 48	11 27 56 51	2 27 48 21	5 25 37	11 22 25	11 14 50	5 6 34	8 24 37	6 15 51	6 8 16
	1644. Oct. 9 19 12	0 17 38 0	0 23 19 6	3 23 21 31	7 16 43	1 5 14	2 10 28	7 12 25	9 11 52	5 22 49	6 28 3
	1647. Nov. 20 6 50	1 28 24 25									
	1654. Févr. 10 19 0	4 22 54 0									
	1657. Mars 21 23 0	6 2 18 0	5 25 35 20	9 1 38 51	6 3 18	8 9 33	4 19 18	8 0 42	11 7 55	0 8 52	8 18 26
	1658. Avr. 3 17 13	6 14 35 28	6 8 15 14	9 14 10 22	6 28 21	8 29 21	5 28 42	9 2 25	11 15 11	11 27 0	8 26 21
	1659. Avr. 16 10 11	6 26 47 52									
	1660. Avr. 27 22 48	7 8 41 32									
	1661. Mai 10 6 2	7 20 22 24	7 16 13 15	10 20 55 21	9 11 51	10 21 53	9 13 46	0 3 35	0 0 58	10 18 18	9 10 11
	1662. Mai 22 11 0	8 1 52 20									
	1664. Juin 14 13 4	8 24 27 27									
	1665. Juin 26 15 23	9 5 43 51	9 6 44 17	0 8 49 54	0 17 40	1 7 48	2 15 36	4 6 53	0 28 58	9 0 55	10 8 43
	1670. Août 27 7 20	11 3 44 11	11 9 55 43	2 9 24 30	4 18 49	4 26 23	9 22 46	9 18 33	2 17 0	7 7 50	0 4 13
	1671. Sept. 8 8 56	11 16 5 0	11 22 33 38	2 21 49 49	5 13 39	5 13 46	10 27 32	10 19 4	2 21 56	6 24 42	0 8 28
	1672. Sept. 20 12 39	11 28 42 22	0 5 14 3	3 4 26 27	6 8 53	6 0 0	0 0 0	11 19 12	2 25 34	6 10 48	0 10 48
	1673. Oct. 3 21 4	0 11 37 8	0 17 55 6	3 17 13 13	7 4 26	6 15 43	1 1 26	0 19 13	2 28 30	5 26 30	0 12 13
	1674. Oct. 17 12 0	0 24 52 40	1 0 36 52	4 0 10 7	8 0 20	7 1 34	2 3 8	1 19 29	3 1 24	5 12 5	0 13 39
	1675. Oct. 30 7 10	1 8 28 0									
	1676. Nov. 13 7 25	1 22 19 14									
	1677. Nov. 27 11 18	2 6 24 51									
	1678. Déc. 11 16 13	2 20 38 12	2 21 25 21	5 23 19 26	11 16 39	9 15 45	7 1 30	5 27 25	3 22 26	3 18 20	1 4 5
	1679. Déc. 25 22 34	3 4 54 4	3 4 7 3	6 6 47 24	0 13 35	10 6 6	8 12 12	7 0 28	3 29 19	3 5 38	1 11 44
	1681. Janv. 8 2 17	3 19 16 20									
	1682. Janv. 22 3 20	4 3 9 15	3 29 39 17	7 3 32 0	2 7 4	11 13 34	10 27 8	9 4 49	4 10 2	2 8 45	1 22 19
	1683. Févr. 5 0 2	4 16 58 22									
	1684. Févr. 18 17 10	5 0 34 27									
	1685. Mars 3 3 40	5 13 47 25									
	1686. Mars 16 10 28	5 26 47 10	5 20 12 15	8 25 38 10	5 21 16	1 17 4	3 4 8	1 6 16	4 21 26	0 10 48	1 27 52
	1687. Mars 29 11 0	6 9 24 53	6 2 52 34	9 8 14 30	6 16 29	2 4 4	4 8 8	2 6 46	4 2 50	11 27 18	2 1 22

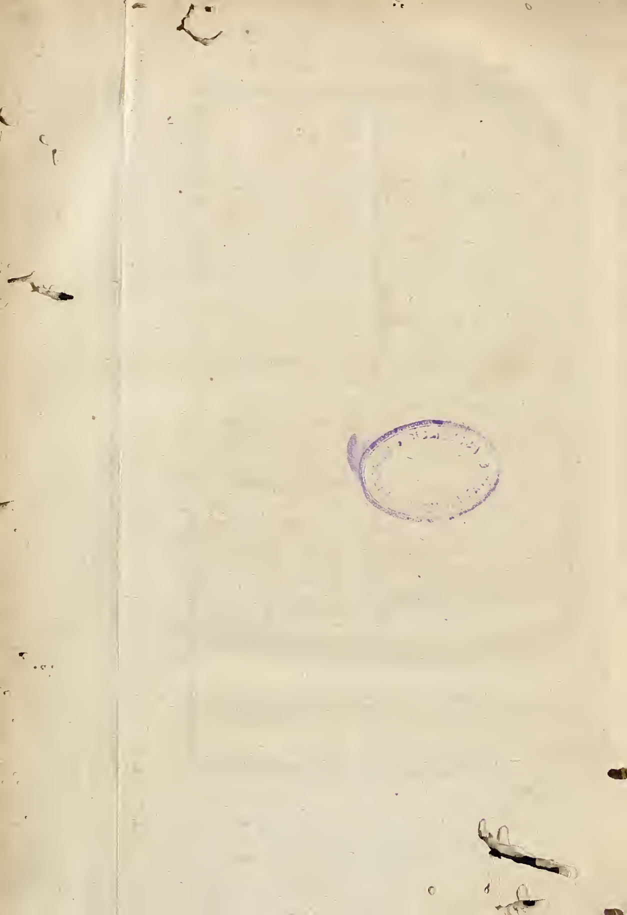


OPPOSITIONS DE SATURNE AVEC LE SOLEIL.

Tems à Paris.	Long. obſ. ♄.	Long. moyen. n.	An. exc. q.	2 q.	ω.	2 ω.	p.	ω — q.	ω — p.	2 ω — p.
n. ſt. 1688. Avr. 10j. 5h 30'	6s 21° 44' 0"	6s 15° 32' 32"	9s 20° 41' 15"	7s 11° 22'	2s 22° 43'	5s 15° 26'	3s 7° 56'	5s 2° 2'	11s 14° 47'	2s 7° 30'
1689. Avr. 22 21 22	7 3 48 30	6 28 12 18	10 2 59 42	8 5 59	3 13 15	6 26 30	4 9 55	5 10 15	11 3 20	2 16 35
1690. Mai 5 6 49	7 15 34 0	7 10 51 20	10 15 10 34	9 0 21	4 5 27	8 10 54	5 12 34	5 20 17	10 22 53	2 28 20
1691. Mai 17 13 25	7 27 9 38	7 23 29 54	10 27 15 26	9 24 31	4 27 23	9 24 46	6 15 30	6 0 8	10 11 53	3 9 16
1692. Mai 28 17 10	8 8 34 50	8 6 7 58	11 9 15 54	10 18 32	5 20 58	11 11 56	7 18 9	6 11 42	10 2 49	3 23 47
1693. Juin 9 19 33	8 19 54 36	8 18 45 40	11 21 13 34	11 12 27	6 12 18	0 24 36	8 20 9	6 21 4	9 22 9	4 4 27
1694. Juin 21 21 25	9 1 12 6	9 1 23 10	0 3 10 0	0 6 20	7 2 1	2 4 2	9 21 19	6 28 51	9 10 43	4 12 45
1695. Juil. 3 23 40	9 12 29 38	9 14 0 32	0 15 6 56	1 0 14	7 20 21	3 10 42	10 21 47	7 5 14	8 28 34	4 18 55
1696. Juil. 15 3 24	9 23 51 8	9 26 37 53	0 27 5 52	1 24 12	8 7 44	4 15 28	11 21 49	7 10 38	8 15 55	4 23 39
1697. Juil. 27 9 40	10 5 20 0	10 9 15 30	1 9 8 36	2 18 17	8 24 50	5 19 40	0 21 46	7 15 42	8 3 4	4 27 54
1698. Août 8 19 0	10 16 58 43	10 21 53 31	1 21 16 33	3 12 33	9 12 15	6 24 30	1 21 58	7 21 0	7 20 17	5 2 32
1699. Août 21 8 51	10 28 50 35	11 4 32 6	2 3 31 22	4 7 3	10 0 43	8 1 26	2 22 51	7 27 12	7 7 52	5 8 35
1700. Sept. 3 3 5	11 10 57 46	11 17 11 17	2 15 54 8	5 1 48	10 20 20	9 10 40	3 24 23	8 4 26	6 25 57	5 16 17
1701. Sept. 16 2 0	11 23 21 18	11 29 51 10	2 28 26 0	5 26 52	11 11 21	10 22 42	4 27 0	8 12 55	6 14 21	5 25 42
1702. Sept. 29 8 55	0 6 10 0	0 12 32 0	3 11 18 5	6 22 36	0 3 8	0 6 16	5 29 49	8 21 50	6 3 19	6 6 27
1703. Oct. 12 20 6	0 19 14 56	0 25 13 21	3 24 0 2	7 18 0	0 24 26	1 18 52	7 2 40	9 0 26	5 21 46	6 16 12
1704. Oct. 25 11 54	1 2 36 40	1 7 55 11	4 7 2 1	8 14 4	1 14 32	2 29 4	8 5 7	9 7 30	5 9 25	6 23 57
1705. Nov. 8 9 32	1 16 18 24	1 20 37 20	4 20 13 11	9 10 26	2 2 47	4 5 34	9 6 51	9 12 34	4 25 56	6 28 43
1706. Nov. 22 10 37	2 0 16 23	2 3 19 29	5 3 31 54	10 7 4	2 19 9	5 8 18	10 7 47	9 15 37	4 11 22	7 0 31
1707. Déc. 6 15 3	2 14 24 27	2 16 1 34	5 16 56 45	11 3 53	3 4 19	6 8 38	11 8 8	9 17 22	3 26 11	7 0 30
1708. Déc. 19 19 26	2 28 37 11	2 28 43 15	6 0 23 6	0 0 46	3 18 49	7 7 38	0 8 15	9 18 26	3 10 34	6 29 23
1710. Janv. 2 23 47	3 12 50 16	3 11 24 40	6 13 49 57	0 27 40	4 3 29	8 6 58	1 8 25	9 19 39	2 25 4	6 28 33
1711. Janv. 17 1 4	3 26 54 36	3 24 5 39	6 27 13 45	1 24 27	4 19 13	9 8 26	2 9 4	9 21 59	2 10 9	6 29 22
1712. Janv. 31 0 6	4 10 51 12	4 6 46 36	7 10 31 55	2 21 4	5 6 27	10 12 54	3 10 23	9 25 55	1 26 4	7 2 31
1713. Févr. 12 19 4	4 24 33 34	4 19 27 27	7 23 42 24	3 17 35	5 25 34	11 21 8	4 12 31	10 1 52	1 13 3	7 8 37
1714. Févr. 26 8 15	5 7 56 46	5 2 8 8	8 6 43 38	4 13 27	6 16 7	1 2 14	5 15 20	10 9 23	1 0 47	7 16 54
1715. Mars 11 16 55	5 21 3 14	5 14 48 45	8 19 34 53	5 9 10	7 7 37	2 15 14	6 18 19	10 18 2	0 19 18	7 26 55
1716. Mars 23 19 4	6 3 48 1	5 27 29 10	9 2 15 56	6 4 32	7 28 55	3 27 50	7 21 3	10 26 39	0 7 52	8 6 47
1717. Avril 5 16 27	6 16 13 56	6 10 9 20	9 14 47 10	6 29 34	8 19 2	5 8 4	8 23 1	11 4 15	11 26 1	8 15 3
1718. Avril 18 8 45	6 28 24 13	6 22 49 7	9 27 9 22	7 24 19	9 7 49	6 15 38	9 24 5	11 10 40	11 13 44	8 21 33
1719. Avril 30 20 15	7 10 17 42	7 5 28 25	10 9 23 35	8 18 47	9 25 28	7 20 56	10 24 36	11 16 4	11 0 52	8 26 20
1720. Mai 12 4 39	7 21 59 13	7 18 7 13	10 21 31 9	9 13 2	10 12 30	8 25 0	11 24 37	11 20 59	10 17 53	9 0 23
1721. Mai 24 9 17	8 3 28 12	8 0 45 31	11 3 33 32	10 7 7	10 29 38	9 29 16	0 24 35	11 26 4	10 5 3	9 4 41
1722. Juin 5 13 9	8 14 52 3	8 13 23 30	11 15 32 21	11 1 5	11 17 21	11 4 42	1 24 47	0 1 49	9 22 34	9 9 55
1723. Juin 17 15 53	8 26 12 6	8 26 1 8	11 27 29 14	11 24 58	0 6 25	0 12 50	2 25 38	0 8 56	9 10 47	9 17 12
1724. Juin 28 17 53	9 7 29 35	9 8 38 32	0 9 25 41	0 18 51	0 27 0	1 24 0	3 27 13	0 17 34	8 29 47	9 26 47
1725. Juil. 10 21 6	9 18 49 40	9 21 15 53	0 21 23 29	1 12 47	1 19 9	3 8 18	4 29 37	0 27 46	8 19 32	10 8 41
1726. Juil. 23 1 42	10 0 13 33	10 3 53 17	1 3 24 14	2 6 48	2 12 9	4 24 18	6 2 30	1 8 45	8 9 39	10 21 48
1727. Août 4 9 54	10 11 48 7	10 16 31 8	1 15 29 31	3 0 59	3 4 55	6 9 50	7 5 20	1 19 25	7 29 35	11 4 30
1728. Août 15 22 50	10 23 36 50	10 29 9 33	1 27 41 3	3 25 22	3 26 29	7 22 58	8 8 42	1 28 48	7 17 47	11 14 16
1729. Août 28 14 18	11 5 35 2	11 11 48 21	2 9 59 47	4 20 0	4 16 8	9 2 16	9 9 13	2 6 8	7 6 55	11 23 3
1730. Sept. 10 12 27	11 17 53 57	11 24 28 1	2 22 27 21	5 14 55	5 4 0	10 8 0	10 10 0	2 11 33	6 24 0	11 28 0
1731. Sept. 23 15 51	0 0 30 50	0 7 8 25	3 5 4 27	6 10 9	5 20 27	11 10 54	11 10 14	2 16 23	6 10 13	0 0 40
1732. Oct. 6 0 26	0 13 27 20	0 19 49 28	3 17 51 40	7 5 43	6 6 17	0 12 34	0 10 23	2 18 37	5 25 54	0 2 11
1745. Mars 18 10 40	5 28 26 10	5 22 6 24	8 26 15 54	5 22 32	1 7 43	2 15 26	0 27 14	4 11 27	0 10 29	1 18 12

Les Obſervations ſuivantes m'ont été communiquées par un Ami, qui les a reçues de M. le Monnier.

1737. Déc. 14 11 57	2 22 28 4	2 23 21 2	5 23 22 26	11 16 45	9 7 24	6 14 48	5 20 15	3 14 2	3 17 9	0 24 33
1737. Déc. 21 11 24	2 22 43 35									
1738. Déc. 24 12 17	3 6 33 8	3 5 54 12	6 6 39 49	0 13 19	9 27 34	7 25 8	6 22 57	3 20 54	3 4 37	1 2 11
1738. Déc. 30 11 48	3 6 46 33									



après une révolution de Jupiter, il fera $= \frac{1}{100000}(p+360^\circ)$, ou son accroissement sera $= \frac{360^\circ}{100000}$ c'est-à-dire presque $13''$: & après deux révolutions de Saturne, qui comprennent presque 5 révolutions de Jupiter, ce coëfficient doit croître d'une minute entiere, en supposant la fraction $\frac{1}{100000}$ juste. Mais peut-être qu'elle est encore plus grande, & par con-séquent, cette variation plus sensible, auquel cas il ne seroit pas surprenant que les Astronomes soient si peu d'accord sur le tems périodique de Saturne.

§. XCVIII. Comme il s'agit ici des longitudes héliocentriques de Saturne, je ne pourrai employer que des observations de la même espece, puisque les inégalités de la distance z ne paroissent pas encore assez connues pour qu'on puisse, d'une longitude géocentrique, conclurre l'héliocentrique. Ce seront donc seulement les observations de Saturne, qui ont été faites vers le tems de ses oppositions au Soleil, dont je pourrai faire usage dans cette recherche; & je profiterai des oppositions observées, que M. Cassini s'est donné la peine de calculer, & de publier dans ses Elémens d'Astronomie; & en les rapportant ici, j'y ajoûterai les valeurs des angles q, $2q$, 2ω, $\omega - q$; $\omega - p$; & $2\omega - p$, dont les inégalités dépendent; afin que je puisse ensuite plus aisément voir, combien ces inégalités, tirées de la théorie, s'écartent de celles que nous connoissons par les observations.

§. XCIX. J'ai calculé les angles pour chacune de ces observations, suivant les Tables de M. Cassini, lesquelles étant fondées sur les regles de Kepler, ont besoin, comme il est aisé de le concevoir, de quelque correction; puisqu'on a enveloppé les inégalités causées par l'action de Jupiter, dans l'excentricité & la position de l'orbite de Saturne. Ces corrections nécessaires étant inconnues, je ferai les réflexions suivantes, qui pourront conduire à une connoissance plus parfaite du mouvement de cette planete. La troisieme colomne contient la longitude moyenne de Saturne, pour le moment de chaque observation, & je l'ai déja réduite au plan de l'écliptique: car comme le vrai lieu de Saturne est donné par l'observation, & que le lieu du nœud est connu, j'en ai tiré l'argument de latitude, dont j'ai appliqué d'abord l'équation à la longitude moyenne, de sorte que si l'on y ajoûte outre cela les autres inégalités, il en doit résulter la longitude vraie observée, sans avoir égard à la latitude. Or cette longitude moyenne tabulaire, peut avoir besoin d'une double correction: la premiere est constante, que je supposerai de m secondes, qu'il faut ajoûter à chaque longitude moyenne; l'autre vient de la correction du tems périodique, en cas qu'il ne soit pas juste, & ira tous les ans en croissant. Je supposerai que l'avancement annuel de la longitude moyenne doit être augmenté de n'': donc si la longitude moyenne A. 1582 a été $= \text{ɣ} + m''$, après un nombre donné d'années N, elle sera $= \text{ɣ} + m'' + Nn''$; où ɣ marque toujours la longitude moyenne, qui se trouve exprimée dans la Table précédente.

§. C. L'anomalie excentrique de Saturne q, pourra aussi, par la même raison, être ou trop grande, ou trop petite: je supposerai donc qu'il y faut toûjours ajoûter k'', de sorte que pour chacune de ces observations, l'anomalie



excentrique ne sera plus précisément $= q$, comme j'ai supposé selon les Tables, mais elle sera $= q + k''$. Ensuite, comme l'excentricité elle-même peut avoir besoin de quelque correction dans l'expression de la longitude vraie φ, le coëfficient du terme *sin.* q, que j'ai supposé $= 23525''$, demandera une correction que je supposerai de x'' à y ajoûter : de sorte qu'au lieu du terme $- 23525''$ *sin.* q, on écrira $-(23525'' + x'')$ *sin.*$(q + k)$. Or, puisque x & k seront des quantités fort petites, on aura *sin.* $(q + k) =$ *sin.* $q + k$ *cos.* q; & partant au lieu du terme $- 23525''$ *sin.* q, nous aurons $- 23525''$ *sin.* q $- x''$ *sin.* $q - 23525'' k$ *cos.* q : & réduisant dans le dernier terme les $23525''$ en parties du rayon $= 1$, vû que k exprime déja un angle, nous aurons $- 23525''$ *sin.* q $- x''$ *sin.* $q - 0{,}11405\, k$ *cos.* q.

§. CI. Mettant de même dans le terme $168''$ *sin.* $2q$, $q + k''$ au lieu de q, le sinus de l'angle $2q$ se changera en *sin.* $(2q + 2k) =$ *sin.*$2q + 2k$*cos.*q. Et le coëfficient $168''$ ayant aussi besoin d'une correction, j'y ajoûterai y'', & il sera $= 168'' + y''$: par conséquent au lieu du terme $+ 168''$ *sin.* $2q$, j'aurai, après les corrections faites, $+ 168''$ *sin.* $2q$ $+ y$ *sin.* $2q + 336'' k$ *cos.* $2q$; & réduisant ces $336''$ en parties du rayon $= 1$, on aura $0{,}00163$. Par conséquent au lieu du terme $+ 168''$ *sin.* $2q$, il faudra substituer cette expression $+ 168''$ *sin.* $2q + y''$ *sin.* $2q + 0{,}00163\, k''$ *cos.* $2q$. Il s'agit donc de déterminer ces corrections inconnues m, n, k, x & y, ensorte que la longitude vraie de Saturne φ devienne parfaitement d'accord avec la longitude observée : & après avoir connu par ce moyen leurs valeurs, on sera en état de corriger les Tables de M. Cassini, afin qu'elles soient parfaitement d'accord avec les observations, pourvû qu'on fasse usage des inégalités causées par l'action de Jupiter, que je vais envisager plus





particulierement, parce qu'elles ne font pas encore affez déterminées par la théorie.

§. CII. Or d'abord, il paroît que quand même les termes $-32'' \text{fin.} 2\,\omega - 257'' \text{fin.} (\omega - q)$ ne feroient pas tout-à-fait juftes, leurs erreurs devroient pourtant être fi petites, qu'on ne fçauroit s'en appercevoir dans les obfervations, fur-tout les anciennes, dont je fuis obligé de faire ufage; & partant je regarderai ces termes comme n'ayant befoin d'aucune correction. La même chofe fe doit entendre du terme $-243'' \text{fin.} (2\,\omega - p)$, dont le coëfficient $-243''$ a été fourni fi clairement par la théorie, qu'il fera prefque auffi exact que la théorie eft vraie. Et quand même la force de Jupiter ne fuivroit pas exactement la regle que j'ai fuppofée, pourvû qu'elle ne s'en écarte pas très-confidérablement, l'erreur ne roulera que fur quelques fecondes, que je ne regarderai point dans cette recherche. Mais la théorie ayant laiffé tout-à-fait indéterminé le coëfficient du terme $\text{fin.} (\omega - p)$, pour le trouver par les obfervations, je le fuppoferai $= -z''$, de forte que j'aurai, outre les termes déja expliqués, encore celui-ci: $-z'' \text{fin.} (\omega - p)$; & les obfervations nous découvriront la valeur de z, foit que la théorie foit exactement vraie ou non.

§. CIII. La derniere équation $- \ldots\ldots p \text{ cof.} (\omega - p)$ caufe fans doute la plus grande inégalité, vû que fon coëfficient croît continuellement, & qu'après chaque période de Jupiter, il prend un accroiffement de $360°$. Il ne fuffit donc pas de prendre pour p les valeurs qui fe trouvent dans la huitieme colomne, mais il y faut encore ajoûter autant de fois $360°$, qu'il y a de révolutions de Jupiter achevées, depuis une certaine époque qu'on aura choifie pour régler cette inégalité. Je choifirai pour cet effet la premiere obfervation faite en 1582, & je fuppoferai qu'alors le coëfficient de $\text{cof.} (\omega - p)$ ait été $(\omega + p)\, u = u$

$(\omega + 4^s\, 13° 38')$



$(\alpha + 4^s\, 13^\circ\, 38')$, où u marque un certain nombre, que j'avois trouvé plus haut $= \frac{1}{100000}$, mais qu'il faut déterminer plus exactement par les obſervations. Ainſi pour l'obſervation de l'année 1582 ce terme ſera $= -u$ $(\alpha + 4^s\, 13^\circ\, 38')\ cof.\ (\omega - p)$. Or pour une autre obſervation, entre laquelle & celle-là il y aura le nombre ν de périodes de Jupiter achevées, & où p marque l'anomalie excentrique de Jupiter ; ce terme ſera $= -u\,(\alpha + p + 360\,\nu)\ cof.\ (\omega - p)$. Ainſi pour l'année 1642, où on aura 5 périodes de Jupiter achevées depuis 1582, ce terme ſera $= -u\,(\alpha + 5.360^\circ + 5^s\, 6^\circ\, 34')\ cof.\,(\omega - p)$. Et c'eſt ſuivant cette remarque qu'on doit déterminer cette derniere inégalité pour chacune des obſervations expliquées.

§. CIV. Toutes ces inégalités, en partie connues, en partie inconnues, doivent produire, pour la longitude vraie de Saturne φ, une longitude qui ſoit préciſément celle qui a été obſervée ; c'eſt-à-dire qu'il faut que l'équation qui ſuit ait lieu.

$$\begin{aligned}\varphi = \; & + \eta - 23525''\, fin.\, q + 168''\, fin.\, 2q - 32''\, fin.\, 2\omega - 257''\, fin.\, (\omega - q) - 243''\, fin.\, (2\omega - p) \\ & + m'' - x''\, fin.\, q + y''\, fin.\, 2q - z''\, fin.\, (\omega - p) - u(\alpha + 360.\nu + p)\, cof.\, (\omega - p) \\ & + Nn'' - 0{,}11405\, k''\, cof.\, q + \tfrac{1}{600}\, k''\, cof.\, 2q\end{aligned}$$

où l'on doit remarquer que les lettres $\varphi, \eta, q, \omega, p$, ont pour chaque obſervation les mêmes valeurs que celles qui ſont exprimées dans la Table des obſervations ; & qu'elles ſont par conſéquent connues. Mais les lettres m, n, k, x, y, z, u & α marquent des quantités inconnues, dont les valeurs pourront être déterminées par 8 équations de cette nature, qu'on formera d'un pareil nombre d'obſervations. Or les lettres N & ν ſe rapportent à l'époque de 1582, & N marque le nombre d'années écoulées depuis cette époque, juſqu'à l'obſervation qu'on réduit au calcul ; & u ſignifie le nombre des révolutions de Jupiter achevées,



outre la valeur de p dans le même intervalle de tems; de sorte que les valeurs de ces deux lettres N & ν sont connues. Par-là on trouvera :

Depuis	1582	1590	1602	1614	1626	1638	1649	1661	1673	1685	1697	1708	1721	1732
jusqu'à	1589	1600	1613	1625	1637	1648	1660	1672	1684	1696	1707	1720	1731	1744
$\nu =$	0	$=1$	$=2$	$=3$	$=4$	$=5$	$=6$	$=7$	$=8$	$=9$	$=10$	$=11$	$=12$	$=13$

§. CV. Donc pour trouver les valeurs des huit lettres inconnues m, n, k, x, y, z, u & α, on n'auroit qu'à calculer suivant la formule donnée, huit observations, pour en obtenir autant d'équations, qui, contenant ces huit inconnues, serviroient à en trouver leurs valeurs. Mais comme de petites erreurs commises, tant dans les observations que dans le calcul, en pourroient produire de fort grossieres dans les valeurs de ces lettres, on doit dans cette recherche, choisir avec soin les observations qui seront les plus propres pour ce dessein, afin que des erreurs inévitables dans les observations & dans le calcul, il en résulte de moins considérables dans les valeurs de ces huit lettres cherchées. Et partant, pour arriver heureusement à ce but, il faut tâcher de choisir des observations telles que si l'on combine les équations qui en résultent, la plûpart des lettres inconnues s'évanoüissent, en sorte qu'on n'ait plus à déterminer à la fois qu'une ou deux de ces huit lettres inconnues. Car alors on pourra être plus sûr de la justesse des valeurs, qu'on trouvera par cette voie. Or je remarque d'abord que dans deux observations quelconques, dont l'intervalle de tems est $= 59$ ans, les valeurs des lettres connues sont à peu près les mêmes ; & que si l'on retranche l'une de l'autre les équations qu'on en tire, toutes les lettres inconnues se détruiront mutuellement, excepté les deux n & u. Donc si l'on cherche deux ou plusieurs équations de cette nature, on en tirera aisément & avec assez de précision les valeurs de ces deux lettres



n & u; enfuite, comme il ne refte que fix lettres à déterminer, on les déterminera plus facilement, en fe fervant de pareilles précautions.

VIII.

Recherche du Tems périodique de Saturne, & de fes Variations.

§. CVI. LE tems périodique de Saturne dépend de la lettre n, par laquelle on connoît de combien il faut augmenter ou diminuer le mouvement moyen annuel qui eft employé dans les Tables de M. Caffini. Enfuite les variations auxquelles le tems périodique de Saturne eft fujet, & à caufe defquelles il n'eft pas toûjours le même, dépendent de la lettre u. Pour découvrir ces variations, je choifis parmi les obfervations celles où la valeur du terme *cof.* $(\omega - p)$ eft la plus grande, ou affirmative, ou négative, qui feront celles où l'angle $\omega - p$ eft ou $= 0$, ou $= 180°$. De la premiere efpece, font les obfervations des années 1598, 1657, 1686, 1716, 1745, où la valeur de l'angle $\omega - p$ eft à peu près $= 0$: de l'autre efpece, où cet angle eft à peu près $= 6^s$, font celles des années 1585, 1644, 1673, 1703, 1732. On pourra ajoûter les obfervations où l'angle $\omega - p$ eft à peu près ou $= 3^s$, ou $= 9^s$, puifque dans ces cas la variation du tems périodique doit s'évanoüir. Or l'angle $\omega - p$ eft à peu près $= 3^s$ dans les obfervations des années 1591, 1679, 1710; & il eft à peu près $= 9^s$ dans les obfervations des années 1665, 1695, 1724. Dans le choix de ces obfervations, j'ai été obligé de m'écarter un peu de l'exacte précifion, à caufe des années dont les obfervations manquent.

§. CVII. Je ferai donc le calcul, ſuivant la formule générale du §. CIV. & l'obſervation de l'année 1598 donnera cette équation :

$$6^s 0^\circ 33'35'' = 5^s 23^\circ 41'14'' + m'' + 16n'' + 23525'' \sin.88^\circ 58' + x'' \sin.88^\circ 58' - 0{,}114k'' \cos.88^\circ 58' - 32'' \sin.19^\circ 36' + 257'' \sin.10^\circ 49' - 168'' \sin.2^\circ 3' - y'' \sin.2^\circ 3' - \tfrac{1}{600} k'' \cos.2^\circ 3' + 243'' \sin.89^\circ 52' - z'' \sin.9^\circ 56' - (\alpha^\circ + 360^\circ + 8^s 10^\circ 16') u \cos.0^\circ 59'.$$

L'obſervation de l'année 1657 donnera cette équation :

$$6^s 2^\circ 18'0'' = 5^s 25^\circ 35' 20'' + m'' + 75n'' + 23525'' \sin.88^\circ 21' + x'' \sin.88^\circ 21' - 0{,}114k'' \cos.88^\circ 21' - 32'' \sin.40^\circ 42' + 257'' \sin.22^\circ 5' - 168'' \sin.3^\circ 18' - y'' \sin.3^\circ 18' - \tfrac{1}{600} k'' \cos.3^\circ 18' + 243'' \sin.78^\circ 26' - z'' \sin.8^\circ 52' - (\alpha' + 6.360^\circ + 8^s 0^\circ 42') u \cos.8^\circ 52'.$$

L'obſervation de l'année 1686 donnera cette équation :

$$5^s 26^\circ 47'10'' = 5^s 20^\circ 12' 15'' + m'' + 104n'' + 23525'' \sin.85^\circ 38' + x'' \sin.85^\circ 38' + 0{,}114k'' \cos.85^\circ 38' - 32'' \sin.85^\circ 52' - 257'' \sin.38^\circ 34' + 168'' \sin.8^\circ 44' + y'' \sin.8^\circ 44' - \tfrac{1}{690} k'' \cos.8^\circ 44' - 243'' \sin.57^\circ 52' - z'' \sin.10^\circ 48' - (\alpha + 9.360^\circ + 1^s 6^\circ 16') u \cos.10^\circ 48'.$$

L'obſervation de l'année 1716 donnera cette équation :

$$6^s 3^\circ 48'1'' = 5^s 27^\circ 29' 10'' + m'' + 134n'' + 23525'' \sin.87^\circ 44' + x'' \sin.87^\circ 44' - 0{,}114k'' \cos.87^\circ 44' - 32'' \sin.62^\circ 10' + 257'' \sin.33^\circ 21' - 168'' \sin.4^\circ 32' - y'' \sin.4^\circ 32' - \tfrac{1}{600} k'' \cos.4^\circ 32' + 243'' \sin.66^\circ 47' - z'' \sin.7^\circ 52' - (\alpha + 11.360^\circ + 7^s 21^\circ 3') u \cos.7^\circ 52'.$$

L'Obſervation de l'année 1745 donnera cette équation :

$$5^s 28^\circ 26'10'' = 5^s 22^\circ 6' 24'' + m'' + 163n'' + 23525'' \sin.86^\circ 15'54'' + x'' \sin.86^\circ 16' + 0{,}114k'' \cos.86^\circ 16' - 32'' \sin.75^\circ 26' - 277'' \sin 48^\circ 33' + 168'' \sin.7^\circ 28' + y'' \sin.7^\circ 28' - \tfrac{1}{600} k'' \cos.7^\circ 28' - 243'' \sin.48^\circ 12' - z'' \sin.10^\circ 29' - (\alpha + 14.360^\circ + 0^s 27^\circ 14') u \cos.10^\circ 29'.$$

§. CVIII. Ces équations étant évaluées en nombres, donneront :

1598 ; $15'45'' = m'' + 16n'' - 0{,}0038k'' + 1{,}00x'' - 0{,}0357y'' - 0{,}1725z'' - 0{,}988\alpha u^\circ - 600{,}8u^\circ$

1657 ; $5'43'' = m'' + 75n'' - 0{,}0049k'' + 1{,}00x'' - 0{,}0575y'' - 0{,}1541z'' - 0{,}988\alpha u^\circ - 2156{,}0u^\circ$

1686 ; $10'11'' = m'' + 104n'' + 0{,}0070k'' + 1{,}00x'' + 0{,}1518y'' - 0{,}1873z'' - 0{,}982\alpha u^\circ - 3218{,}0u^\circ$

1716 ; $-18'23'' = m'' + 134n'' - 0{,}0062k'' + 1{,}00x'' - 0{,}079y'' - 0{,}1368z'' - 0{,}990\alpha u^\circ - 4151{,}5u^\circ$

1745 ; $-5'6'' = m'' + 163n'' + 0{,}0058k'' + 1{,}00x'' + 0{,}130y'' - 0{,}1819z'' - 0{,}983\alpha u^\circ - 4982{,}5u^\circ$

Otons la ſeconde de la premiere, la quatrieme de la ſeconde, la cinquieme de la troiſieme, & nous trouverons ces équations :



$$10'\ 2'' = -\ 59\ n'' + 0{,}0011k'' + 0{,}0218\ y'' - 0{,}0184\ z'' + 1555{,}2\ u^{\circ}$$
$$24'\ 6'' = -\ 59\ n'' + 0{,}0013k'' + 0{,}0215\ y'' - 0{,}0173\ z'' + 1995{,}5\ u^{\circ}$$
$$15'\ 17'' = -\ 59\ n'' + 0{,}0012k'' + 0{,}0218\ y'' - 0{,}0054\ z'' + 1764{,}5\ u^{\circ}$$

De ces trois équations les deux différences feront :

$$14'\ 4'' = +\ 0{,}0011\ z'' + 440{,}3\ u^{\circ}$$
$$8'\ 49'' = -\ 0{,}0119\ z'' + 231{,}0\ u^{\circ},$$

où l'on voit bien que les termes qui contiennent z'' ne font d'aucune conféquence, vû que la quantité z elle-même eft probablement affez petite pour que fa centieme partie puiffe être négligée fûrement. Or la premiere donnera $440{,}3\ u^{\circ} = 844''$, où le nombre $u = \frac{844}{60 \cdot 26418} = \frac{1}{1878}$; l'autre donne $u = \frac{529}{60 \cdot 13860} = \frac{1}{1572}$; & comme la différence de ces deux valeurs vient fans doute des erreurs des obfervations, qui pourroient être encore beaucoup plus grandes, fi nous ne fuppofons les erreurs des obfervations que d'une minute, nous examinerons les autres obfervations marquées ci-deffus, avant que d'entreprendre la détermination de la lettre u.

§. CIX. Les obfervations de l'autre efpece, où l'angle $\alpha - p$ eft près de 6^{s}, feront ainfi réduites au calcul :

I. Celle de l'année 1585.

$$0^{s}15^{\circ}44'0'' = 0^{s}\ 21^{\circ}\ 24'\ 52'' + m'' + 3n'' - 23525''\,\text{ſin.}\,67^{\circ}17' - x''\,\text{ſin.}\,67^{\circ}17' + 0{,}114k''\,\text{coſ.}\,67^{\circ}17'$$
$$-\ 32''\,\text{ſin.}\,87^{\circ}36' + 257''\,\text{ſin.}\,66^{\circ}31' - 168''\,\text{ſin.}\,45^{\circ}26' - y''\,\text{ſin.}\,45^{\circ}26' - \tfrac{1}{600}\,k''\,\text{coſ.}\,45^{\circ}26'$$
$$+\ 243''\,\text{ſin.}\,40^{\circ}15' - z''\,\text{ſin.}\ 5^{\circ}57' + (\alpha + 7^{s}22^{\circ}9')\,u\,\text{coſ.}\,5^{\circ}57'.$$

II. Celle de l'année 1644.

$$0^{s}17^{\circ}38'0'' = 0^{s}\ 23^{\circ}\ 19'\ 6'' + m'' + 62n'' - 23525''\,\text{ſin.}\,66^{\circ}38' - x''\,\text{ſin}\ 66^{\circ}38' + 0{,}114k''\,\text{coſ.}\,66^{\circ}38'$$
$$-\ 32''\,\text{ſin.}\,70^{\circ}28' + 257''\,\text{ſin.}\,78^{\circ}\ 8' - 168''\,\text{ſin.}\,46^{\circ}43' - y''\,\text{ſin.}\,46^{\circ}43' - \tfrac{1}{600}\,k''\,\text{coſ.}\,46^{\circ}43'$$
$$+\ 243''\,\text{ſin.}\,28^{\circ}\ 3' - z''\,\text{ſin.}\ 7^{\circ}11' + (\alpha + 5.360^{\circ} + 7^{s}12^{\circ}25')\,u\,\text{coſ.}\,7^{\circ}11'.$$

III. Celle de l'année 1673.

$$0^{s}11^{\circ}37'8'' = 0^{s}\ 17^{\circ}\ 55'\ 6'' + m'' + 91n'' - 23525''\,\text{ſin.}\,72^{\circ}47' - x''\,\text{ſin.}\,66^{\circ}47' + 0{,}114k''\,\text{coſ.}\,72^{\circ}47'$$
$$-\ 32''\,\text{ſin.}\,31^{\circ}26' - 257''\,\text{ſin.}\,88^{\circ}30' - 178''\,\text{ſin.}\,34^{\circ}26' - y''\,\text{ſin.}\,34^{\circ}26' - \tfrac{1}{600}\,k''\,\text{coſ.}\,34^{\circ}26'$$
$$-\ 243''\,\text{ſin.}\,12^{\circ}13' - z''\,\text{ſin.}\ 3^{\circ}30' + (\alpha + 8.360^{\circ} + 0^{s}19^{\circ}13')\,u\,\text{coſ.}\,3^{\circ}30'.$$





IV. Celles de l'année 1703.

$$0^s\,19^\circ 14' 56'' = 0^s\,25^\circ\ 13' 21'' + m'' + 121n'' - 23525'' \sin.66^\circ 0' - x'' \sin.66^\circ 0' + 0{,}114k'' \cos.66^\circ\ 0'$$
$$- 32'' \sin 48' 52'' + 257'' \sin.89^\circ 34' - 168'' \sin.48^\circ 0' - y'' \sin.48^\circ 0' - \tfrac{1}{600}\, k'' \cos.48^\circ\ 0'$$
$$+ 243'' \sin.16^\circ 12' - z'' \sin.\ 8^\circ 14' + (\alpha + 10.360^\circ + 7^s 2^\circ 40')u \cos.8^\circ 14'.$$

V. Celles de l'année 1732.

$$1^s 13^\circ 27' 20'' = 0^s 19^\circ\ 49'\ 28'' + m'' + 150n'' - 23525'' \sin.72^\circ\ 8' - x'' \sin.72^\circ\ 8' + 0'114k'' \cos.72^\circ\ 8'$$
$$- 32'' \sin.12^\circ 34' - 257'' \sin.78^\circ 37' - 168'' \sin.35^\circ 43' - y'' \sin.35^\circ 43' - \tfrac{1}{600}\, k'' \cos.35^\circ 43'$$
$$- 243'' \sin.\ 2^\circ 11' - z'' \sin.\ 4^\circ\ 6' + (\alpha + 13.360^\circ + 0^s 10^\circ 23')u \cos.4^\circ 6'.$$

§. CX. Ces équations étant évaluées tout-à-fait en nombres, donneront :

$$\text{I. } 1585. + 16' 49'' = m'' + 3n'' - 0{,}922x'' - 0{,}712y'' + 0{,}0428k'' - 0{,}1036z'' + 0{,}9946\alpha u^0 + 2300\, u^0$$
$$\text{II. } 1644. + 15\ 18 = m + 62n - 0{,}918x - 0{,}728y + 0{,}0440k - 0{,}1250z + 0{,}9921\alpha u + 2006\ 1u$$
$$\text{III. } 1673. + 3\ 33 = m + 91n - 0{,}955x - 0{,}565y + 0{,}0324k - 0{,}0610z + 0{,}9981\alpha u + 2898\ u$$
$$\text{IV. } 1703. - 3\ 11 = m + 121n - 0{,}913x - 0{,}743y + 0{,}0453k - 0{,}1432z + 0{,}9891\alpha u + 3769\ u$$
$$\text{V. } 1732. - 2\ 57 = m + 150n - 0{,}952x - 0{,}583y + 0{,}0336k - 0{,}0714z + 0{,}9974\alpha u + 4679\ u$$

De ces équations la ſeconde ne paroît pas trop juſte, & partant, en l'obmettant, nous trouverons :

$$\text{I} - \text{IV} \ldots\ 20'\ 0'' = -118n'' - 0{,}009x'' + 0{,}031y'' - 0{,}0025k'' + 0{,}0396z'' + 0{,}0055\alpha u^0 - 3539u^0$$
$$\text{\& la moitié } 10\ \ 0 = -59n - 0{,}005x + 0{,}015y - 0{,}0012k + 0{,}0198z + 0{,}0087\alpha u - 1769u$$
$$\text{III} - \text{V} \ldots\ 6\ 30 = -59n - 0{,}003x + 0{,}018y - 0{,}0012k + 0{,}0104z + 0{,}0007\alpha u - 1781u.$$

Et la différence $3'30'' = 0{,}0094z + 12\, u^0$; ce qui donneroit u fort grand.

Mais comparons une de ces équations avec une des premieres du §. CVIII, en ſorte que

$$15'\ 17'' = -59n + 1764\, u^0$$ où je néglige les autres termes, comme étant
$$6\ \ 30 = -59n - 1781\, u$$ forts petits.

Diff. $8\ \ 47 = 3545\, u$, & partant $u = \frac{1}{24216}$.

Et cette valeur ayant été trouvée par des obſervations tout-à-fait contraires, elle ne ſçauroit différer ſenſiblement de la vérité.

§. CXI. Si nous ajoûtons ces dernieres équations enſemble, il en réſultera celle-ci: $21' 47'' = -118n$, d'où l'on tire pour la valeur de n, -11, de ſorte que le mou-

vement moyen annuel de Saturne dans les Tables de M. Caſſini eſt trop grand de $11''$. Or dans ces Tables, le moyen mouvement annuel de Saturne ſe trouve $= 0^s\,12^\circ\,13'\,36''$, & on ſera ſurpris qu'il ait été poſſible de ſe tromper de $11''$, ce qui fait deux heures dans le tems, & 60 heures dans le tems périodique de cette planete. Mais ſi nous regardons les Tables de M. Halley, nous verrons qu'il ſuppoſe le mouvement moyen annuel de Saturne $= 0^s\,12^\circ\,13'21''$, c'eſt-à-dire de $15''$ plus petit que M. Caſſini, de ſorte que la vraie quantité tient un milieu entre ces deux Tables, étant $= 0^s 12^\circ 13'\,25''$. La raiſon de cette différence entre ces deux célebres Auteurs, eſt ſans doute qu'ils n'ont eû égard à cette derniere inégalité, qui trouble le tems périodique, en le rendant tantôt trop grand, tantôt trop petit, ſelon les diverſes ſituations de Saturne dans ſon orbite, par leſquelles on a voulu déterminer ſon tems périodique. Or cette inégalité deviendra continuellement plus grande, & partant le mouvement de cette planete paroîtra devenir de plus en plus irrégulier.

§. CXII. Pour nous aſſûrer davantage de ces valeurs de n & de u, je conſidererai encore les obſervations des années 1583, 1642, 1672, 1701, 1731, où la valeur de q eſt à peu près $= 3^s$; & celles-ci ſerviront, avec les cinq premieres, à connoître la valeur de m.

I. Celle de l'année 1583 donne,

$$11^s 19^\circ 49' 30'' = 11^s\ 26^\circ\ 2'\,30'' + m'' + n'' - 23525''\,\mathit{ſin}.\,87^\circ 11' - x''\,\mathit{ſin}.\,87^\circ 11' - 0{,}114k''\,\mathit{coſ}.\,87^\circ 11' - 32''\,\mathit{ſin}.\,7^\circ\,0' + 257''\,\mathit{ſin}.\,83^\circ 40' + 168''\,\mathit{ſin}.\ 5^\circ 39' + y''\,\mathit{ſin}.\ 5^\circ 39' - \tfrac{1}{600}\,k''\,\mathit{coſ}.\ 5^\circ 39' + 243''\,\mathit{ſin}.\,20^\circ 36' + z''\,\mathit{ſin}.\,17^\circ\ 6' + (\alpha + 5^s 16^\circ 24')\,u\,\mathit{coſ}.\,17^\circ 6'.$$

II. Celle de l'année 1642 donne,

$$11^s\,21^\circ 33' 48'' = 11^s\ 27^\circ\ 56'\ 51'' + m'' + 60n'' - 23525''\,\mathit{ſin}.\,87^\circ 48' - x''\,\mathit{ſin}.\,87^\circ 48' - 0{,}114k''\,\mathit{coſ}.\,87^\circ 48' + 32''\,\mathit{ſin}.\,15^\circ 10' + 257''\,\mathit{ſin}.\,84^\circ 37' + 168''\,\mathit{ſin}.\ 4^\circ 23' + y''\,\mathit{ſin}.\ 4^\circ 23' - \tfrac{1}{600}\,k''\,\mathit{coſ}.\ 4^\circ 23' + 243''\,\mathit{ſin}.\ 8^\circ 16' + z''\,\mathit{ſin}.\,15^\circ 51' + (\alpha + 5.360 + 5^s 6^\circ 34')\,u^\circ\,\mathit{coſ}.\,15^\circ 51'.$$

III. Celle de l'année 1672 donne,

$$11^s 28^\circ 42' 22'' = 0^s\, 5^\circ\, 14'\, 3'' + m'' + 90n'' - 23525'' \sin. 85^\circ 34' - x'' \sin. 85^\circ 34' + 0{,}114 k'' \cos. 85^\circ 34'$$
$$- 32'' \sin.\, 0^\circ\, 0' - 257'' \sin. 85^\circ 34' - 168'' \sin.\, 8^\circ 53' - y'' \sin.\, 8^\circ 53' - \tfrac{1}{600} k'' \cos.\, 8^\circ 53'$$
$$- 243'' \sin. 10^\circ 48' + z'' \sin. 10^\circ 48' + (\alpha + 7.360 + 11^s 19^\circ 12') u^\circ \cos. 10{,}48.$$

IV. Celle de l'année 1701 donne,

$$11^s 23^\circ 21' 18'' = 11^s 29^\circ 51'\, 10'' + m'' + 119n'' - 23525'' \sin. 88^\circ 26' - x'' \sin. 88^\circ 26' - 0{,}114 k'' \cos. 88^\circ 26'$$
$$+ 32'' \sin. 37^\circ 18' + 257'' \sin. 72^\circ 55' + 168'' \sin.\, 3^\circ 8' + y'' \sin.\, 3^\circ 8' - \tfrac{1}{600} k'' \cos.\, 3^\circ 8'$$
$$- 243'' \sin.\, 4^\circ 18' + z'' \sin. 14^\circ 21' + (\alpha + 10.360 + 4^s 27^\circ 0') u^\circ \cos. 14^\circ 21'.$$

V. Celle de l'année 1731 donne,

$$0^s\, 0^\circ 30' 50'' = 0^s\, 7^\circ\, 8'\, 25'' + m'' + 149n'' - 23525'' \sin. 84^\circ 56' - x'' \sin. 84^\circ 56' + 0{,}114 k'' \cos. 84^\circ 56'$$
$$+ 32'' \sin. 19^\circ 6' - 257'' \sin. 75^\circ 23' - 168'' \sin. 10^\circ\, 9' - y'' \sin. 10^\circ\, 9' - \tfrac{1}{600} k'' \cos. 10^\circ\, 9'$$
$$- 243'' \sin.\, 0^\circ 40' + z'' \sin. 10^\circ 13' + (\alpha + 12.360^\circ + 11^s 10^\circ 14') u^\circ \cos. 10^\circ 13'.$$

§. CXIII. Ces équations étant exprimées en nombres, donneront :

$$\text{I. } 1583..+12'\, 47'' = m'' + n'' - 1{,}00x'' + 0{,}098y'' - 0{,}0072k'' + 0{,}294z'' + 0{,}956\alpha u^\circ + 159u^\circ,$$
$$\text{II. } 1642..+3\, 35 = m + 60n - 1{,}00x + 0{,}076y - 0{,}0060k + 0{,}273z + 0{,}962\alpha u + 1885u$$
$$\text{III. } 1672..+4\, 41 = m + 90n - 1{,}00x - 0{,}154y + 0{,}0072k + 0{,}187z + 0{,}982\alpha u + 2814u$$
$$\text{IV. } 1701..-2\, 15 = m + 119n - 1{,}00x + 0{,}055y - 0{,}0048k + 0{,}248z + 0{,}968\alpha u + 3627u$$
$$\text{V. } 1731..-2\, 31 = m + 149n - 1{,}00x - 0{,}176y + 0{,}0084k + 0{,}177z + 0{,}984\alpha u + 4586u$$

De-là en éliminant $m, x, y, k, z,$ & $^\alpha u$, nous aurons :

	or, auparavant nous avions
$\text{I} - \text{II.}\ + 9'\, 12'' = -59n - 1726u^\circ$	$10'\, 2'' = -59n + 1555u^\circ$
$\text{II} - \text{IV.}\ + 5,\, 50 = -59n - 1742u$	$24\, 6 = -59n + 1995u$
$\text{III} - \text{V.}\ + 7,\, 12 = -59n - 1772u$	$15\, 17 = -59n + 1764u.$

En comparant ces équations, nous trouverons preſque conſtamment $n = -11$; & les deux dernieres équations donnent $u = \frac{1}{26246}$, ce qui s'accorde fort bien avec la valeur trouvée ci-deſſus $u = \frac{1}{24216}$; & partant nous pourrons prendre un milieu, & ſuppoſer $u = \frac{1}{25000}$ pour les degrés, & $u = \frac{1}{7}$ pour les ſecondes.

§. CXIV. Pour trouver la valeur de m, conſidérons ces deux équations :

1731.

1731 ...... $-2'\,31'' = m + 149n - 1{,}00x - 0{,}176y + 0{,}0084k + 0{,}177z + 0{,}984\alpha u^{\circ} + 4586u^{\circ}$

1745 ...... $-5\quad 6 = m + 163n + 1{,}00x + 0{,}130y + 0{,}0058k - 0{,}182z - 0{,}983\alpha u^{\circ} - 4982u^{\circ}$.

dont la ſomme $-7,\,37 = 2m + 312n - 0{,}046y'' + 0{,}0142k'' - 0{,}005z - 396u^{\circ}$,

dans laquelle nous pouvons ſûrement rejetter les termes qui contiennent y, k & z, & nous aurons :

$-457'' = 2m - 3432'' - 56''$, ou bien $2m = +3031''$ & $m = 1515'' = 25'15''$.

Pour être plus ſûr de cette valeur, je choiſirai deux autres équations :

1672 ...... $+\,4'\,41'' = m'' + 90n'' - 1{,}00x - 0{,}154y + 0{,}0072k + 0{,}187z + 0{,}982\alpha u^{\circ} + 2814u^{\circ}$

1686 ...... $+10\;11 = m + 104n + 1{,}00x + 0{,}152y + 0{,}0070k - 0{,}187z - 0{,}982\alpha u^{\circ} - 3218u^{\circ}$

dont la ſom. $+14\;52 = 2m + 194n + 0{,}0142k - 404\,u^{\circ}$.

ou bien $+\;892 = 2m - 2134 - 58$, & $2m = 3084$, & $m = 1542'' = 25'\,42''$,

comme auparavant. Et ſi on ne vouloit pas négliger le terme k, on auroit :

$m = 25'\,30'' - 0{,}0071k''$.

Mais pour voir ſi la valeur de k peut altérer cette valeur, je conſidérerai deux autres équations :

1701 ...... $-\,2'\,15'' = m + 119n - 1{,}00x + 0{,}055y - 0{,}0048k + 0{,}248z + 0{,}968\alpha u + 3627u$

1716 ...... $-18\;23 = m + 134n + 1{,}00x - 0{,}079y - 0{,}0062k - 0{,}137z - 0{,}990\alpha u - 4151u$

ce qui donne $-20'\,38'' = 2m + 253n - 0{,}0110\,k + 0{,}111z - 0{,}022\alpha u - 524\,u$,

ou $m = 13'\,30'' + 0{,}0055\,k'' - 0{,}055\,z'' + 0{,}011\alpha u^{\circ}$; une autre combinaiſon donne :

$m = 18\;35 + 0{,}0060\,k - 0{,}070\,z + 0{,}016\alpha u^{\circ}$,

de ſorte qu'on eſt incertain combien les valeurs de k, z, & $\alpha\,u^{\circ}$ dérangent celles de m.



I X.

Recherche des autres inégalités qui ſe trouvent dans le Mouvement de Saturne.

§. CXV. AYANT trouvé dans l'article précédent les valeurs des lettres n & u, d'où dépendent le tems périodique de Saturne & ſes variations, ſçavoir $n = -11''$, & $u = \frac{1}{25000}$ pour le calcul en degrés, & $u = \frac{1}{7}$ pour le calcul en ſecondes, il ne reſte que ſix lettres à déterminer : m, k, x, y, z & αu. Or nous avons déja exprimé la valeur de m par celle de k, ayant trouvé cette égalité : $m = 25' \, 30'' - 0{,}0071 k''$; de ſorte qu'on pourra auſſi par-tout éliminer la lettre m. Mais dans le §. précédent, ſi au lieu d'ajoûter les équations d'où nous avons tiré la valeur de m, nous retranchons l'une de l'autre, les deux premieres paires nous donneront les valeurs ſuivantes pour x.

$$x = 683'' - 0{,}153\, y'' + 0{,}179\, z'' + 0{,}984\, \alpha u^\circ$$

$$x = 673 - 0{,}153\, y'' + 0{,}187\, z'' + 0{,}982\, \alpha u^\circ, \text{ \& prenant un milieu,}$$

$$x = 678'' - 0{,}153\, y'' + 0{,}183\, z'' + 0{,}983\, \alpha u^\circ.$$

Mais la troiſieme paire fournit cette valeur de x.

$$x = 154'' + 0{,}067\, y'' + 0{,}192\, z'' + 0{,}980\, \alpha u^\circ.$$

D'où nous pouvons conclurre que la valeur de y eſt fort conſidérable.

§. CXVI. Pour arriver à la connoiſſance des quatre autres lettres k, y, z & αu, il faut remarquer, que chacune de ces lettres doit être déterminée par des équations où elle obtienne le plus grand coëfficient, tant affirmatif que négatif. Pour cet effet, ſi nous voulons commencer

par k, dont le coëfficient eſt *coſ.* q, nous devons choiſir les obſervations des années 1723, 1708, 1694, 1679, où je ne ferai plus d'uſage des obſervations plus anciennes, puiſqu'elles n'ont ſervi que pour connoître le tems périodique.

I. Celle de 1679 donne,

$$3^s 4^\circ 54' 4'' = 3^s 4^\circ\ 7'\ 3'' + m'' + 97n'' + 23525'' \sin. 6^\circ 47' + x'' \sin. 6^\circ 47' + 0{,}114k'' \cos. 6^\circ 47'$$
$$+ 32'' \sin. 72^\circ 12' - 257'' \sin. 60{,}41' + 168 \sin. 13{,}35 + y \sin. 13\ 35 + \tfrac{1}{600} k'' \cos. 13^\circ 35'$$
$$- 243 \sin. 41\ 44 - z \sin. 84{,}22 + (\alpha + 8.360 + 7^s 0^\circ 28') u \cos. 84^\circ 22'.$$

II. Celle de 1694 donne,

$$9,1,12,6 = 9,\ 1,\ 23,\ 10 + m + 112n - 23525'' \sin. 3^\circ 10' - x'' \sin. 3^\circ 10' - 0{,}114k'' \cos. 3^\circ 10'$$
$$- 32'' \sin. 64^\circ\ 2' + 257 \sin. 28^\circ 51' + 168 \sin. 6,\ 20 + y \sin. 6,\ 20 + \tfrac{1}{600} k \cos. 6^\circ 12'$$
$$- 243 \sin. 47,\ 15 + z'' \sin. 79,\ 17 - (\alpha + 9.360 + 9^s 21^\circ 19') u \cos. 79^\circ 17'.$$

III. Celle de 1708 donne,

$$2,28,37,11, = 2,28,43,\ 15 + m + 126n + 23525 \sin. 0^\circ 23' + x'' \sin. 0^\circ 23' + 0{,}114k'' \cos. 0^\circ 23'$$
$$+ 32'' \sin. 37{,}38 + 257 \sin. 71{,}34 + 168 \sin. 0,\ 46 + y \sin. 0\ 46 + \tfrac{1}{600} k \cos. 0\ 46$$
$$+ 243 \sin. 29{,}23 - z \sin. 79{,}26 + (\alpha + 11.360 + 0^s 8^\circ 15') u \cos. 79^\circ 26'$$

IV. Celle de 1723 donne,

$$8,26,12,6 = 8,26,\ 1,\ 8 + m + 141n + 23525 \sin. 2^\circ 31' + x \sin. 2^\circ 31' - 0{,}114k'' \cos. 2^\circ 31'$$
$$- 32 \sin. 12{,}50 - 257 \sin. 8{,}56 - 168 \sin. 5,\ 2 - y \sin. 5,\ 2 + \tfrac{1}{600} k \cos. 5,\ 2$$
$$+ 243 \sin. 72{,}48 + z \sin. 79{,}13 - (\alpha + 12.360 + 2^s 25^\circ 38') u \cos. 79^\circ 13'.$$

§. CXVII. Ces équations étant réduites en nombres, donneront :

$$\text{I. } 1679 \ldots + 5'\ 55'' = m'' + 97n'' + 0{,}118x'' + 0{,}235y'' + 0{,}129k'' - 0{,}995z'' + 0{,}098\alpha u^\circ + 303u^\circ$$
$$\text{II. } 1994 \ldots + 11\ 40 = m + 112n - 0{,}055x + 0{,}110y - 0{,}097k + 0{,}982z - 0{,}186\alpha u - 657u$$
$$\text{III. } 1708 \ldots - 15\ \ 3 = m + 126n + 0{,}007x + 0{,}013y + 0{,}130k - 0{,}983z + 0{,}183\alpha u + 726u$$
$$\text{IV. } 1723 \ldots - 9\ 10 = m + 141n + 0{,}044x - 0{,}088y - 0{,}098k + 0{,}982z - 0{,}186\alpha u - 819u.$$

De-là on pourra encore déterminer la valeur de m, en en ajoûtant deux enſemble.

III+IV. donne $m = 748'' - 0{,}025x'' + 0{,}038y'' - 0{,}016k''$

II+III. donne $m = 1204 + 0{,}024x - 0{,}062y - 0{,}017k''$.

d'où l'on tirera $m = 976'' - 0{,}012y'' - 0{,}016k''$, & $x = 2y - 9080''$; mais cette derniere détermination n'eſt

pas fûre, à caufe de la petiteffe des coëfficients de x & y. Mais prenant ces fommes, & les autres différences :

$$\text{I}+\text{III}\,..\,-9'\,8''=2m+223n+0{,}125x+0{,}248y+0{,}259k-1{,}978z+0{,}281\alpha u+1029u$$
$$\text{II}+\text{IV}\,..\,+2{,}30=2m+253n-0{,}011x+0{,}022y-0{,}195k+1{,}964z-0{,}372\alpha u-1476u$$
$$\text{I}-\text{IV}\,..\,+15{,}5=-44n+0{,}074x+0{,}323y+0{,}227k-1{,}977z+0{,}284\alpha u+1122u$$
$$-\text{II}+\text{III}\,..\,-26{,}43=+14n+0{,}062x-0{,}098y+0{,}227k-1{,}965z+0{,}369\alpha u+1383u.$$

De la différence de ces deux dernieres équations, on tire, $1907''=0{,}012x+0{,}421y-0{,}085\alpha u$; & fi $x=2y-9080$, on aura $2006''=0{,}445y-0{,}085\alpha u$; d'où l'on voit que la valeur de y doit être très-confidérable, & peut-être plus grande d'un degré ; ce qui feroit une marque infaillible que la force du Soleil ne décroît point en raifon réciproque des quarrés des diftances.

§. CXVIII. Subftituons dans ces équations les valeurs déja trouvées, fçavoir :

$$m=1500-0{,}007k\,;\; n=-11,\; u=\tfrac{1}{7}\;\&\; x=678''-0{,}153y''+0{,}183z''+0{,}983\alpha u^{\circ},$$

& nous aurons les équations fuivantes :

$$\text{II}+\text{III}\,..\;0=-280''-0{,}010k''-0{,}066y''+0{,}004z''+0{,}024\alpha u^{\circ}$$
$$\text{I}+\text{III}\,..\;0=+1327+0{,}245k+0{,}229y-1{,}955z+0{,}404\alpha u$$
$$\text{II}+\text{IV}\,..\;0=-152-0{,}209k+0{,}024y+1{,}962z-0{,}383\alpha u$$
$$\text{I}-\text{IV}\,..\;0=-206+0{,}227k+0{,}313y-1{,}966z+0{,}360\alpha u$$
$$\text{III}-\text{II}\,..\;0=+1689+0{,}227k-0{,}107y-1{,}954z+0{,}431\alpha u,$$

où la différence des dernieres donne $0=1895-0{,}420y+0{,}012z+0{,}071\alpha u^{\circ}$; & par conféquent $y=4514''+0{,}029z''+0{,}171\alpha u^{\circ}$, laquelle valeur n'eft pas pourtant trop fûre, mais dans la fuite elle fera déterminée plus exactement. Subftituons cette valeur dans la derniere équation, & nous aurons :

$$0=1207''+0{,}227k''-1{,}957z''+0{,}413\alpha u^{\circ},$$

d'où nous tirons $k=-5320''+8{,}621z''-1{,}826\alpha u^{\circ}$.

Ces deux valeurs étant fubftituées dans l'équation II+IV, elle prendra cette forme :

$$0 = 1070'' + 0{,}156z'' + 0{,}003\alpha u^{o}.$$

Mais il eſt trop dangereux d'en tirer la valeur de z. Or ſi nous appliquons ces mêmes valeurs de y & de k dans la premiere équation II+III, nous trouverons :

$$0 = 528 + 0{,}084z - 0{,}031\alpha u^{o},$$

& ces deux dernieres équations donnant $z = -6821$, on trouvera $m = 1930''$; $x = -1220'' + 0{,}957\,\alpha u^{o}$; & $y = 4316'' + 0{,}171\,\alpha u^{o}$. Mais dans la valeur de k je n'oſe pas encore ſubſtituer celle de z, parce que ſon coëfficient eſt trop grand.

§. CXIX. Dans les équations que j'ai tirées juſqu'ici des obſervations, le coëfficient de y a été fort petit, & par cette raiſon je ne puis pas me fier à ſa valeur, que je viens de trouver. Je conſidérerai donc encore quelques équations, où le coëfficient de y, c'eſt-à-dire *ſin.* $2q$ devient le plus grand, en employant les obſervations de 1690 & 1727.

Celles de 1690 donnent,

$$7^{s}15^{o}34'0'' = 7^{s}10^{o}\ 51'20'' + m'' + 108n'' + 23525''\, \text{ſin.}\, 44^{o}49' + x''\, \text{ſin.}\, 44^{o}49' - 0{,}114k''\, \text{coſ.}\, 44^{o}49'$$
$$+ 32''\, \text{ſin.}\, 70{,}54 - 257\, \text{ſin.}\, 9{,}43 - 168\, \text{ſin.}\, 89{,}39 - y\, \text{ſin.}\, 89{,}39 + \tfrac{1}{600}\, k\, \text{coſ.}\, 89^{o}39'$$
$$- 243\, \text{ſin.}\, 88{,}20 + z''\, \text{ſin.}\, 37^{o}7' - (\alpha + 9.360 + 5^{s}12^{o}34')u\, \text{coſ.}\, 37^{o}7'.$$

Celle de 1727 donne,

$$10{,}11{,}48{,}7 = 10{,}16,\ 31,\ 8 + m' + 145n'' - 23525''\, \text{ſin.}\, 45^{o}30' - x''\, \text{ſin.}\, 45{,}30 - 0{,}114k''\, \text{coſ.}\, 45{,}30$$
$$+ 32\, \text{ſin.}\, 9{,}50 - 257\, \text{ſin.}\, 49{,}25 + 168\, \text{ſin.}\, 89,\ 1 + y\, \text{ſin.}\, 89,\ 1 - \tfrac{1}{600}\, k''\, \text{coſ.}\, 89,\ 1$$
$$+ 243\, \text{ſin.}\, 25{,}30 + z''\, \text{ſin.}\, 59^{o}35' + (\alpha + 12.360^{o} + 7^{s}5^{o}20')u\, \text{coſ.}\, 59{,}35.$$

qui étant réduites en nombres, produiſent :

1690... $+13'20'' = m'' + 108n'' + 0{,}705x'' - 1{,}000y'' - 0{,}0809k'' + 0{,}603z'' - 0{,}797\alpha u^{o} - 2713u^{o}$

1727... $-4{,}50 = m + 145n - 0{,}713x + 1{,}000y'' - 0{,}0798k'' + 0{,}862z'' + 0{,}506\alpha u^{o} + 2297u^{o}$

la différence $+18'10'' = -37n'' + 1{,}418x - 2y - 0.0010k - 0{,}259z'' - 1{,}303\alpha u^{o} - 5010u^{o}$

& partant $y = -700'' + 0{,}709x'' - 0{,}129z'' - 0{,}651\alpha u.$

§. CXX. La ſomme de ces deux équations donne :

$+8'30'' = 2m'' + 253n'' - 0{,}008x - 0{,}1607k'' + 1{,}465z - 0{,}291\alpha u^{\circ} - 476u^{\circ}$

ou $0 = -350 \quad - 0{,}008x - 0{,}175k + 1{,}465z - 0{,}291\alpha u^{\circ}$.

Or pour déterminer plus précisément les autres lettres, je remarque que les coëfficients des lettres x & $_{\alpha}u$ sont par-tout presque égaux, avec des signes contraires, de même que les coëfficients de k & de z. La raison en est, que les angles q & $\omega - p$ sont presque toûjours la même somme, qui est à peu près $= 270°$; c'est pourquoi on déterminera plus sûrement la différence de ces deux lettres, que chacune à part. Je supposerai donc, pour rendre la résolution plus aisée :

$x = r + s$; $\alpha u = r - s$ & $0{,}114k = t + v$; $z = t - v$, ou $k = 9t + 9v$

& les deux dernieres équations se changeront en

$$y = -700'' + 0{,}058r + 1{,}360s - 0{,}179t + 0{,}080v$$
$$0 = -350 - 0{,}299r + 0{,}283s - 0{,}110t - 3{,}040v.$$

De cette derniere équation nous tirons :

$$v = -115 - 0{,}099r + 0{,}094s - 0{,}036t,$$

qui, étant substituées dans la premiere, donne :

$$y = -709 + 0{,}050r + 1{,}368s - 0{,}182t,$$

& les valeurs déja trouvées plus haut, seront :

$n = -11$; $u = \frac{1}{7}$

$m = 1507 + 0{,}006r - 0{,}006s - 0{,}061t$, & pour la valeur de x, on aura :

$0 = 786 - 0{,}025r - 2{,}192s + 0{,}030t$, qui donne $s = 360 - 0{,}012r + 0{,}015t$,

& partant $v = -81 - 0{,}100r - 0{,}035t$; & $y = -217 + 0{,}034r - 0{,}162t$,

de plus $0 = 513 + 0{,}015r - 0{,}208t$, & $0 = +1960 + 0{,}059r + 0{,}083t$,

$0 = +1081 + 0{,}020r + 0{,}162t$.

§. CXXI. Mais puisque par la combinaison de deux ou plusieurs équations, les erreurs des observations & du calcul se peuvent multiplier, je substituerai les valeurs que je viens de trouver, & qui paroissent assez certaines dans

les équations qui ont été immédiatement déduites des obſervations. J'employerai donc les valeurs ſuivantes :

$m = 1500 + 0{,}006r - 0{,}061t$	$k = 9t + 9v$	$s = 360 - 0{,}012r + 0{,}015t$
$n = -11$	$z = t - v$	$v = -81 - 0{,}100r - 0{,}035t$
$x = r + s$	$au = r - s$	
$y = -217 + 0{,}034r - 0{,}162t$	$u = \frac{1}{7}$	

& les équations qui ont été déduites des obſervations de ce ſiecle ſeront :

$$1745 \ldots \quad 0 = -\ 32 - 0{,}021r - 0{,}190t$$
$$1732 \ldots \quad 0 = +\ 89 + 0{,}016r + 0{,}227t$$
$$1731 \ldots \quad 0 = -\ 1 + 0{,}018r + 0{,}192t$$
$$1716 \ldots \quad 0 = +1263 - 0{,}025r - 0{,}213t$$
$$1723 \ldots \quad 0 = 634 + 0{,}044r + 0{,}122t$$
$$1708 \ldots \quad 0 = +1014 - 0{,}387r + 0{,}052t$$

Or de ces équations on ne ſçauroit rien conclurre ; & la raiſon en eſt, peut-être, que j'ai voulu ſatisfaire exactement à quelques obſervations, au lieu que je ne l'aurois dû faire qu'à peu près ; & cette faute s'eſt enſuite augmentée.

§. CXXII. Afin qu'on puiſſe mieux voir de quelle nature doivent être les valeurs des lettres r, s, t, v & y, après avoir ſuppoſé $n = -11$, & $u = \frac{1}{7}$, je ferai $m = 1200 + \mu$, & toutes les équations que j'ai trouvées juſqu'ici, ſe changeront en celles-ci :

		L'équation u étoit
I.	$A.1583 \,..\, 0 = +445+\mu-0{,}044r-1{,}956s+0{,}231t-0{,}357v+0{,}098y$	$+\ 23''$
II.	$A.1585 \,..\, 0 = +191+\mu+0{,}073r-1{,}917s+0{,}283t+0{,}491v-0{,}712y$	$+\ 33$
III.	$A.1598 \,..\, 0 = -7+\mu+0{,}012r+1{,}988s-0{,}209t+0{,}137v-0{,}036y$	$-\ 86$
IV.	$A.1642 \,..\, 0 = +594+\mu-0{,}038r-1{,}962s+0{,}219t-0{,}327v+0{,}076y$	$+\ 269$
V.	$A.1644 \,..\, 0 = -113+\mu+0{,}074r-1{,}910s+0{,}271t+0{,}521v-0{,}728y$	$+\ 287$
VI.	$A.1657 \,..\, 0 = -276+\mu+0{,}012r+1{,}988s-0{,}199t+0{,}109v-0{,}057y$	$-\ 308$
VII.	$A.1672 \,..\, 0 = +331+\mu-0{,}018r-1{,}982s+0{,}250t-0{,}124v-0{,}154y$	$+\ 402$
VIII.	$A.1673 \,..\, 0 = +400+\mu+0{,}043r-1{,}953s+0{,}227t+0{,}349v-0{,}565y$	$+\ 414$
IX.	$A.1679 \,..\, 0 = -179+\mu+0{,}216r+0{,}020s+0{,}166t+2{,}156v+0{,}235y$	$+\ 43$
X.	$A.1686 \,..\, 0 = -1014+\mu-0{,}018r+1{,}982s-0{,}124t+0{,}250v+0{,}152y$	$-\ 459$
XI.	$A.1690 \,..\, 0 = -1175+\mu-0{,}092r+1{,}502s-0{,}126t-1{,}332v-1{,}000y$	$-\ 387$
XII.	$A.1694 \,..\, 0 = -826+\mu-0{,}241r+0{,}131s+0{,}109t-1{,}855v+0{,}110y$	$-\ 94$
XIII.	$A.1701 \,..\, 0 = +544+\mu-0{,}032r-1{,}968s+0{,}203t-0{,}293v+0{,}055y$	$+\ 518$
XIV.	$A.1703 \,..\, 0 = +598+\mu+0{,}076r-1{,}902s+0{,}262t+0{,}548v-0{,}743y$	$+\ 538$
XV.	$A.1708 \,..\, 0 = +821+\mu+0{,}190r-0{,}176s+0{,}187t+2{,}153v+0{,}013y$	$+\ 104$
XVI.	$A.1716 \,..\, 0 = +236+\mu+0{,}010r+1{,}990s-0{,}191t+0{,}083v-0{,}079y$	$-\ 593$
XVII.	$A.1723 \,..\, 0 = +82+\mu-0{,}142r+0{,}230s+0{,}100t-1{,}864v-0{,}088y$	$-\ 117$
XVIII.	$A.1727 \,..\, 0 = +223+\mu-0{,}207r-1{,}219s+0{,}142t-1{,}582v+1{,}000y$	$+\ 328$
XIX.	$A.1731 \,..\, 0 = +367+\mu-0{,}016r-1{,}984s+0{,}249t-0{,}105v-0{,}176y$	$+\ 655$
XX.	$A.1732 \,..\, 0 = +395+\mu+0{,}045r-1{,}949s+0{,}235t+0{,}377v-0{,}583y$	$+\ 668$
XXI.	$A.1745 \,..\, 0 = -999+\mu+0{,}017r+1{,}983s-0{,}128t+0{,}236v+0{,}130y$	$-\ 712$

§. CXXIII. Ici nous voyons d'abord, que ſi nous faiſons les valeurs des lettres μ, r, s, t, v & $y = 0$, la plus grande erreur négative du calcul feroit $= 1175$, & la plus grande erreur affirmative $= 821$: donc ſi nous faiſons $\mu = 177$, ces erreurs deviendront égales, & chacune ſera $= 998''$ ou $16'\,38''$, qui ſera déja plus petite que celle à laquelle les Tables ordinaires ſont ſujettes. De plus je remarque, que ſi au lieu de mettre $u = \frac{1}{7}$, je ſuppoſois $u = \frac{1}{28}$ pour les ſecondes, ou $u = \frac{1}{100000}$ pour les degrés, ainſi que la théorie nous a montré, les erreurs du calcul feroient :

I. A.

I.	*A.* 1583..o	$= +428'' + \mu$ &c.
II.	*A.* 1585..o	$= +166 + \mu$ &c.
III.	*A.* 1598..o	$= + 58 + \mu$ &c.
IV.	*A.* 1642..o	$= +392 + \mu$ &c.
V.	*A.* 1644..o	$= -328 + \mu$ &c.
VI.	*A.* 1657..o	$= - 45 + \mu$ &c.
VII.	*A.* 1672..o	$= + 29 + \mu$ &c.
VIII.	*A.* 1673..o	$= + 89 + \mu$ &c.
IX.	*A.* 1679..o	$= -211 + \mu$ &c.
X.	*A.* 1686..o	$= -670 + \mu$ &c.
XI.	*A.* 1690..o	$= -885 + \mu$ &c.
XII.	*A.* 1694..o	$= -755 + \mu$ &c.
XIII.	*A.* 1701..o	$= +155 + \mu$ &c.
XIV.	*A.* 1703..o	$= +194 + \mu$ &c.
XV.	*A.* 1708..o	$= +743 + \mu$ &c.
XVI.	*A.* 1716..o	$= +681 + \mu$ &c.
XVII.	*A.* 1723..o	$= +170 + \mu$ &c.
XVIII.	*A.* 1727..o	$= - 23 + \mu$ &c.
XIX.	*A.* 1731..o	$= -124 + \mu$ &c.
XX.	*A.* 1732..o	$= -106 + \mu$ &c.
XXI.	*A.* 1745..o	$= -465 + \mu$ &c.

Et si nous faisons à présent $\mu = 71$, la plus grande erreur, tant affirmative que négative montera à $814'' = 13' 34''$, qui est déja plus petite que la précédente.

§. CXXIV. Pour diminuer davantage ces erreurs, je ne vois pas de valeurs à donner aux lettres r, s, t, v & y, à moins que celles des lettres r & t ne soient extremement grandes, auquel cas il faudroit des observations beaucoup plus exactes, pour en pouvoir tirer ces valeurs par la méthode ordinaire. Mais j'observe, que si l'on ajoûte encore cette équation $+ 540 \, sin. (2\,\omega - p)$; les erreurs non-seulement seront diminuées considérablement, mais on pourra déterminer des valeurs pour les autres lettres, qui les diminueront encore davantage. Ayant donc ajoûté par-tout cette équation, outre la valeur $u = \frac{1}{28}$, les erreurs du calcul pour chaque observation seront:

		Erreurs.	Soit $v = -100$	Erreurs.	Soit $s = 50$	Erreurs.
I.	*A.* 1583.	+ 239″	+ 36	+ 275	− 98	+ 177
II.	*A.* 1585.	− 179	− 49	− 228	− 96	− 324
III.	*A.* 1598.	− 482	− 14	− 496	+ 99	− 397
IV.	*A.* 1642.	+ 317	+ 33	+ 350	− 98	+ 252
V.	*A.* 1644.	− 581	− 52	− 633	− 95	− 728
VI.	*A.* 1657.	− 572	− 11	− 583	+ 99	− 484
VII.	*A.* 1672.	+ 125	+ 12	+ 137	− 99	+ 38
VIII.	*A.* 1673.	+ 200	− 35	+ 165	− 97	+ 68
IX.	*A.* 1686.	− 213	− 25	− 238	+ 99	− 139
X.	*A.* 1690.	− 345	+ 133	− 212	+ 75	− 137
XI.	*A.* 1694.	− 361	+ 185	− 176	+ 6	− 170
XII.	*A.* 1701.	+ 191	+ 29	+ 220	− 98	+ 122
XIII.	*A.* 1703.	+ 44	− 55	− 11	− 95	− 106
XIV.	*A.* 1708.	+ 482	− 215	+ 267	− 9	+ 258
XV.	*A.* 1716.	+ 188	− 8	+ 180	+ 99	+ 279
XVI.	*A.* 1723.	− 332	+ 186	− 146	+ 11	− 135
XVII.	*A.* 1727.	− 250	+ 158	− 92	− 61	− 153
XVIII.	*A.* 1731.	− 118	+ 10	− 108	− 99	− 207
XIX.	*A.* 1732.	− 87	− 37	− 124	− 97	− 221
XX.	*A.* 1745.	− 64	− 24	− 88	+ 99	+ 11

§. CXXV. On voit par-là que la dernière hypothèse $s = 50$, ne rend point les erreurs plus petites, & on ne sçauroit trouver des valeurs pour les autres lettres, qui diminuassent davantage les erreurs, que n'a fait la supposition $v = -100$. Car à l'exception des observations des années 1642, 1644 & 1657, qui n'ont pas été faites par des Astronomes du premier ordre, les autres erreurs ne montent qu'à + 267″, & − 238″, si nous ne faisons point attention aux observations plus anciennes. Et partant, si l'on met $\mu = -15$, l'une & l'autre erreur ne sera que de 252″, ou 4′ 12″; & je doute fort qu'il soit possible de rendre ces erreurs plus petites : je crois même qu'on doit

être content d'avoir réduit les erreurs des Tables de Saturne entre des limites qui ne different que de $4' 12''$ de la vérité, puiſqu'elles montoient auparavant juſqu'à $20'$. Or, ſi la derniere équation $+540\, fin.(2\omega - p)$ eſt fondée comme la théorie avoit fourni celle-ci $-243\, fin.(2\omega - p)$, il faudra employer au lieu de celle-ci, preſque ſa négative $+297\, fin.(2\omega - p)$; ce qui m'a fait ſoupçonner d'abord que je m'étois trompé dans le ſigne: mais ayant réitéré le calcul, je n'y ai pourtant pas trouvé cette faute. De ſorte que c'eſt une preuve évidente que la théorie Newtonienne n'eſt pas trop d'accord avec les obſervations; ce qui ſe confirme encore par les erreurs qui ſont reſtées, puiſqu'elles ne ſçauroient être attribuées tout-à-fait aux obſervations.

§. CXXVI. Comme il n'y a pas de valeurs pour les lettres s & y, qui puiſſent diminuer les erreurs, je ferai $s = 0$; $y = 0$; & pour les lettres r & t, il ſera indifférent de leur donner des valeurs quelconques au-deſſous de 100, puiſque les variations qui en réſultent, ſeront moindres que $25''$. Je ſuppoſerai donc $t = -100$, pour rendre la valeur de $z = 0$, afin que l'inégalité $-z\, fin.(\omega - p)$ s'évanoüiſſe. Soit enſuite auſſi $r = 0$, & puiſque $\mu = -15$, les valeurs des élémens des Tables de Saturne ſeront:

$$m = 1185''; \; n = -11''; \; x = 0; \; y = 0; \; k = -1800''; \; z = 0; \; \alpha u = 0; \; \& \; u = \tfrac{1}{28}.$$

D'où je tire la méthode ſuivante de conſtruire des Tables plus exactes pour calculer le lieu de Saturne, leſquelles depuis 1672 juſqu'à 1745, ne s'écartent de la vérité que de $4' 12''$ tout au plus; & comme cet intervalle de tems ſurpaſſe deux révolutions de Saturne, après leſquelles cette planete revient à peu près dans les mêmes ſituations, tant par rapport à ſon orbite, que par rapport à Jupiter, on peut être aſſûré que ces mêmes Tables ſerviront à dé-

terminer le lieu de Saturne pour tous les tems proposés, tant avant qu'après ces termes marqués.

CXXVII. Je prendrai donc pour base les Tables de M. Cassini, & je déterminerai tant les corrections qu'il y faut apporter, que les nouvelles équations qu'on y doit ajoûter, pour trouver la place de Saturne au dégré marqué de précision.

I. A la longitude moyenne de Saturne, que ces Tables marquent, il faut premierement ajoûter 1185″; ensuite il en faut retrancher autant de fois 11″ qu'il y aura d'années écoulées depuis 1582. Donc pour l'année 1700, il faudra soustraire 113″, ou 1′ 53″ de la longitude moyenne; & pour l'année 1600, il y faut ajoûter 987″, ou 16′ 27″: de sorte que nous aurons pour ces deux époques:

A. 1600. Longitude moyenne....................................	6ˢ	15°	47′	13″
A. 1700. Longitude moyenne....................................	11	8	56	20
Donc le mouvement moyen pendant 100 ans sera.........	4	23	9	7
& le mouvement moyen pendant une année commune sera..	0	12	23	25

ce qui suffit pour avoir la longitude moyenne de Saturne à chaque instant proposé.

II. Ensuite ayant trouvé $k = -1800'' = -30' 0''$; on doit, à chaque instant proposé, soustraire 30′ de l'anomalie excentrique, ou, ce qui revient au même, de l'anomalie moyenne de Saturne, qui est tirée des Tables. Donc l'anomalie moyenne pour l'année 1700, qui, selon les Tables, se trouve $= 2^s\ 10^\circ\ 49'\ 34''$, sera en effet $= 2^s\ 10^\circ\ 19'\ 34''$, & partant le lieu de l'aphélie pour ce tems A. 1700 sera: $8^s\ 28^\circ\ 36'\ 46''$. Or les Tables le marquent $8^s\ 28^\circ\ 8'\ 39''$. Donc puisque le mouvement annuel de l'aphélie est juste, on n'aura qu'à ajoûter constamment 28′ 7″ au lieu de l'aphélie de Saturne, que les Tables marquent, ainsi

A. 1600. Lieu de l'Aphélie........................	8ˢ	26°	27′	2″
A. 1700. Lieu de l'Aphélie........................	8	28	36	46

De-là on trouvera l'anomalie moyenne ; & puisque $x = 0$ & $y = 0$, la Table marquera la vraie équation du centre de Saturne, pourvû qu'on augmente la plus grande équation, qui est $6^\circ 31' 40''$ de $30''$, ce qui la donnera de $6^\circ 32' 10''$.

III. En troisieme lieu, il faut calculer la place de Jupiter, & son anomalie excentrique p : supposant l'anomalie excentrique de Saturne $= q$; soustrayant la longitude de Saturne de celle de Jupiter, soit le reste $= \omega$. En cherchant les valeurs des angles 2ω, $\omega - q$; $\omega - p$ & $2\omega - p$, on tirera aisément les corrections suivantes :

$$-32'' \text{fin.}\, 2\omega - 257'' \text{fin.}\,(\omega - q) + 297'' \text{fin.}\,(2\omega - p),$$

par le moyen desquelles il faut corriger la place de Saturne déja trouvée.

IV. Enfin, qu'on cherche le nombre des révolutions de Jupiter achevées depuis 1582, que j'ai marquées §. CIV, ou bien qu'on ôte de l'année proposée le nombre 1578, qu'on multiplie le reste par 7, & qu'on divise le produit par 83 ; négligeant le reste. Soit multiplié ensuite le quotient entier par 360, & soit ajoûté au produit l'anomalie de Jupiter p, exprimée en degrés, & la somme divisée par 28 : le quotient étant supposé $= Q$; on aura la derniere équation $= - Q''\, cos.(\omega - p)$, qui étant appliquée, donnera le vrai lieu de Saturne dans son orbite ; d'où, à l'aide du lieu du nœud de Saturne, on trouvera sa longitude & sa latitude héliocentrique.

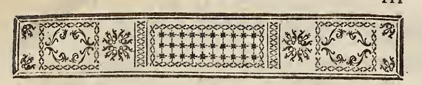
§. CXXVIII. Pour trouver enfin la vraie distance de Saturne, puisqu'en supposant la distance moyenne de la Terre au Soleil $= 100000$, la distance moyenne de Saturne au Soleil est $f = 954008$: on tirera du §. LXXXI, en

changeant le ſigne du terme $cof.(2\omega - p)$, l'expreſſion ſuivante pour la vraie diſtance de Saturne au Soleil z :

$$z = 954008 + 54382\ cof.\ q + 815\ cof.\ \omega + 358\ cof.(\omega - q) + 2\tfrac{1}{3}\ Q\ fin.(\omega - p)$$
$$+ 136\ cof.\ 2\omega - 572\ cof.(2\omega - p),$$

où Q marque le même nombre que dans le §. précédent. Or les deux premiers termes enſemble $954008 + 54382\ cof.\ q$ ſont déja marqués aſſez exactement dans les Tables de M. Caſſini, de ſorte qu'on n'aura qu'à y appliquer les valeurs des cinq autres termes ſuivant leurs ſignes : & connoiſſant la diſtance vraie de Saturne au Soleil, on en déterminera ſa place géocentrique.





SUPPLEMENT A LA PIECE.

Ponderibus librata suis per inane profundum
Sidera, quò vis alma trahit retrahitque sequuntur.

APRÈS avoir calculé plusieurs observations de Saturne selon les nouvelles Tables que je viens d'expliquer, j'ai trouvé pour la plûpart un plus grand accord que je n'avois espéré; puisque je n'ai pas eu égard dans le calcul, à toutes les petites variations qui peuvent provenir du changement de la longitude moyenne & du lieu de l'aphélie. Je juge donc à propos d'ajoûter ici plusieurs de ces calculs, pour confirmer davantage mes nouvelles Tables de Saturne: & comme la derniere équation $-Q'' \, cos. (\omega - p)$ semble le plus embarrasser le calcul, j'ai trouvé moyen de m'en défaire tout-à-fait. Car ayant observé que cette équation obtient sa plus grande valeur à peu près quand l'équation du centre de Saturne est la plus grande, & que ces deux équations ons presque toûjours le même rapport entre elles, vû que $-cos. (\omega - p)$ est environ égal à $sin. \, q$; on pourra comprendre l'équation $-Q'' \, cos. (\omega - p)$ dans l'équation ordinaire du centre, dont celle-ci sera diminuée; & puisque cette équation $-Q'' \, cos. (\omega - p)$ va en croissant, & qu'après chaque siecle elle prend un accroissement de $1' \, 50''$, la plus grande équation du centre de Saturne ira en diminuant, & après chaque siecle elle deviendra plus petite de $1' \, 50''$: & dans un espace de dix ans, cette diminution sera de $11''$. M. Cassini supposant

donc conſtamment la plus grande équation du centre de Saturne de 6° 31′ 40″, je trouve qu'en retranchant ladite équation pour l'année 1745, cette plus grande équation doit être ſuppoſée 6° 29′ 10″, de ſorte que pour cette année, la plus grande équation de M. Caſſini doit être diminuée de 2′ 30″, & pour l'année 1700, il en faut ſouſtraire 1′ 40″. Or pour l'année 1600, il y faut ajoûter 0′ 10″, & pour l'année 1500 2′ 0″. De même, on peut rendre la correction de la longitude moyenne des Tables de M. Caſſini plus aiſée. Car pour l'année 1700, il en faut retrancher 1′ 53″; or pour l'année 1600, il y faut ajoûter 16′ 27″, & pour l'année 1500, on y doit ajoûter 34′ 47″. Ces corrections ſont repréſentées dans la Table qui ſuit de cinq en cinq ans.



CORRECTION

CORRECTION DES TABLES DE SATURNE

DE M. CASSINI.

An.	Long. moyen.	Eq. du Centr.	An.	Long. moyen.	Eq. du Centr.	An.	Long. moyen.	Eq. du Centr.
1500.	+ 34′ 47″	+ 2′ 0″	1600	+ 16′ 27″	+ 0′ 10″	1700	— 1′ 53″	— 1′ 40″
1505.	+ 33 52	+ 1 55	1605	+ 15 32	+ 0 5	1705	— 2 48	— 1 45
1510.	+ 32 57	+ 1 49	1610	+ 14 37	— 0 1	1710	— 3 43	— 1 51
1515.	+ 32 2	+ 1 44	1615	+ 13 42	— 0 6	1715	— 4 38	— 1 56
1520.	+ 31 7	+ 1 38	1620	+ 12 47	— 0 12	1720	— 5 33	— 2 2
1525.	+ 30 12	+ 1 33	1625	+ 11 52	— 0 17	1725	— 6 28	— 2 7
1530.	+ 29 17	+ 1 27	1630	+ 10 57	— 0 23	1730	— 7 23	— 2 13
1535.	+ 28 22	+ 1 22	1635	+ 10 2	— 0 28	1735	— 8 18	— 2 18
1540.	+ 27 27	+ 1 16	1640	+ 9 7	— 0 34	1740	— 9 13	— 2 24
1545.	+ 26 32	+ 1 11	1645	+ 8 12	— 0 39	1745	— 10 8	— 2 29
1550.	+ 25 37	+ 1 5	1650	+ 7 17	— 0 45	1750	— 11 3	— 2 35
1555.	+ 24 42	+ 1 0	1655	+ 6 22	— 0 50	1755	— 11 58	— 2 40
1560.	+ 23 47	+ 0 54	1660	+ 5 27	— 0 56	1760	— 12 53	— 2 46
1565.	+ 22 52	+ 0 49	1665	+ 4 32	— 1 1	1765	— 13 48	— 2 51
1570.	+ 21 57	+ 0 43	1670	+ 3 37	— 1 7	1770	— 14 43	— 4 57
1575.	+ 21 2	+ 0 38	1675	+ 2 42	— 1 12	1775	— 15 38	— 3 2
1580.	+ 20 7	+ 0 32	1680	+ 1 47	— 1 18	1780	— 16 33	— 3 8
1585.	+ 19 12	+ 0 27	1685	+ 0 52	— 1 23	1785	— 17 28	— 3 13
1590.	+ 18 17	+ 0 21	1690	— 0 3	— 1 29	1790	— 18 23	— 3 19
1595.	+ 17 22	+ 0 16	1695	— 0 58	— 1 34	1795	— 19 18	— 3 24
1600.	+ 16 27	+ 0 10	1700	— 1 53	— 1 40	1800	— 20 13	— 3 30

Or, à la longitude de l'aphélie, il faut conſtamment ajoûter . . . . 28′ 7″.

Suivant ces élémens, je m'en vais faire le calcul pour pluſieurs obſervations.

I. *A.* 1582. Août 20j 23h 12′ Long. ♄ . . . 11s 7° 27′ 47″

Long. moyen. ♄.	Lieu de l'Aphél.	Lieu du ☊			Eq.
11s 13° 24′ 22″	8 25 36 27	3 19 21	ω = 11s 11° 42′		
+ 19 45	+ 28 7	11 7 28	2ω = 10 23 24	— ſin. 36 36	+ 20″
11 13 44 7	8 26 4 34	7 18 7	ω — q = 8 27 2	— ſin. 87 2	+ 2 56
— 6 16 29	11 13 44 7	*Réduct.*	ω — p = 6 28 4		
11 7 27 38	2 17 39 33	— 1 38	2ω — p = 6 9 46	— ſin. 9 46	— 50
— 1 38	*Eq.* 6 15 56				+ 2 26
11 7 26 0	*aj.* 33				+ 3′ 46″
+ 3 46	6 16 29				
11 7 29 46	Lieu calculé.	*Erreur* + 1′ 59″.			
11 7 27 47	Lieu obſervé.				

II. *A.* 1583. *Sept.* 2j 21h 40' *Long.* ♄ … 11s 19° 49' 30".

Long. moyenne.	*Aphélie.*	*Nœud* ☊.			
			ω = 0s 3°29'		
11s 26° 3' 55"	8 25 37 48	3 19 22	2ω = 0 6 58	+ *ſin.* 6 58	− 4
+ 19 34	+ 28 7	11 19 49	$\omega-q$ = 9 6 8	− *ſin.* 83 52	+ 255
11 26 23 29	8 26 5 55	8 0 27	$\omega-p$ = 6 17 6		
− 6 31 15	11 26 23 29	*Réd.* − 1 25	$2\omega-p$ = 6 20 35	− *ſin.* 20 35	− 100
11 19 52 14	3 0 17 34				+ 151
− 1 25	*Eq.* 6 30 46				+ 2' 31"
11 19 50 49	+ 29				
+ 2 31	6 31 15				

11 19 53 20 Lieu calculé. } *Erreur* + 3' 50"
11 19 49 30 Lieu obſervé. }

III. *A.* 1584. *Sept.* 15j 6h 30' *Long.* ♄ …. 0s 2° 34' 0".

0 8 44 25	8 25 39 9	3 19 13	ω = 0 25 18		− 25
+ 19 23	+ 28 27	0 2 34	2ω = 1 20 36	+ *ſin.* 50 36	+ 247
0 9 3 48	8 26 7 16	8 13 21	$\omega-q$ = 9 15 26	− *ſin.* 74 34	
− 6 27 24	0 9 3 48	*Réd.* − 56"	$\omega-p$ = 6 5 55		− 151
0 2 36 24	3 12 56 32		$2\omega-p$ = 7 1 13	− *ſin.* 31 13	+ 71
− 56	*Eq.* 6 26 57				+ 1' 11"
0 2 35 28	+ 27				
+ 1 11	6 27 24				

0 2 36 39 Lieu calculé. } *Erreur* + 2' 39".
0 2 34 0 Lieu obſervé. }

IV. *A.* 1586. *Octob.* 12j 9h 0' *Long.* ♄ …. 0s 29° 6' 5".

1 4 6 6	8 25 41 50	3 19 25	ω = 2 5 26		
+ 19 1	+ 28 7	0 29 6	2ω = 4 10 52	+ *ſin.* 49 8	− 24
1 4 25 7	8 26 9 57	9 9 41	$\omega-q$ = 9 29 42	− *ſin.* 60 18	+ 222
− 5 21 28	1 4 25 7	*Réd.* + 35	$\omega-p$ = 5 11 16		
0 29 3 39	4 8 15 10		$2\omega-p$ = 7 16 42	− *ſin.* 46 42	− 211
+ 35	*Eq.* 5 21 6				− 13"
0 29 4 14	+ 22				
− 13	5 21 28				

0 29 4 1 Lieu calculé. } *Erreur* − 2' 4".
0 29 6 5 Lieu obſervé. }

V. *A.* 1590. *Déc.* 6j 19h 40' ♄ …. 2s 25° 14' 0".

2 24 53 53	8 25 47 12	3 19 30	ω = 4 7 28		
+ 18 17	+ 28 7	2 25 14	2ω = 8 14 56	− *ſin.* 74 56	+ 31
2 25 12 10	8 26 15 19	11 5 44	$\omega-q$ = 10 8 25	− *ſin.* 51 35	+ 198
− 7 43	2 25 12 10	*R.* + 1 15	$\omega-p$ = 3 11 16		
2 25 4 27	5 28 56 51		$2\omega-p$ = 7 18 44	− *ſin.* 48 44	− 218
+ 1 15	*Eq.* 0 7 43				+ 11"
2 26 5 42	0				
+ 11	0 7 43				

2 25 5 53 Lieu calculé. } *Erreur* − 8' 7".
2 25 14 0 Lieu obſervé. }

Je crois qu'il s'eſt gliſſé dans cette Obſervation quelque erreur, puiſque le calcul de l'année ſuivante montre clairement que l'erreur ne ſçauroit être ſi conſidérable.

VI. *A.* 1591. *Déc.* 20ʲ 22ʰ 14′. ♄... 3ˢ 9° 23′ 4″.

3 7 35 50	8 25 48 33	3 19 31	ω = 4 22 38		
+ 18 6	+ 28 7	3 9 23	2ω = 9 15 16	− *ſin.* 74 44	+ 31
3 7 53 56	8 26 16 40	11 19 52	ω−q = 8 10 8	− *ſin.* 70 4	+ 240
+ 1 24 44	3 7 53 56	*Réd.* + 35	ω−p = 2 26 3		
3 9 18 40	6 11 37 16		2ω−p = 7 18 4	− *ſin.* 48 4	− 218
+ 35	*Eq.* 1 24 42				+ 53
2 9 19 15	2				
+ 53	1 24 44				
3 9 20 8	Lieu calculé.	*Erreur* = 2′ 56″.			
3 9 23 4	Lieu obſervé.				

VII. *A.* 1595. *Janv.* 30ʲ 23ʰ 0′ ♄... 4ˢ 21° 15′ 0″.

4 15 41 6	8 25 52 33	3 19 33	ω = 6 17 18		
+ 17 22	+ 28 7	4 21 15	2ω = 1 4 36	+ *ſin.* 34 36	− 19
4 15 58 28	8 26 20 40	1 1 42	ω−q = 10 24 56	− *ſin.* 35 4	+ 146
+ 5 12 25	4 15 58 28	*R.* − 1 28	ω−p = 1 15 13		
4 21 10 53	7 19 37 48		2ω−p = 8 2 31	− *ſin.* 62 31	− 259
− 1 28	*Eq.* 5 12 13				− 132
4 21 9 25	+ 12				− 2, 12
− 2 12	5 12 25				
4 21 7 13	Lieu calculé.	*Erreur* − 7′ 47″.			
4 21 15 0	Lieu obſervé.				

VIII. *A.* 1598. *Mars* 10ʲ 23ʰ 0′ ♄... 6ˢ 0° 33′ 35″.

5 23 42 17	8 25 56 36	3 19 36	ω = 8 20 12		
+ 16 49	+ 28 7	6 0 34	2ω = 5 10 24	+ *ſin.* 19 6	− 10
5 23 59 6	8 26 24 43	2 10 58	ω−q = 11 19 11	− *ſin.* 10 49	+ 48
+ 6 31 40	5 23 59 6	*R.* − 1 3	ω−p = 0 9 56		
6 0 30 46	8 27 34 23		2ω−p = 9 0 8	− *ſin.* 89 52	− 297
− 1 3	*Eq.* 6 31 28				− 259
6 0 29 43	+ 12				− 4, 19
− 4 19	6 31 40				
6 0 25 24	Lieu calculé.	*Erreur* − 8′ 11″.			
6 0 33 35	Lieu obſervé.				

IX. *A.* 1599. *Mars* 23ʲ 18ʰ 40′ ♄... 6ˢ 13° 0′ 0″.

6 6 21 38	8 25 57 56	3 19 37	ω = 9 9 32		
+ 16 38	+ 28 7	6 13 0	2ω = 6 19 4	− *ſin.* 19 4	+ 10
6 6 38 16	8 26 26 9	2 23 23	ω−q = 11 25 59	− *ſin.* 4 1	+ 18
+ 6 19 54	6 6 38 16	*Réd.* − 25	ω−p = 11 27 47		
6 12 58 10	9 10 12 13		2ω−p = 9 7 19	− *ſin.* 82 41	− 290
− 25	*Eq.* 6 19 43				− 262
6 12 57 45	+ 11				− 4, 22
− 4 22	6 19 54				
6 12 53 23	Lieu calculé.	*Erreur* − 6′ 37″.			
6 13 0 0	Lieu obſervé.				

Juſqu'ici ce ſont des Obſervations de Tycho-Brahé, dans leſquelles on me pourra pardonner ces erreurs, qui n'excedent preſque que de 8′. Je paſſerai donc à celles de Hevelius, de Flamſteed, & des Aſtronomes de l'Obſervatoire de Paris.

X. *A.* 1658. *Avril* 3j 17h 13' ♄... 6s 14° 35' 28".

6 8 15 36	8 27 14 30	3 20 34	ω = 8 29 21		
+ 5 49	+ 28 7	6 14 35	2ω = 5 28 42	+ *sin.* 1 18	− 1
6 8 21 25	8 27 42 37	2 24 1	ω−q = 11 15 11	− *sin.* 14 49	+ 65
+ 6 18 8	6 8 21 25	*Réd.* − 22	ω−p = 11 27 0		
6 14 3 33	9 10 38 48		2ω−p = 8 26 21	− *sin.* 86 21	− 295
− 22	*Eq.* 6 18 59				− 231
6 14 39 11	− 51				− 3, 51
− 3 51	6 18 8				
6 14 35 20	Lieu calculé.	*Erreur.* − 0' 8".			
6 14 35 28	Lieu observé.				

XI. *A.* 1661. *Mai* 10j 6h 2' ♄... 7s 20° 22' 24".

7 16 11 49	8 27 18 32	3 20 36	ω = 10 21 53		
+ 5 16	+ 28 7	7 20 22	2ω = 9 13 46	− *sin.* 76 14	+ 31
7 16 17 5	8 27 46 39	3 29 46	ω−q = 0 0 58	+ *sin.* 0 58	− 4
+ 4 5 29	7 16 17 5	*R* + 1 26	ω−p = 10 18 18		
7 20 22 34	10 18 30 26		2ω−p = 9 10 11	− *sin.* 79 49	− 288
+ 1 26	*Eq.* 4 6 4				− 261
7 20 24 0	− 35				− 4, 21
− 4 21	4 5 29				
7 20 19 39	Lieu calculé.	*Erreur* − 2' 45".			
7 20 22 24	Lieu observé.				

XII. *A.* 1665. *Juin* 26j 15h 23' ♄... 9s 5° 43' 51".

9 6 43 26	8 27 23 54	3 20 40	ω = 1 7 48		
+ 4 32	+ 28 7	9 5 44	2ω = 2 15 36	+ *sin.* 75 36	− 31
9 6 47 58	8 27 52 1	5 15 4	ω−q = 0 28 58	+ *sin.* 28 58	− 124
− 0 56 39	9 6 47 58	*Réd.* + 51	ω−p = 9 0 55		
9 5 51 19	0 8 55 57		2ω−p = 10 8 43	− *sin.* 51 17	− 227
+ 51	*Eq.* 0 56 47				− 382
9 5 52 10	− 8				− 6' 22".
− 6 22	0 56 39				
9 5 45 48	Lieu calculé.	*Erreur* + 1' 57".			
9 5 43 51	Lieu observé.				

XIII. *A.* 1670. *Août* 27j 7h 20' ♄... 11s 3° 44' 11".

11 9 57 21	8 27 30 37	3 20 45	ω = 4 26 23		
+ 3 37	+ 28 7	11 3 44	2ω = 9 22 46	− *sin.* 67 74	+ 29
11 10 0 58	8 27 58 44	7 12 59	ω−q = 2 17 0	+ *sin.* 77 0	− 250
− 6 2 39	11 10 0 58	*R.* − 1 38	ω−p = 7 7 50		
11 3 58 19	2 12 2 14		2ω−p = 0 4 13	+ *sin.* 4 13	+ 20
− 1 38	*Eq.* 6 3 41				− 201
11 3 56 41	− 1 2				− 3, 21
− 3 21	6 2 39				
11 3 53 20	Lieu calculé.	*Erreur.* + 9' 9".			
11 3 44 11	Lieu observé.				

XIV.

XIV. *A.* 1671. *Sept.* 8j 8^h 56′ ♄ … 11^s 16° 5′ 0″.

11 22 35 12	8 27 31 58	3 20 46	ω = 5 13 46		
+ 3 26	+ 28 7	11 16 5	2ω = 10 27 32	− *sin.* 32 28	+ 17
11 22 38 38	8 28 0 5	7 25 19	ω − q = 2 21 56	+ *sin.* 81 56	− 254
− 6 25 16	11 22 38 38	*R.* − 1 34	ω − p = 6 24 42		
11 16 13 22	2 24 38 33		2ω − p = 0 8 28	+ *sin.* 8 28	+ 40
− 1 34	*Eq.* 6 26 22				− 197
11 16 11 48	− 1 6				− 3 17
− 3 17					
11 16 8 31	Lieu calculé.	*Erreur* + 3′ 31″.			
11 16 5 0	Lieu observé.				

Ce qui me fait croire que dans l'Obſervation précédente il s'eſt gliſſé une faute, vû que la différence des erreurs ne ſçauroit être ſi conſidérable, quelque loi que ſuive Saturne dans ſon mouvement.

XV. *A.* 1674. *Octob.* 17j 12^h 0′ ♄ … 0^s 24° 52′ 40″.

11 0 36 37	8 27 36 0	3 20 48	ω = 7 1 34		
+ 2 53	+ 28 7	0 24 53	2ω = 2 3 8	+ *sin.* 63 8	− 28
1 0 39 30	8 28 4 7	9 4 5	ω − q = 3 1 24	+ *sin.* 88 36	− 257
− 5 41 28	1 0 39 30	*Réd.* + 15	ω − p = 5 12 5		
0 24 58 2	4 2 34 23		2ω − p = 0 13 39	+ *sin.* 13 39	+ 66
+ 15	*Eq.* 5 42 30				− 219
0 24 58 17	− 1 2				− 3 39
− 3 39	5 41 28				
0 24 54 38	Lieu calculé.	*Erreur* + 1′ 58″.			
0 24 52 40	Lieu observé.				

XVI. *A.* 1678. *Déc.* 11j 16^h 13′ ♄ … 2^s 20° 38′ 12″.

2 21 23 53	8 27 41 22	3 20 52	ω = 9 15 45		
+ 2 9	+ 28 7	2 20 38	2ω = 7 1 30	− *sin.* 31 30	+ 17
2 21 26 2	8 28 9 29	10 29 46	ω − q = 3 22 26	+ *sin.* 67 34	− 235
− 0 49 10	2 21 26 2	*R.* + 1 28	ω − p = 3 18 20		
2 20 36 52	5 23 16 33		2ω − p = 1 4 5	+ *sin.* 34 5	+ 164
+ 1 28	*Eq.* 0 49 19				− 54
2 20 38 20	− 9				
− 54					
2 20 37 26	Lieu calculé.	*Erreur* − 0′ 46″.			
2 20 38 12	Lieu observé.				

XVII. *A.* 1682. *Janv.* 22j 3^h 20′ ♄ … 4^s 3° 9′ 15″.

3 29 30 0	8 27 45 23	3 20 56	ω = 11 13 34		
+ 1 25	+ 28 7	4 3 9	2ω = 10 27 8	− *sin.* 32 52	+ 18
3 29 31 25	8 28 13 30	0 12 13	ω − q = 4 10 2	+ *sin.* 49 58	− 196
+ 3 35 37	3 29 31 25	*Réd.* − 43	ω − p = 2 8 45		
4 3 7 2	7 1 17 55		2ω − p = 1 22 19	+ *sin.* 52 19	+ 231
− 43	*Eq.* 3 36 21				+ 53
4 3 6 19	− 44				
+ 53					
4 3 7 12	Lieu calculé.	*Erreur* − 2′ 3″.			
4 3 9 15	Lieu observé.				

XVIII. *A.* 1686. *Mars* 16^j 10^h 28′ ♄... 5^s 26° 47′ 10″.

5 20 13 30	8 27 50 47	3 21 1	ω = 1 17 4		
+ 0 41	+ 28 7	5 26 47	2ω = 3 4 8	+ *ſin.* 85 52	− 32
5 20 14 11	8 28 18 54	2 5 46	ω − q = 4 21 26	+ *ſin.* 38 34	− 158
+ 6 29 19	5 20 14 11	*R.* − 1 15	ω − p = 0 10 48		
5 26 43 30	8 21 55 17		2ω − p = 1 27 52	+ *ſin.* 57 52	+ 245
− 1 15	*Eq.* 6 30 42				+ 55
5 26 42 15	− 1 23				
+ 55					

5 26 43 10 Lieu calculé.
5 26 47 10 Lieu obſervé. } *Erreur* − 4′ 0″.

XIX. *A.* 1690. *Mai* 5^j 7^h 0′ ♄.... 7^s 15° 34′ 0″.

7 10 50 5	8 27 56 8	3 21 4	ω = 4 5 27		
− 0 3	+ 28 7	7 15 34	2ω = 8 10 54	− *ſin.* 70 54	+ 30
7 10 50 2	8 28 24 15	3 24 30	ω − q = 5 20 17	+ *ſin.* 9 43	− 43
+ 4 34 20	7 10 50 2	*R.* + 1 15	ω − p = 10 22 53		
7 15 24 22	10 12 25 47		2ω − p = 2 28 20	+ *ſin.* 88 20	+ 297
+ 1 15	*Eq.* 4 35 23				+ 284
7 15 25 37	− 1 3				+ 4′ 44″
+ 4 44					

7 15 30 21 Lieu calculé.
7 15 34 0 Lieu obſervé. } *Erreur* − 3′ 39″.

XX. *A.* 1695. *Juil.* 3^j 23^h 40′ ♄.... 9^s 12° 29′ 40″.

9 14 0 2	8 28 2 48	3 21 8	ω = 7 20 21		
− 0 58	+ 28 7	9 12 30	2ω = 3 10 42	+ *ſin.* 79 18	− 32
9 13 59 4	8 28 30 55	5 21 22	ω − q = 7 5 14	− *ſin.* 35 14	+ 147
− 1 37 17	9 13 59 4	*Réd.* + 30	ω − p = 8 28 34		
9 12 21 47	0 15 28 9		2ω − p = 4 18 55	+ *ſin.* 41 5	+ 198
+ 30	*Eq.* 1 37 40				+ 314
9 12 22 17	− 23				+ 5′ 14″
+ 5 14					

9 12 27 31 Lieu calculé.
9 12 29 40 Lieu obſervé. } *Erreur* − 2′ 9″.

XXI. *A.* 1698. *Août* 8^j 19^h 0′ ♄.... 10^s 16° 58′ 40″.

10 21 54 47	8 28 6 51	3 21 11	ω = 9 12 15		
− 1 31	+ 28 7	10 16 59	2ω = 6 24 30	− *ſin.* 24 30	+ 14
10 21 53 16	8 28 34 58	6 25 48	ω − q = 7 21 0	− *ſin.* 51 0	+ 199
− 4 59 25	10 21 53 16	*R.* − 1 16	ω − p = 7 20 17		
10 16 53 51	1 23 18 18		2ω − p = 5 2 32	+ *ſin.* 27 28	+ 133
− 1 16	*Eq.* 5 0 39				+ 346
10 16 52 39	− 1 14				+ 5 46
+ 5 46	4 59 25				

10 16 58 21 Lieu calculé.
10 16 58 40 Lieu obſervé. } *Erreur* − 0′ 19″.

XXII. *A.* 1701. *Sept.* 16^j 2^h $0'$ ♄… $11^s\ 23^\circ\ 21'\ 20''$.

11 29 52 32	8 28 10 53	3 21 15	ω = 11 11 21		
— 2 4	+ 28 7	11 23 21	2ω = 10 22 42	— *ſin.* 37 18	+ 20
11 29 50 28	8 28 39 0	8 2 6	$\omega-q$ = 8 12 55	— *ſin.* 72 55	+ 241
— 6 29 28	11 29 50 28	*R.* — 1 22	$\omega-p$ = 6 14 21		
11 23 21 0	3 1 11 28		$2\omega-p$ = 5 25 42	+ *ſin.* 4 18	+ 18
— 1 22	*Eq.* 6 31 8				+ 279
11 23 19 38	— 1 40				+ 4, 39
+ 4 39					

11 23 24 17 Lieu calculé.
11 23 21 20 Lieu obſervé. } *Erreur.* + $2'\ 57''$.

XXIII. *A.* 1704. *Octob.* 25^j 12^h $0'$ ♄… $1^s\ 2^\circ\ 36'\ 40''$.

1 7 54 33	8 28 14 54	3 21 19	ω = 1 14 32		
— 2 37	+ 28 7	1 2 37	2ω = 2 29 4	+ *ſin* 89 4	— 32
1 7 51 56	8 28 43 1	9 11 18	$\omega-q$ = 9 7 30	— *ſin.* 82 30	+ 254
— 5 16 39	1 7 51 56	*R.* + 0 38	$\omega-p$ = 5 9 25		
1 2 35 17	4 9 8 55		$2\omega-p$ = 6 23 57	— *ſin.* 23 57	— 119
+ 38	*Eq.* 5 17 23				+ 103
1 2 35 55	— 44				+ 1, 43
+ 1 43					

1 2 37 38 Lieu calculé.
1 2 36 40 Lieu obſervé. } *Erreur* + $0'\ 55''$.

XXIV. *A.* 1706. *Novemb.* 22^j 10^h $37'$ ♄… $2^s\ 0^\circ\ 16'\ 23''$.

2 3 17 53	8 28 17 36	3 21 21	ω = 2 19 9		
— 2 59	+ 28 7	2 0 16	2ω = 5 8 18	+ *ſin.* 21 42	— 12
2 3 14 54	8 28 45 43	10 8 55	$\omega-q$ = 9 15 37	— *ſin.* 74 23	+ 247
— 2 59 18	2 3 14 54	*R.* + 1 36	$\omega-p$ = 4 11 22		
2 0 15 36	5 4 29 11		$2\omega-p$ = 7 0 31	— *ſin.* 30 31	— 147
+ 1 36	*Eq.* 3 0 7				+ 88
2 0 17 12	— 49				+ 1 28
+ 1 28					

2 0 18 40 Lieu calculé.
2 0 16 23 Lieu obſervé. } *Erreur* + $2'\ 17''$.

XXV. *A.* 1708. *Décemb.* 19^j 19^h $26'$ ♄… $2^s\ 28^\circ\ 37'\ 11''$.

2 28 42 4	8 28 20 18	3 21 22	ω = 3 18 49		
— 3 32	+ 28 7	2 28 37	2ω = 7 7 38	— *ſin.* 37 38	+ 20
2 28 38 32	8 28 48 25	11 7 15	$\omega-q$ = 9 18 26	— *ſin.* 71 34	+ 242
— 1 13	2 28 38 32	*R.* + 1 11	$\omega-p$ = 3 10 34		
2 28 37 19	5 29 50 7		$2\omega-p$ = 6 29 23	— *ſin.* 29 23	— 147
+ 1 11	*Eq.* 0 1 13				+ 115
2 28 38 30	— 0				+ 1, 55
+ 1 55					

2 28 40 25 Lieu calculé.
2 28 37 11 Lieu obſervé. } *Erreur.* + $3'\ 14''$.

XXVI. *A.* 1711. *Janv.* 17j 1h 4′ ♄... 3s 26° 54′ 36″.

3 24 6 0	8 28 22 58	3 21 24	ω = 4 19 13		
— 3 54	+ 28 7	3 26 55	2ω = 9 8 26	— *sin.*81 34	+ 32
3 24 2 6	8 28 51 5	0 5 31	ω—q = 9 21 59	— *sin.*68 1	+ 237
+ 2 57 7	3 24 2 6	*Réd.* — 21	ω—p = 2 10 9		
3 26 59 13	6 25 11 1		2ω—p = 6 29 22	— *sin.*29 22	— 147
— 21	*Eq.* 2 57 58				+ 122
3 26 58 52	— 51				+ 2′ 2″
+ 2 2					

3 27 0 54 Lieu calculé.
3 26 54 36 Lieu observé. } *Erreur* + 6′ 18″.

Puisque cette erreur est si grande, j'examinerai l'Observation suivante.

XXVII. *A.* 1712. *Janv.* 31j 0h 6′ ♄... 4s 10° 51′ 12″.

4 6 47 39	8 28 24 19	3 29 25	ω = 5 6 27		
— 4 5	+ 28 7	4 10 51	2ω = 10 12 54	— *sin.*47 6	+ 24
4 6 43 34	8 28 52 26	0 18 26	ω—q = 9 25 55	— *sin.*64 5	+ 230
+ 4 13 0	4 6 43 34	*R.* — 1 3	ω—p = 1 26 4		
4 10 56 34	7 7 51 8		2ω—p = 7 2 31	— *sin.*32 31	— 155
— 1 3	*Eq.* 4 14 13				+ 99
4 10 55 31	— 1 13				+ 1′ 39″
+ 1 39					

4 10 57 10 Lieu calculé.
4 10 51 12 Lieu observé. } *Erreur* + 5′ 58″.

XXVIII. *A.* 1716. *Mars* 23j 19h 4′ ♄... 6s 3° 48′ 1″.

5 27 30 7	8 28 29 43	3 21 29	ω = 7 28 55		
— 4 49	+ 28 7	6 3 48	2ω = 3 27 50	+ *sin.*62 10	— 28
5 27 25 18	8 28 57 50	2 12 19	ω—q = 10 26 39	— *sin* 33 21	+ 140
+ 6 29 20	5 27 25 18	*R.* — 0 57	ω—p = 0 7 52		
6 3 54 38	8 28 27 28		2ω—p = 8 6 47	— *sin.*66 47	— 270
— 0 57	*Eq.* 6 31 16				— 158
6 3 53 41	— 1 56				— 2′ 38″
— 2 38					

6 3 51 3 Lieu calculé.
6 3 48 1 Lieu observé. } *Erreur* + 3′ 2″.

XXIX. *A.* 1719. *Avril* 30j 20h 15′ ♄... 7s 10° 17′ 42″.

7 5 27 22	8 28 33 44	3 21 32	ω = 9 25 28		
— 5 22	+ 28 7	7 10 18	2ω = 7 20 56	— *sin.*50 56	+ 25
7 5 22 0	8 29 1 51	3 18 46	ω—q = 11 16 4	— *sin.*13 56	+ 62
+ 5 0 40	7 5 22 0	*R.* + 1 2	ω—p = 11 0 52		
7 10 22 40	10 6 20 9		2ω—p = 8 26 20	— *sin.*86 20	— 295
+ 1 2	*Eq.* 5 2 12				— 208
7 10 20 42	— 1 32				+ 3 28
— 3 28					

7 10 20 14 Lieu calculé.
7 10 17 42 Lieu observé. } *Erreur* + 2′ 32″.

XXX.

XXX. *A.* 1723. *Juin* 17j 15h 53′ ♄... 8s 26° 12′ 6″.

8 25 59 51	8 28 39 5	3 21 35	ϖ = 0 6 25		
— 6 8	+ 28 7	8 26 12	2ϖ = 0 12 50	+ *ſin.*12 50	— 7
8 25 53 43	8 29 7 12	5 4 37	ϖ—q = 0 8 56	+ *ſin.* 8 56	— 40
— 0 20 27	8 25 53 43	R. + 1 17	ϖ—p = 9 10 47		
8 26 14 10	11 26 46 31		2ϖ—p = 9 17 12	— *ſin.*72 48	— 279
+ 1 17	Eq. 0 20 33				— 326
8 26 15 27	— 6				— 5′ 26″
— 5 26					

8 26 10 1 Lieu calculé.
8 26 12 6 Lieu obſervé. } *Erreur.* — 2′ 5″.

XXXI. *A.* 1726. *Juil.* 23j 1h 42′ ♄... 10s 0° 13′ 33″.

10 3 53 48	8 28 43 6	3 21 38	ϖ = 2 12 9		
— 6 39	+ 28 7	10 0 14	2ϖ = 4 24 18	+ *ſin.*35 42	— 19
10 3 47 9	8 29 11 13	6 8 36	ϖ—q = 1 8 45	+ *ſin.*38 45	— 161
— 3 28 42	10 3 47 9	R. — 0 31	ϖ—p = 8 9 39		
10 0 18 27	1 4 35 56		2ϖ—p = 10 21 48	— *ſin.*38 12	— 181
— 31	Eq. 3 29 47				— 361
10 0 17 56	— 1 5				— 6′ 1″
— 6 1					

10 0 11 55 Lieu calculé.
10 0 13 33 Lieu obſervé. } *Erreur* — 1′ 38″.

XXXII. *A.* 1728. *Août* 15j 22h 50′ ♄... 10s 23° 36′ 50″.

10 29 11 2	8 28 45 48	3 21 40	ϖ = 3 26 29		
— 7 1	+ 28 7	10 23 37	2ϖ = 7 22 58	— *ſin.*52 58	+ 26
10 29 4 1	8 29 13 55	7 1 57	ϖ—q = 1 28 48	+ *ſin.*58 48	— 219
— 5 24 28	10 29 4 1	R. — 1 29	ϖ—p = 7 17 47		
10 23 39 33	1 29 50 6		2ϖ—p = 11 14 16	— *ſin.*15 44	— 76
— 1 29	Eq. 5 26 17				— 269
10 23 38 4	— 1 49				— 4′ 29″
— 4 29					

10 23 33 35 Lieu calculé.
10 23 36 50 Lieu obſervé. } *Erreur* — 3′ 15″.

XXXIII. *A.* 1731. *Septemb.* 23j 15h 51′ ♄... 0s 0° 30′ 50″.

0 7 9 34	8 28 49 51	3 22 25	ϖ = 5 20 27		
— 7 34	+ 28 7	0 0 31	2ϖ = 11 10 54	— *ſin.*19 6	+ 10
0 7 2 0	8 29 17 58	8 8 6	ϖ—q = 2 15 23	+ *ſin.*75 23	— 248
— 6 28 37	0 7 2 0	R. — 1 9	ϖ—p = 6 10 13		
0 0 33 23	3 7 44 2		2ϖ—p = 0 0 40	+ *ſin.* 0 40	+ 4
— 1 9	Eq. 6 30 50				— 234
0 0 32 14	— 2 13				— 3′ 54″
— 3 54					

0 0 28 20 Lieu calculé.
0 0 30 50 Lieu obſervé. } *Erreur.* — 2′ 30″.

XXXIV. *A.* 1737. *Décemb.* 14j 11h 57′ ♄... 2s 22° 28′ 4″.

2 23 19 38	8 28 57 56	3 21 51	ω = 9 7 24		
— 8 40	+ 28 7	2 22 28	2ω = 6 14 48	— *sin.*14 48	+ 8
2 23 10 58	8 29 26 3	11 0 37	ω—q = 3 14 2	+ *sin.*75 58	— 249
— 0 44 58	2 23 10 58	*R.* + 1 24	ω—p = 3 17 9		
2 22 26 0	5 23 44 55		2ω—p = 0 24 33	+ *sin.*24 33	+ 121
+ 1 24	*Eq.* 0 45 14				— 120
2 22 27 24	— 16				— 2′ 0″
— 2 0					

2 22 25 24 Lieu calculé.
2 22 28 4 Lieu obſervé. } *Erreur* — 2′ 40″.

XXXV. *A.* 1738. *Décemb.* 24j 12h 17′ ♄.... 3s 6° 33′ 8″.

3 5 53 20	8 28 59 16	3 21 52	ω = 9 27 34		
— 9 0	+ 28 7	3 6 33	2ω = 7 25 8	— *sin.*55 8	+ 26
3 5 44 20	8 29 27 23	11 14 41	ω—q = 3 20 54	+ *sin.*69 6	— 240
+ 0 45 48	3 5 44 20	*R.* + 0 52	ω—p = 3 4 37		
3 6 30 8	6 6 16 57		2ω—p = 1 2 11	+ *sin.*32 11	+ 155
+ 52	*Eq.* 0 46 5				— 59
3 6 31 0	— 17				
— 59					

3 6 30 1 Lieu calculé.
3 6 33 8 Lieu obſervé. } *Erreur* — 3′ 7″.

XXXVI. *A.* 1745. *Mars* 18j 10h 40′ ♄.... 5s 28° 26′ 10″.

5 22 7 37	8 29 7 18	3 21 58	ω = 1 7 43		
— 10 8	+ 28 7	5 28 26	2ω = 2 15 26	+ *sin.*75 26	— 31
5 21 57 29	8 29 35 25	2 6 28	ω—q = 4 11 27	+ *sin.*48 33	— 190
+ 6 28 25	5 21 57 29	*R.* — 1 13	ω—p = 0 10 29		
5 28 25 54	9 22 22 4		2ω—p = 1 18 12	+ *sin.*48 12	+ 218
— 1 13	*Eq.* 6 30 54				— 3
5 28 24 41	— 2 29				
— 3	6 28 25				

5 28 24 38 Lieu calculé.
5 28 26 10 Lieu obſervé. } *Erreur* — 1′ 32″.

Ces Obſervations réduites au calcul, me paroiſſent ſuffiſantes pour prouver la préférence de mes Tables de Saturne ſur celles dont on s'eſt ſervi juſqu'ici; vû que dans les miennes l'erreur ne ſurpaſſe que fort rarement 5′; & il eſt probable que dans ces cas mêmes, une bonne partie en doit être attribuée aux Obſervations: au lieu que les autres Tables s'écartent ſouvent des Obſervations juſqu'à 20′ & au-delà. Mais outre cela, je

remarque une certaine régularité dans les erreurs ; car

depuis 1582 jusqu'à 1585 elles sont affirmatives.
Depuis 1585 jusqu'à 1599 elles sont négatives.
Depuis 1665 jusqu'à 1675 elles sont affirmatives.
Depuis 1678 jusqu'à 1701 elles sont négatives.
Depuis 1701 jusqu'à 1720 elles sont affirmatives.
Depuis 1720 jusqu'à 1745 elles sont négatives.

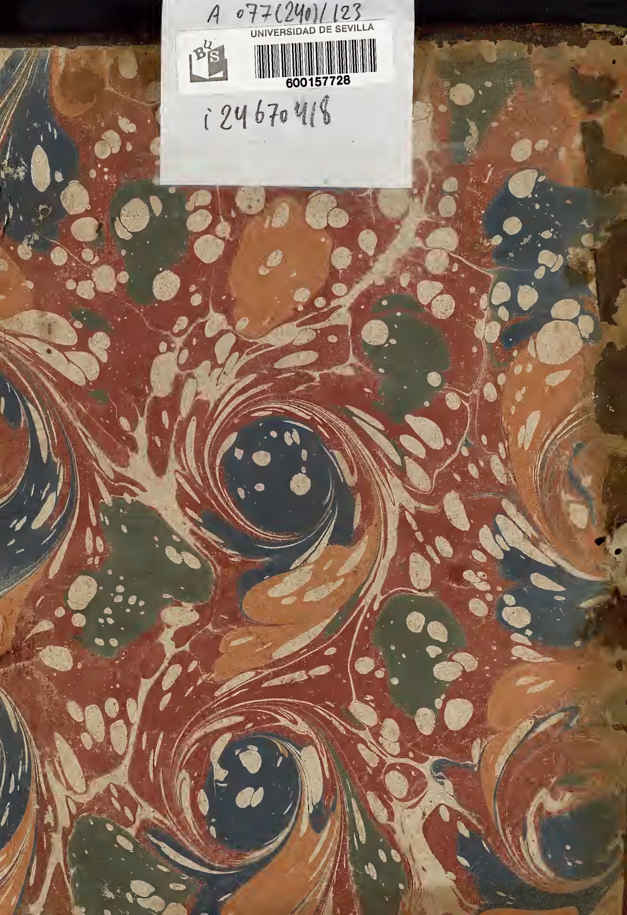
Ainsi j'espere qu'avec le tems, quand on aura plusieurs Observations assez exactes, on sera en état de délivrer encore les Tables de ces petites erreurs, & qu'on en pourra assigner la cause véritable. Au reste, il faut remarquer que les momens des oppositions de ♄ & ☉ ont été conclus de plusieurs Observations, dont les erreurs inévitables, & principalement les trop grands intervalles de tems qu'on a probablement souvent été obligé d'employer, doivent nécessairement rendre cette détermination moins certaine ; de sorte que la plus grande partie des erreurs de mes Tables tombera vraisemblablement sur les Observations mêmes.

FIN.

Fig. 1.
C
P
Q
♌
N
A
Fig. 2.
☉
♃
R
A
♄
Q
B
♌
N








PRIX
DE
LACADEM
TOM. VI
3